

Optimierungstheorie

Lösung zum 9. Übungsblatt – Sommersemester 2025

Aufgabe 25: Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie mithilfe des Formalismus der konvexen Optimierung das duale Problem (D) des folgenden linearen Problems:

(P) Minimiere $c^\top x$ unter $Ax \leq b$.

Zeigen Sie, dass das Problem (D) äquivalent ist zum dualen Problem von (P), das Sie schon aus der linearen Optimierung kennen.

Lösung: Das duale Problem zu (P) lautet:

(D) Maximiere $F(u) := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} [c^\top x + u^\top (Ax - b)]$ unter $F(u) > -\infty$ und $u \geq 0$.

Betrachte nun für $x \in \mathbb{R}^n$ und $u \geq 0$ den Ausdruck

$$L(x, u) = c^\top x + u^\top (Ax - b) = (c + A^\top u)^\top x - u^\top b.$$

Bei festem $u \geq 0$ ist dieser nur dann bzgl. $x \in \mathbb{R}^n$ nach unten beschränkt, wenn $c + A^\top u = 0$ gilt. Ist nämlich die i -te Komponente von $c + A^\top u$ negativ, also $(c + A^\top u)_i < 0$ (bzw. positiv, also > 0), so gilt $(c + A^\top u)^\top (t \cdot e_i) = t(c + A^\top u)_i \rightarrow -\infty$ für $t \rightarrow \infty$ (bzw. $t \rightarrow -\infty$). Daher lässt sich (D) explizit formulieren als

(D) Maximiere $-b^\top u$ unter $u \geq 0$ und $A^\top u = -c$.

Um das aus der linearen Theorie bekannte duale Problem zu (P) herzuleiten, formulieren wir (P) geeignet um zu:

(\tilde{P}) Maximiere $(-c)^\top x$ unter $Ax \leq b$.

Das duale Problem dazu lautet dann

(\tilde{D}) Minimiere $b^\top y$ unter $y \geq 0$ und $A^\top y = -c$,

was wiederum äquivalent ist zu (D).

Aufgabe 26: Die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} e^x - 2, & \text{für } x < 0, \\ 2x - 1, & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Betrachten Sie das Optimierungsproblem

(P) Minimiere $f(x) = -x$ unter der Nebenbedingung $g(x) \leq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass f und g konvexe Funktionen sind und folglich (P) ein konvexes Optimierungsproblem ist.

- (b) Ist die Slaterbedingung erfüllt?
 (c) Stellen Sie das zu (P) gehörige duale Problem (D) auf.
 (d) Lösen Sie (P) und (D).
 (e) Tritt eine Dualitätslücke auf?

Lösung:

- (a) Die Funktion f ist linear und somit auch konvex. Bei der Funktion g gestaltet sich der Nachweis der Konvexität schon schwerer. Wir definieren dazu zunächst die Hilfsfunktion $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} e^x - 2, & \text{für } x < 0, \\ x - 1, & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Die Funktion \tilde{g} ist stetig und offensichtlich differenzierbar auf $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$. Sie ist auch im Punkt $x = 0$ differenzierbar, da dort links und rechtsseitige Ableitung übereinstimmen. Weiter gilt

$$\tilde{g}'(x) = \begin{cases} e^x, & \text{für } x < 0, \\ 1, & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Es seien nun $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$. Dann erhalten wir

$$[\tilde{g}'(y) - \tilde{g}'(x)](y - x) \geq 0.$$

Sind nämlich $x, y \in (-\infty, 0)$, so ist $e^y - e^x \geq 0$, ist $x \in (-\infty, 0)$, $y \in [0, \infty)$, dann gilt $1 - e^x \geq 0$, und sind schließlich $x, y \in [0, \infty)$, dann folgt $1 - 1 \geq 0$. Somit ist \tilde{g} konvex. Weiter gilt für die Funktion g :

$$g(x) = \max \{ \tilde{g}(x), 2x - 1 \} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

womit nach Aufgabe 21, Teil (a), des 7. Übungsblattes die Funktion g ebenfalls konvex ist (Maximum zweier konvexer Funktionen).

- (b) Da es keine Nebenbedingung der Form $Ax = b$ gibt, ist die (verbleibende) Slaterbedingung

$$\exists \tilde{x} \in \mathbb{R} \text{ mit } g(\tilde{x}) < 0$$

mit beliebigem $\tilde{x} < \frac{1}{2}$ erfüllt.

Bemerkung: Der Beweis des starken Dualitätssatzes lässt sich auch durchführen (allerdings in leicht angepasster Weise), falls entweder die Funktion g (in der Nebenbedingung) oder die Nebenbedingung $Ax = b$ gar nicht auftritt.

- (c) Es gilt für $u, v \in \mathbb{R}$, $u \geq 0$:

$$\tilde{F}(u, v) = \inf_{x \in \mathbb{R}} [f(x) + u^\top g(x) + v^\top (Ax - b)] = \inf_{x \in \mathbb{R}} [-x + u^\top g(x)] =: F(u).$$

Fall 1: $u = 0$. Dann ist $F(0) = \inf_{x \in \mathbb{R}} [-x] = -\infty$.

Fall 2: $u > 0$.

- (i) $x < 0$: Dann ist

$$F_-(u) := \inf_{x < 0} [-x + u^\top g(x)] = \inf_{x < 0} [-x + u(e^x - 2)] = -2u + \inf_{x < 0} [-x + ue^x].$$

Für $k(x) = -x + ue^x$ gilt $k'(x) = -1 + ue^x$.

(1) Für $0 < u \leq 1$ ist $k' \leq 0$ auf $(-\infty, 0)$, also ist

$$F_-(u) = -2u + \inf_{x < 0} k(x) = -2u + k(0) = -u.$$

(2) Für $u > 1$ ist k auf $(-\infty, -\ln u]$ monoton fallend und auf $[-\ln u, 0)$ monoton wachsend. Also wird k in $-\ln u$ für $x < 0$ minimal, und es ist

$$F_-(u) = -2u + \inf_{x < 0} k(x) = -2u + k(-\ln u) = -2u + \ln u + ue^{-\ln u} = -2u + \ln u + 1.$$

(ii) $x \geq 0$: Es ist

$$F_+(u) := \inf_{x \geq 0} [-x + u(2x - 1)] = -u + \inf_{x \geq 0} [(2u - 1)x] = \begin{cases} -u, & \text{für } 2u - 1 \geq 0, \\ -\infty, & \text{für } 2u - 1 < 0. \end{cases}$$

Wir erhalten also insgesamt

$$F(u) = \min \{F_-(u), F_+(u)\} = \begin{cases} -\infty & \text{für } u = 0, \\ -\infty & \text{für } 0 < u < \frac{1}{2}, \\ -u & \text{für } \frac{1}{2} \leq u \leq 1, \\ -2u + 1 + \ln u & \text{für } u > 1. \end{cases}$$

Das duale Problem lautet daher

$$(D) \quad \text{Maximiere } F(u) = \begin{cases} -u, & \text{für } \frac{1}{2} \leq u \leq 1, \\ -2u + 1 + \ln u, & \text{für } u > 1 \end{cases} \quad \text{unter } u \geq \frac{1}{2}.$$

(d) Das primale Problem ist zulässig. Es ist $g(x) \leq 0$ genau dann, wenn $x \leq \frac{1}{2}$. Weiter gilt $f(x) = -x \geq -\frac{1}{2} = f(\frac{1}{2})$ für alle $x \leq \frac{1}{2}$. Damit erhalten wir als Lösung von (P):

$$\min_{x \in M} f(x) = -\frac{1}{2},$$

wobei $M = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq 0\}$.

Zum dualen Problem (D): Die Funktion $F(u)$ ist auf $[\frac{1}{2}, \infty)$ monoton fallend. Wir erhalten somit als Lösung von (D)

$$\max_{u \in [\frac{1}{2}, \infty)} F(u) = F\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

(e) Es tritt keine Dualitätslücke auf: $\min(P) = -\frac{1}{2} = \max(D)$. (Was ja auch von der Theorie vorausgesagt wird.)