

Optimierungstheorie

Lösung zum 5. Übungsblatt – Sommersemester 2025

Aufgabe 13: Geben Sie das duale Problem zum linearen Programm (P) mit

$$\text{Max } x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

unter den Nebenbedingungen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, $x_1 - x_2 - x_3 = -2$, $x_1 + x_2 \leq 5$ und $x_3 \geq 0$ an. Welche Aussage lässt sich damit über das primale Problem machen?

Lösung: Um vorzeichenbeschränkte Variable zu erreichen führen wir $x_1^+ = \max\{0, x_1\}$, $x_1^- = \max\{0, -x_1\}$ und $x_2^+ = \max\{0, x_2\}$, $x_2^- = \max\{0, -x_2\}$ ein. Für die Ungleichung wird noch eine Schlupfvariable $x_4 > 0$ benötigt. Nach Umbenennen der Variablen erhalten wir das äquivalente Optimierungsproblem (P'):

$$\text{Min}_{x \in M} c^\top x$$

in $M = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^6 : Ax = b\}$ mit $c = (-1, 1, 2, -2, -3, 0)^\top$, $b = (2, 5)^\top$ und

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet das zugehörige duale Problem

$$\text{Max}_{y \in N} 2y_1 + 5y_2$$

auf

$$N = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y \leq \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Betrachten wir die Bedingungen $-y_1 + y_2 \leq -1$, $y_1 - y_2 \leq 1$, $y_1 + y_2 \leq 2$, $-y_1 - y_2 \leq -2$, $y_1 \leq -3$, $y_2 \leq 0$, so ergibt sich aus den ersten beiden Ungleichungen $y_1 - y_2 = 1$ und aus den weiteren beiden Ungleichungen $y_1 + y_2 = 2$ mit der einzigen Lösung $y_1 = 3/2$ und $y_2 = 1/2$. Diese erfüllt aber nicht die Ungleichung $y_2 \leq 0$. Somit ist das duale Problem nicht zulässig. Zusammen mit dem starken Dualitätssatz folgt, dass das ursprüngliche Optimierungsproblem keine Lösung besitzt,

$$\inf(\text{P}') = -\infty,$$

also

$$\sup(\text{P}) = \infty.$$

Aufgabe 14: Gegeben seien $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $e = (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

– Es gibt $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ mit $x \neq 0$ und $Ax = 0$.

– Es gibt $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ mit $Ax = 0$ und $e^\top x = 1$.

- (b) Beweisen Sie mit dem starken Dualitätssatz den Transpositionssatz von Gordan: Es gibt eine Lösung zu $Ax = 0$ mit $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n \setminus \{0\}$ genau dann, wenn es kein $y \in \mathbb{R}^m$ gibt mit $A^\top y < 0$.

Hinweis: Für den zweiten Teil betrachte man die Zielfunktion $0^\top x$ auf der im ersten Teil gegebenen Menge. Nutzen Sie dazu die zweite Formulierung.

Lösung:

- (a) „ \Rightarrow “ Ist $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n \setminus \{0\}$ Lösung zu $Ax = 0$, so gibt es $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $x_i > 0$. Also ist $e^\top x > 0$, und mit $\hat{x} = \frac{1}{e^\top x} x$ ist eine nicht negative Lösung zu $A\hat{x} = 0$ mit $e^\top \hat{x} = 1$ gegeben.
 „ \Leftarrow “ Gilt andererseits $Ax = 0$ und $e^\top x = 1$ für ein $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$, dann ist insbesondere $x \neq 0$, und wir haben eine Lösung des ersten Systems.
- (b) Mithilfe der zweiten Formulierung aus Teil (a) zeigen wir den Transpositionssatz. Dazu formulieren wir das lineare Optimierungsproblem

$$(P) \quad \text{Min}_{x \in M} 0^\top x$$

auf

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : \begin{pmatrix} A \\ e^\top \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Das zugehörige duale Problem lautet

$$(D) \quad \text{Max}_{y \in N} (0, \dots, 0, 1)y = \text{Max}_{y \in N} y_{m+1}$$

auf

$$N = \left\{ y \in \mathbb{R}^{m+1} : (A^\top | e)y \leq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Da $y = 0 \in N$ ist, ist (D) zulässig.

„ \Rightarrow “ Ist das System aus Teil (a) lösbar, so ist (P) zulässig. Nach dem starken Dualitätssatz gilt $\max(D) = \min(P) = 0$. Angenommen es existiert $y' = (y_1, \dots, y_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ mit $A^\top y' < 0$, dann gibt es $y_{m+1} > 0$ mit $A^\top y' + y_{m+1}e \leq 0$. Damit ist $y = (y_1, \dots, y_m, y_{m+1})^\top \in N$, und es gilt $y_{m+1} = (0, \dots, 0, 1)^\top y > 0$ im Widerspruch zu $\max(D) = 0$.

„ \Leftarrow “ Nehmen wir nun an, dass das System aus (a) keine nichtnegative Lösung besitzt, d. h. (P) ist nicht zulässig. In diesem Fall folgt aus dem starken Dualitätssatz $\sup(D) = \infty$. Deswegen lässt sich $y \in N \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ so wählen, dass $y_{m+1} = (0, \dots, 0, 1)^\top y > 0$ ist. Es folgt

$$A^\top y' + y_{m+1}e \leq 0$$

mit $y' = (y_1, \dots, y_m)^\top$ bzw.

$$A^\top y' \leq -y_{m+1}e < 0.$$

Für dieses $y' \in \mathbb{R}^m$ gilt somit $A^\top y' < 0$.

Aufgabe 15: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ schiefsymmetrisch, d. h. $A = -A^\top$. Weiter sei $c \in \mathbb{R}^n$ und $b = -c$. Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem:

$$(P') \quad \text{Minimiere } c^\top x \quad \text{mit } x \in M' := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b, x \geq 0\}.$$

Zeigen Sie:

- (a) (P') ist selbstdual, d.h. das duale Problem von (P') ist äquivalent zu (P') .
- (b) Falls $M' \neq \emptyset$, so besitzt (P') eine optimale Lösung $x^* \in \mathbb{R}^n$ und $c^\top x^* = 0$.
- (c) Geben Sie ein primal-duales Paar linearer Optimierungsprobleme an, von denen keines eine zulässige Lösung besitzt.

Lösung:

- (a) Wir bringen das Problem (P') in Standardform und schreiben $b = -c$. Mit der Schlupfvariablen $z = Ax + c$ gilt dann

$$(P') \text{ ist äquivalent zu}$$

$$(P) \quad \text{Min } c^\top x + 0^\top z \quad \text{unter} \quad \begin{bmatrix} A & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = -c \quad \text{und} \quad x, z \geq 0.$$

Das duale Problem von (P) ist dann gegeben durch ($b = -c$)

$$(D) \quad \text{Max } -c^\top y \quad \text{unter} \quad \begin{bmatrix} A^\top \\ -I \end{bmatrix} y \leq \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{also}$$

$$\text{Max } -c^\top y \quad \text{unter} \quad \begin{bmatrix} -A \\ -I \end{bmatrix} y \leq \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{was äquivalent ist zu}$$

$$(D') \quad - \text{Min } c^\top y \quad \text{unter} \quad y \in N' := \{y \in \mathbb{R}^n : Ay \geq -c, y \geq 0\} = M'.$$

Bis auf das Vorzeichen beim Zielfunktionswert sind (P') und (D') also identisch.

- (b) Mit $M' \neq \emptyset$ ist nach (a) natürlich auch $N' \neq \emptyset$. Nach dem starken Dualitätssatz besitzt damit (P') bzw. (D') eine optimale Lösung x^* bzw. y^* , und es muss gelten

$$-c^\top y^* = c^\top x^*.$$

Da die Probleme identisch sind (bis auf das Vorzeichen beim Zielfunktionswert) besitzen sie aber auch die gleichen optimalen Lösungen, d.h. $x^* = y^*$, und somit folgt

$$c^\top x^* = 0.$$

- (c) Nach Teil (a) und (b) reicht es, ein nicht zulässiges Problem in der Form

$$\text{Min } c^\top x \quad \text{mit} \quad Ax \geq -c, \quad x \geq 0$$

mit schief-symmetrischer Matrix A zu finden, da das duale Problem dann identisch ist, und folglich ebenfalls nicht zulässig.

Wähle z.B.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{und} \quad c = -e = (-1, \dots, -1)^\top.$$

A ist offensichtlich schief-symmetrisch und die Nebenbedingung $Ax \geq -c = e$ für kein $x \geq 0$ zu erfüllen, da die erste Zeile der Gleichheitsnebenbedingung $-x_2 \geq 1 \Leftrightarrow x_2 \leq -1$ im Widerspruch zu $x \geq 0$ steht.

Anmerkung: Für $c \geq 0$ ist (P') immer zulässig, da $x = 0$ immer in M' . Nach Teil (b) ist $x^* = 0$ immer auch eine optimale Lösung in diesem Fall. Selbstduale Probleme sind interessant für die Berechnung von Startwerten von inneren Punkt-Verfahren.