Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
PD. Dr. Frank Hettlich
Leonie Fink

Karlsruhe, den 27. Juni 2025

Optimierungstheorie
Lösung zum 8. Übungsblatt – Sommersemester 2025

Aufgabe 22: Zeigen Sie, dass jede beschränkte konvexe Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konstant ist.

Lösung: Angenommen f wäre nicht konstant. Dann gäbe es $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) \neq f(y)$. Sei dabei o.B.d.A. $f(x) < f(y)$. Zu jedem $\lambda \in [0, 1)$ definieren wir nun

$$z_\lambda \coloneqq \frac{1}{1-\lambda}\, y - \frac{\lambda}{1-\lambda}\, x \,.$$

Dann gilt

$$y = \lambda x + (1-\lambda)\, z_\lambda \,, \qquad \lambda \in [0,1)\,.$$

Also ist aufgrund der Konvexität von f

$$f(y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)\, f(z_\lambda)$$

und somit

$$f(z_\lambda) \geq \frac{f(y) - \lambda f(x)}{1-\lambda} \to \infty\,, \qquad \lambda \to 1$$

im Widerspruch zur Beschränktheit von f. Folglich muss f konstant sein.

Aufgabe 23: Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Des Weiteren seien x^* und $z \in \mathbb{R}^n$.

(a) Die Funktion $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $\varphi(t) = \frac{1}{t}\,[f(x^* + tz) - f(x^*)]\,.$
Zeigen Sie: φ ist monoton wachsend.

(b) Beweisen Sie die Existenz der einseitigen Richtungsableitung

$$\partial f(x^*)z := \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \varphi(t) = \inf_{t>0} \varphi(t).$$

(c) Zeigen Sie: f besitzt genau dann ein Minimum im Punkt x^*, wenn $\partial f(x^*)(x - x^*) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Hinweise: In allen drei Teilaufgaben können Sie die Konvexität von f ausnutzen. In Teil (b) kann die Betrachtung der Punkte $x^* - z$, x^* und $x^* + tz$ hilfreich sein, um nachzuweisen, dass die Funktion φ nach unten beschränkt ist.

Lösung:

(a) Es seien $t_1, t_2 \in (0, \infty)$ mit $0 < t_1 < t_2$. O.B.d.A. gelte $z \neq 0$. Dann existiert $\lambda \in (0, 1)$ mit der Eigenschaft

$$x^* + t_1 z = \lambda x^* + (1-\lambda)(x^* + t_2 z) = x^* + (1-\lambda)t_2 z.$$

Daraus erhält man nach Subtraktion von x^* die Gleichung $1 - \lambda = \frac{t_1}{t_2}$, also $\lambda = \frac{t_2 - t_1}{t_2}$. Mithilfe der Konvexität von f können wir dann abschätzen:

$$\varphi(t_1) = \frac{1}{t_1}\,[f(\lambda x^* + (1-\lambda)(x^* + t_2 z)) - f(x^*)]$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{t_1}\left[\lambda f(x^*) + (1-\lambda) f(x^* + t_2 z) - f(x^*)\right] \\
&= \frac{1}{t_1}(1-\lambda)\left[f(x^* + t_2 z) - f(x^*)\right] \\
&= \frac{1}{t_1}\frac{t_1}{t_2}\left[f(x^* + t_2 z) - f(x^*)\right] \\
&= \varphi(t_2).
\end{aligned}$$

Also ist φ monoton wachsend.

(b) Da φ monoton wachsend ist, brauchen wir nur zu zeigen, dass φ nach unten beschränkt ist, um die Existenz der einseitigen Ableitung nachzuweisen. Wir betrachten die Punkte $x^* - z$, x^* sowie $x^* + tz$, wobei $t \in (0,1)$ gelte und $z \neq 0$ vorausgesetzt werde. Der Punkt x^* lässt sich mit einem $\lambda \in (0,1)$ darstellen als

$$x^* = \lambda(x^* - z) + (1-\lambda)(x^* + tz) = x^* + z(-\lambda + (1-\lambda)t).$$

Nach Subtraktion von x^* erhält man daraus $\lambda(1+t) = t$ bzw. $\lambda = \frac{t}{1+t}$. Aufgrund der Konvexität von f können wir nun abschätzen:

$$f(x^*) = f(\lambda(x^* - z) + (1-\lambda)(x^* + tz)) \leq \lambda f(x^* - z) + (1-\lambda) f(x^* + tz)$$

$$\text{also} \qquad \lambda\left[f(x^*) - f(x^* - z)\right] \leq (1-\lambda)\left[f(x^* + tz) - f(x^*)\right].$$

Verwenden wir noch $\frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{1-\frac{t}{1+t}}{\frac{t}{1+t}} = \frac{1}{t}$, so erhalten wir

$$f(x^*) - f(x^* - z) \leq \frac{1}{t}\left[f(x^* + tz) - f(x^*)\right] = \varphi(t).$$

(c) „$\Longrightarrow$“: Ist x^* eine Minimalstelle von f, dann gilt $f(x^* + t(x - x^*)) \geq f(x^*)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $t \in \mathbb{R}$, also auch $\varphi(t) = \frac{1}{t}\left[f(x^* + t(x - x^*)) - f(x^*)\right] \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$. Mit Teil (b) folgt damit $\partial f(x^*)(x - x^*) \geq 0$.

„$\Longleftarrow$“: Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $t \in (0,1)$ gilt aufgrund der Konvexität von f:

$$f(x^* + t(x - x^*)) - f(x^*) = f((1-t)x^* + tx) - f(x^*) \leq (1-t)f(x^*) + tf(x) - f(x^*).$$

Daraus erhält man $\frac{1}{t}\left[f(x^* + t(x - x^*)) - f(x^*)\right] \leq f(x) - f(x^*)$. Mit $t \to 0$ und der Voraussetzung ergibt sich daher $0 \leq \partial f(x^*)(x - x^*) \leq f(x) - f(x^*)$. Also ist x^* eine Minimalstelle von f.

Aufgabe 24: Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $g : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie: g ist genau dann konvex, wenn

$$\overline{D}^2 g(x) := \limsup_{h \to 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} \geq 0$$

für jedes $x \in I$ gilt.

Hinweis: Für ein offenes Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$ und $\hat{x} \in J$ gilt

$$\limsup_{x \to \hat{x}} f(x) \quad = \quad \inf_{r>0} \sup\left\{f(x) : \ x \in \dot{K}(\hat{x}, r) \cap J\right\},$$

wobei

$$\dot{K}(\hat{x}, r) \ = \ (\hat{x} - r, \ \hat{x} + r) \setminus \{\hat{x}\}.$$

Lösung: „$\Longrightarrow$ “: Die Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ sei konvex und $x \in I$. Da der Ausdruck

$$\limsup_{h\to 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2}$$

symmetrisch in h ist, genügt es, diesen für $h > 0$ zu untersuchen.
Es sei nun $h > 0$ so klein, dass $x + h$ und $x - h$ in I liegen. Dann gilt aufgrund der Konvexität von g die Abschätzung

$$2g(x) = 2g\left(\frac{1}{2}(x+h) + \frac{1}{2}(x-h)\right) \le g(x+h) + g(x-h)$$

und damit auch

$$\frac{g(x) - g(x-h)}{h} \le \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Wir erhalten damit

$$\frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = \frac{\frac{g(x+h)-g(x)}{h} - \frac{g(x)-g(x-h)}{h}}{h} \ge 0,$$

woraus sich $\overline{D}^2 g(x) = \limsup\limits_{h\to 0} \frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2} \ge 0$ schließen lässt.

„$\Longleftarrow$ “: *Vorbemerkung:* Wir nehmen an, g sei nicht konvex. Dann existieren $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ und ein $\lambda_1 \in (0,1)$ mit

$$(*) \qquad g\left(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)\, x_2\right) > \lambda_1 g\left(x_1\right) + (1-\lambda_1) g\left(x_2\right).$$

Definiere nun $l : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ durch

$$l(x) = g\left(x_1\right) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\left(g\left(x_2\right) - g\left(x_1\right)\right)$$

und $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = g(x) - l(x).$$

Dann ist f stetig und wegen $(*)$ gilt $\max\limits_{x\in[x_1,x_2]} f(x) > 0$.

Da f stetig und $[x_1, x_2]$ kompakt ist, gibt es nach dem Satz von Weierstraß ein $\hat{x} \in [x_1, x_2]$ mit $f(\hat{x}) = \max\limits_{x\in[x_1,x_2]} f(x)$. Weil $f(x_1) = 0 = f(x_2)$, gilt sogar $\hat{x} \in (x_1, x_2)$.

Für betragsmäßig hinreichend kleines $h > 0$ ist damit

$$0 \ge \frac{\frac{f(\hat{x}+h)-f(\hat{x})}{h} - \frac{f(\hat{x})-f(\hat{x}-h)}{h}}{h} = \frac{g(\hat{x}+h) - 2g(\hat{x}) + g(\hat{x}-h)}{h^2},$$

also $\overline{D}^2 g(\hat{x}) \le 0$. Zusammenfassend gilt also: Ist g nicht konvex, dann gibt es ein $x \in I$ mit $\overline{D}^2 g(x) \le 0$.

Nun zur Aufgabenstellung: Gilt für $g : I \to \mathbb{R}$ die Beziehung $\overline{D}^2 g(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist g notwendigerweise konvex (vgl. Vorbemerkung).
Gilt für g nur $\overline{D}^2 g(x) \ge 0$ für alle $x \in I$, so betrachte mit $\varepsilon > 0$ die Funktion $g_\varepsilon : I \to \mathbb{R}$,

$$g_\varepsilon(x) = g(x) + \varepsilon x^2.$$

Für diese gilt $\overline{D}^2 g_\varepsilon(x) = \overline{D}^2 g(x) + 2\varepsilon > 0$ für alle $x \in I$. Also ist g_ε konvex, und es gilt für alle $\lambda \in [0,1]$, $x_1, x_2 \in I$ die Abschätzung

$$g_\varepsilon\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2\right) \le \lambda g_\varepsilon\left(x_1\right) + (1-\lambda) g_\varepsilon\left(x_2\right),$$

d.h.

$$g\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)\,x_2\right) + \varepsilon\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)\,x_2\right)^2 \leq \lambda\left[g\left(x_1\right) + \varepsilon x_1^2\right] + (1-\lambda)\left[g\left(x_2\right) + \varepsilon x_2^2\right].$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt daraus

$$g\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)\,x_2\right) \leq \lambda g\left(x_1\right) + (1-\lambda) g\left(x_2\right),$$

und damit, da $x_1,\ x_2 \in I$ und $\lambda \in [0,1]$ beliebig waren, die Konvexität von g.