Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
PD. Dr. Frank Hettlich
Leonie Fink

Karlsruhe, den 20. Juni 2025

Optimierungstheorie
Lösung zum 7. Übungsblatt – Sommersemester 2025

Aufgabe 19: Zeigen Sie, dass eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ genau dann konvex ist, wenn ihr Epigraph $E(f)$ eine konvexe Menge ist.

Hinweis: $E(f) = \{(x,\alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Lösung: Zunächst nehmen wir an, die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei konvex. Um zu zeigen, dass $E(f)$ eine konvexe Menge ist, betrachten wir beliebige Elemente des Epigraphs $\widehat{x_1}, \widehat{x_2} \in E(f)$. Nach Definition existieren dann $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ sowie $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $\widehat{x_i} = (x_i, \alpha_i)$ und $f(x_i) \leq \alpha_i$, $i = 1,2$. Für $t \in [0,1]$ betrachten wir die Konvexkombination

$$\hat{x} := (x,\alpha) := t\widehat{x_1} + (1-t)\widehat{x_2} = \big(tx_1 + (1-t)x_2,\, t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2\big) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Wir überprüfen, ob dies ein Element des Epigraphs ist:

$$f(x) = f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \leqslant t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2 = \alpha.$$

Die erste Abschätzung folgt aus der Konvexität von f, die zweite aus $\widehat{x_i} \in E(f)$, $i = 1,2$. Also ist tatsächlich $\hat{x} \in E(f)$ und damit $E(f)$ konvex.
Nun nehmen wir an, dass der Epigraph $E(f)$ konvex ist. Es seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Dann sind $\widehat{x_i} := (x_i, f(x_i)) \in E(f)$, $i = 1,2$. Da $E(f)$ konvex ist, liegt die Konvexkombination

$$t\widehat{x_1} + (1-t)\widehat{x_2} \in E(f).$$

Aus der Definition des Epigraphs erhalten wir

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Also ist f eine konvexe Funktion.

Aufgabe 20:

(a) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie: f ist genau dann konvex, wenn für jedes $m \in \mathbb{N}$, für alle $x_1, \ldots, x_m \in D$ und alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$ die **Jensensche Ungleichung** gilt:

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i).$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (a) die **Ungleichung zwischen dem gewichteten arithmetischen und dem geometrischen Mittel:**
Es seien $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m > 0$ sowie $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$. Dann gilt:

$$x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\lambda_m} \leq \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m.$$

Hinweis zu (b): Verwenden Sie die Funktion $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$.

Lösung: (a) Ist $D = \emptyset$, so ist nichts zu zeigen. Es sei also $D \neq \emptyset$.

„$\Longleftarrow$“ : Betrachtet man $m = 2$, so gilt nach Voraussetzung für alle $x, y \in D$ und $\lambda \in [0,1]$ die Abschätzung

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

d.h. f ist konvex.

„$\Longrightarrow$“ : Für $m = 1$ ist die Behauptung klar. Der Fall $m = 2$ ist ebenfalls klar, da f konvex ist.

Für allgemeines $m \in \mathbb{N}$ erhält man die Behauptung mittels vollständiger Induktion: Die Aussage gelte für ein $m \in \mathbb{N}$. Wir beweisen nun, dass sie dann auch für $m+1$ gilt.

Es seien $x_1, \ldots, x_{m+1} \in D$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1} \geq 0$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_{m+1} = 1$. Ohne Einschränkung können wir $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1} > 0$ annehmen. Setzen wir $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_m\ (> 0)$, so ist $\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_m}{\lambda} x_m \in D$, da $\frac{\lambda_1}{\lambda} + \ldots + \frac{\lambda_m}{\lambda} = 1$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i + \lambda_{m+1} x_{m+1}\right) = f\left(\lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i}_{\in D} + (1-\lambda) \underbrace{x_{m+1}}_{\in D}\right) \\
&\overset{f \text{ konvex}}{\leq} \lambda f\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i\right) + (1-\lambda) f(x_{m+1}) \\
&\overset{\text{Ind.vor.}}{\leq} \lambda \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} f(x_i) + (1-\lambda) f(x_{m+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i) + \lambda_{m+1} f(x_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i f(x_i).
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

(b) Es sei $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$. Wegen $f''(x) = e^x > 0$ ist f konvex. Es seien nun $x_1, \ldots, x_m > 0$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$. Mit $y_i = \ln(x_i)$ für $i = 1, \ldots, m$ erhält man dann

$$\begin{aligned}
x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\lambda_m} &= e^{\lambda_1 \ln(x_1)} \cdot \ldots \cdot e^{\lambda_m \ln(x_m)} = e^{\lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_m y_m} = f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i\right) \\
&\overset{f \text{ konvex}}{\leq} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(y_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e^{\ln(x_i)} = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m.
\end{aligned}$$

Aufgabe 21:

(a) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $f_1, f_2 \colon D \to \mathbb{R}$ seien konvexe Funktionen. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f \colon D \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\},$$

konvex ist.

(b) Es sei $k \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sowie $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}^m$ und $\|\cdot\|$ bezeichne eine Norm auf dem $\mathbb{R}^m$. Weisen Sie nach, dass die folgende Funktion konvex ist:

$$g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \max_{i=1,\ldots,k} \|A_i x - b_i\|.$$

Lösung: (a) Für alle $x, y \in D$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \max\{f_1(\lambda x + (1-\lambda)y),\ f_2(\lambda x + (1-\lambda)y)\} \\
&\leq \max\{\lambda f_1(x) + (1-\lambda)f_1(y),\ \lambda f_2(x) + (1-\lambda)f_2(y)\} \\
&\leq \lambda \max\{f_1(x), f_2(x)\} + (1-\lambda)\max\{f_1(y), f_2(y)\} \\
&= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).
\end{aligned}$$

(b) *Vorbemerkung:* Ist $k \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und sind $f_1, \ldots, f_k \colon D \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen, so ist auch die Funktion

$$f \colon D \to \mathbb{R},\ f(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_k(x)\},$$

konvex.

Der Beweis der Vorbemerkung erfolgt induktiv. Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen und der Fall $k = 2$ wurde in Teil (a) abgehandelt. Die Behauptung gelte nun für ein $k \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass sie dann auch für $k + 1$ gilt. Für jedes $x \in D$ gilt

$$f(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_k(x), f_{k+1}(x)\} = \max\{\max\{f_1(x), \ldots, f_k(x)\}, f_{k+1}(x)\}.$$

Die Funktion $g \colon D \to \mathbb{R}$, $g(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_k(x)\}$ ist nach Induktionsvoraussetzung konvex und damit nach Teil (a) auch die Funktion $f = \max\{g, f_{k+1}\}$. Der Induktionsbeweis ist damit beendet.

Um die Behauptung aus der Aufgabenstellung zu beweisen, müssen wir also nur noch zeigen, dass die Funktionen

$$f_i(x) = \|A_i x - b_i\|, \quad x \in D,$$

für jedes $i = 1, \ldots, k$ konvex sind. Das ist leicht zu zeigen, denn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned}
f_i(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \|A_i(\lambda x + (1-\lambda)y) - b_i\| = \|\lambda(A_i x - b_i) + (1-\lambda)(A_i y - b_i)\| \\
&\leq \|\lambda(A_i x - b_i)\| + \|(1-\lambda)(A_i y - b_i)\| = \lambda\|A_i x - b_i\| + (1-\lambda)\|A_i y - b_i\| \\
&= \lambda f_i(x) + (1-\lambda)f_i(y).
\end{aligned}$$

Zusammen mit der Vorbemerkung folgt die Konvexität von g.