Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
PD. Dr. Frank Hettlich
Leonie Fink

Karlsruhe, den 11. Juli 2025

Optimierungstheorie
Lösung zum 10. Übungsblatt – Sommersemester 2025

Aufgabe 28: Aufgabe 4) der Klausur vom 7. August 2017
Gegeben seien $f, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = e^{|x_1|} - |x_1|, \qquad h(x) = x_1.$$

Sei weiterhin

$$(P) \qquad \text{Minimiere } f(x) \quad \text{auf} \quad M = \{x \in \mathbb{R}^2 : h(x) \leq 0,\ x_1 - x_2 = 0\}.$$

Das duale Problem hierzu ist gegeben durch

$$(D) \qquad \text{Maximiere } F(u,v) \quad \text{auf} \quad N = \{(u,v)^\top \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0,\ F(u,v) > -\infty\},$$

wobei F die Zielfunktion des dualen Problems bezeichnet.

(a) Zeigen Sie: (P) ist konvex.

(b) Zeigen Sie, dass $N = \{(u,v)^\top \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0,\ v = 0\}$.

(c) Berechnen Sie $F(u,v)$ für $(u,v)^\top \in N$.

Lösung:

(a) Da h linear und damit konvex ist, muss nur die Konvexität von f gezeigt werden. Hier gilt

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} e^{x_1} - 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } x_1 \geq 0, \qquad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} -e^{-x_1} + 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } x_1 < 0.$$

Setzt man im Besonderen $x_1 = 0$, so sieht man, dass f stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$ ist. Durch weiteres Differenzieren sieht man

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} e^{x_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } x_1 \geq 0, \qquad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} e^{-x_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } x_1 < 0,$$

d.h. f ist sogar zweimal stetig differenzierbar mit der Hesse-Matrix

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} e^{|x_1|} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\nabla^2 f(x)$ offenbar positiv semi-definit für alle $x \in \mathbb{R}^2$, und es folgt, dass f konvex ist.

(b) Es ist für $u \geq 0,\ v \in \mathbb{R}$

$$F(u,v) = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} \left[f(x) + uh(x) + v(x_1 - x_2) \right].$$

Sei zunächst $v \neq 0$. Setzen wir $x = (0,t)$ mit $t \in \mathbb{R}$, so erhalten wir

$$f(0,t) + uh(0,t) + v(0-t) = 1 - vt \to -\infty \qquad \text{für } t \to +\infty \text{ oder } t \to -\infty,$$

d.h. $F(u,v) = -\infty$. Sei nun umgekehrt $v = 0$. Dann ist

$$f(x) + uh(x) + v(x_1 - x_2) = e^{|x_1|} - |x_1| + ux_1.$$

Diese Funktion hängt nur noch stetig von x_1 ab, und es gilt

$$e^{|x_1|} - |x_1| + ux_1 \;\to\; +\infty \qquad \text{für } |x| \to \infty,$$

da die Exponentialfunktion schneller als die linearen Terme wächst. Also ist diese Funktion nach unten beschränkt, und damit folgt $F(u,v) > -\infty$.

(c) Sei $(u,v)^\top \in N$, d.h. $u \geq 0$, $v = 0$. Wir müssen damit

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^2} e^{|x_1|} - |x_1| + ux_1 \;=\; \inf_{x_1\in\mathbb{R}} \ell_u(x_1)$$

mit

$$\ell_u(x_1) := e^{|x_1|} - |x_1| + ux_1\,, \qquad\qquad x_1 \in \mathbb{R}$$

bestimmen. Es gilt

$$\ell_u(x_1) = \begin{cases} e^{x_1} + (u-1)x_1 & \text{für } x_1 \geq 0 \\ e^{-x_1} + (u+1)x_1 & \text{für } x_1 < 0. \end{cases}$$

Auf dem Intervall $x_1 \geq 0$ ist ℓ_u monoton steigend. Ferner ist $\lim_{x_1\to-\infty} \ell_u(x_1) = \infty$. Folglich muss die stetige Funktion ℓ_u im Bereich $x_1 \leq 0$ ihr Minimum annehmen. Eine Minimalstelle x_1 erfüllt

$$0 = \ell_u'(x_1) = -e^{-x_1} + (u+1),$$

das heißt, das Minimum tritt in $x_1 = -\ln(u+1)$ auf. Damit ist

$$F(u,v) = \ell_u(-\ln(u+1)) = e^{\ln(u+1)} - (u+1)\ln(u+1) = (u+1)(1-\ln(u+1)).$$

Aufgabe 29: Es seien die Mengen $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} M_1 :=& \{x \in \mathbb{R}^2 : h_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0,\; h_2(x) = -x_2 \leq 0\} \\ M_2 :=& \{x \in \mathbb{R}^2 : h_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0,\; h_3(x) = -x_2^3 \leq 0\}. \end{aligned}$$

Ferner seien die Punkte $\widehat{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\widehat{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie $M_1 = M_2$.

(b) Bestimmen Sie die äußeren Linearisierungskegel $L_{\leq}(\widehat{x}^{(1)}, M_1), L_{\leq}(\widehat{x}^{(2)}, M_1)$.

(c) Bestimmen Sie die äußeren Linearisierungskegel $L_{\leq}(\widehat{x}^{(1)}, M_2), L_{\leq}(\widehat{x}^{(2)}, M_2)$.

(d) Bestimmen Sie die inneren Linearisierungskegel $L_{<}(\widehat{x}^{(1)}, M_1), L_{<}(\widehat{x}^{(2)}, M_1), L_{<}(\widehat{x}^{(1)}, M_2)$ und $L_{<}(\widehat{x}^{(2)}, M_2)$.

(e) Ist die Beschreibung der Mengen M_1, M_2 in $\widehat{x}^{(1)}$ oder in $\widehat{x}^{(2)}$ degeneriert?

Lösung:

(a) Es ist $h_2(x) = -x_2 \leq 0$ genau dann, wenn $h_3(x) = -x_2^3 \leq 0$, nämlich wenn die zweite Komponente x_2 nicht negativ ist. Also sind die Beschreibungen der Mengen äquivalent.

(b) Es ist $\nabla h_1(x) = 2x$ sowie $\nabla h_2(x) = (0,-1)^\top$. Es ist $h_1(\widehat{x}^{(1)}) = h_2(\widehat{x}^{(1)}) = 0$ sowie $h_1(\widehat{x}^{(2)}) = 0$, aber $h_2(\widehat{x}^{(2)}) < 0$. Also ist

$$L_\leq(\widehat{x}^{(1)}, M_1) = \{d \in \mathbb{R}^2 : (2,0)d \leq 0,\ (0,-1)d \leq 0\} = \{d \in \mathbb{R}^2 : d_1 \leq 0,\ d_2 \geq 0\},$$
$$L_\leq(\widehat{x}^{(2)}, M_1) = \{d \in \mathbb{R}^2 : \Big(\frac{-2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\Big)d \leq 0\} = \{d \in \mathbb{R}^2 : d_2 \leq d_1\}.$$

(c) Es ist $\nabla h_3(x) = (0, -3x_2^2)^\top$ sowie $h_3(\widehat{x}^{(1)}) = 0$ aber $h_3(\widehat{x}^{(2)}) < 0$. Damit ist

$$L_\leq(\widehat{x}^{(1)}, M_2) = \{d \in \mathbb{R}^2 : (2,0)d \leq 0,\ (0,0)d \leq 0\} = \{d \in \mathbb{R}^2 : d_1 \leq 0\},$$
$$L_\leq(\widehat{x}^{(2)}, M_2) = \{d \in \mathbb{R}^2 : \Big(\frac{-2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\Big)d \leq 0\} = \{d \in \mathbb{R}^2 : d_2 \leq d_1\}.$$

(d) Die inneren Linearisierungskegel erhalten wir, indem wir in obigen Beschreibungen das $\leq$ durch ein $<$ ersetzen. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} L_<(\widehat{x}^{(1)}, M_1) &= \{d \in \mathbb{R}^2 : d_1 < 0, d_2 > 0\}, \\ L_<(\widehat{x}^{(2)}, M_1) &= \{d \in \mathbb{R}^2 : d_2 < d_1\}, \\ L_<(\widehat{x}^{(1)}, M_2) &= \{d \in \mathbb{R}^2 : d_1 < 0,\ (0,0)d = 0 < 0\} = \emptyset, \\ L_<(\widehat{x}^{(2)}, M_2) &= \{d \in \mathbb{R}^2 : d_2 < d_1\}. \end{aligned}$$

(e) Wir sehen $\overline{L_<(\widehat{x}^{(2)}, M_i)} = L_\leq(\widehat{x}^{(2)}, M_i)$ für $i = 1,2$. Also sind die Beschreibungen von M_1 und M_2 in $\widehat{x}^{(2)}$ nichtdegeneriert. Dies gilt für M_1 auch in $\widehat{x}^{(1)}$, da $\overline{L_<(\widehat{x}^{(1)}, M_1)} = L_\leq(\widehat{x}^{(1)}, M_1)$. Es ist jedoch

$$\overline{L_<(\widehat{x}^{(1)}, M_2)} = \emptyset \neq L_\leq(\widehat{x}^{(1)}, M_2).$$

Die Beschreibung von M_2 ist damit in $\widehat{x}^{(1)}$ degeneriert.