Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
PD. Dr. Frank Hettlich
Leonie Fink

Karlsruhe, den 18. Juli 2025

Optimierungstheorie
Lösung zum 11. Übungsblatt – Sommersemester 2025

Aufgabe 31: Bestimmen Sie unter Verwendung der Lagrange'schen Multiplikatorenregel alle Punkte der Menge

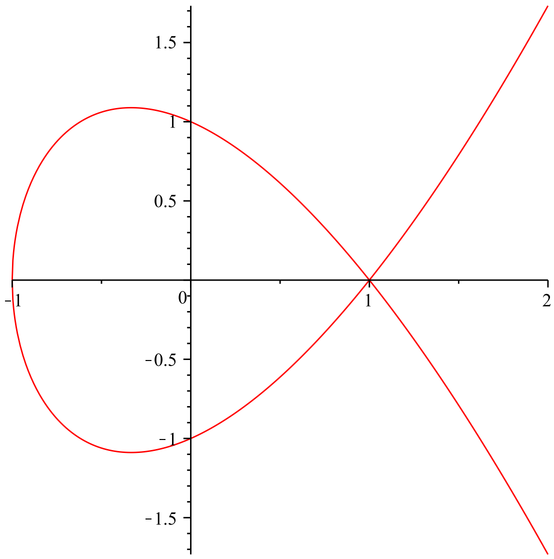
$$M = \left\{ (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : \; y^2 = (x+1)(x-1)^2 \right\},$$

die den geringsten Abstand zum Ursprung besitzen, und geben Sie diesen Abstand an.

Lösung: Mit den differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = y^2 - (x+1)(x-1)^2$ ist unser Ausgangsproblem äquivalent zum differenzierbaren Optimierungsproblem:

(P) Minimiere $f(x, y)$ auf der Menge $M = \left\{ (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : \; g(x, y) = 0 \right\}$.

Skizze der Menge M für $x \in [-1, 2]$:



Die Lagrangefunktion zu (P) ist gegeben durch

$$L(x, y, v) = f(x, y) + vg(x, y) = x^2 + y^2 + vy^2 - v(x+1)(x-1)^2.$$

Die Mangasarian-Fromowitz-Bedingung (MFB) ist in $(x, y)^\top \in M$ genau dann erfüllt, wenn $\operatorname{Rg}\big(g'(x)\big)$ maximal also gleich 1 ist, was gleichbedeutend mit $\nabla g(x, y) \neq 0$ ist. Die (MFB) gilt also genau dann nicht, wenn

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\left[(x-1)^2 + 2(x+1)(x-1) \right] = -(x-1)(3x+1) = 0,$$

d.h. für $x \in \left\{1, -\frac{1}{3}\right\}$ und $y = 0$. Der Punkt $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)^\top$ liegt offensichtlich nicht in M, der Punkt $(1, 0)^\top$ dagegen schon. Da die Lagrange'sche Multiplikatorenregel über ihn keine Aussage macht, ist er gesondert zu betrachten. Wir berechnen $f(1, 0) = 1$.

Ist $(x,y)^\top \neq (1,0)^\top$ eine lokale Minimalstelle von f auf M, gibt es nach der Lagrange'schen Multiplikatorenregel ein $v \in \mathbb{R}$ mit $\nabla_{(x,y)} L(x,y,v) = 0$. Ferner gilt $g(x,y) = 0$, da $(x,y)^\top$ in M liegt. Dies ist äquivalent zu

$$
\begin{aligned}
2x - v(x-1)(3x+1) &= 0, & (1)\\
2y(1+v) &= 0, & (2)\\
y^2 - (x+1)(x-1)^2 &= 0. & (3)
\end{aligned}
$$

Aus (2) folgt $y = 0$ oder $v = -1$.

Fall 1: $y = 0$. Aus (3) folgt $x \in \{-1, 1\}$. Den Punkt $(1,0)^\top$ haben wir oben schon behandelt. Weiter erhalten wir $f(-1,0) = 1$.

Fall 2: $y \neq 0,\ v = -1$. Aus (1) folgt dann $0 = 3x^2 - 1$, also $x_{1,2} = \pm\sqrt{1/3}$. Aus Gleichung (3) erhalten wir damit die kritischen Punkte (beachte $y = \pm(x-1)\sqrt{1+x}$)

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \left(-\sqrt{\frac{1}{3}},\ -\left(\sqrt{\frac{1}{3}}+1\right)\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{3}}}\right)^\top,\\
P_2 &= \left(-\sqrt{\frac{1}{3}},\ \left(\sqrt{\frac{1}{3}}+1\right)\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{3}}}\right)^\top,\\
P_3 &= \left(\sqrt{\frac{1}{3}},\ \left(\sqrt{\frac{1}{3}}-1\right)\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{3}}}\right)^\top,\\
P_4 &= \left(\sqrt{\frac{1}{3}},\ -\left(\sqrt{\frac{1}{3}}-1\right)\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{3}}}\right)^\top.
\end{aligned}
$$

Es ist somit

$$
\begin{aligned}
\min(\mathrm{P}) &= \min\{f(-1,0),\ f(P_1),\ f(P_2),\ f(P_3),\ f(P_4),\ f(1,0)\}\\
&= \min\left\{1,\ \frac{1}{3} + \left(\sqrt{\frac{1}{3}}+1\right)^2\left(1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right),\ \frac{1}{3} + \left(\sqrt{\frac{1}{3}}-1\right)^2\left(1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right\}\\
&= \min\left\{1,\ 1+\frac{2}{9}\sqrt{3},\ 1-\frac{2}{9}\sqrt{3}\right\} = 1 - \frac{2}{9}\sqrt{3} \approx 0{,}6151.
\end{aligned}
$$

Den kleinsten Abstand zum Ursprung haben also die Punkte P_3 und P_4. Er beträgt

$$
\sqrt{1 - \frac{2}{9}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{9 - 2\sqrt{3}}}{3} \approx 0.7843\,.
$$

Aufgabe 32: Die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seien definiert durch

$$
f(x,y) = x + y \quad \text{und} \quad h(x,y) = \begin{pmatrix} h_1(x,y) \\ h_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-1)^2 + y^2 - 1 \\ (x+1)^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix}.
$$

Des Weiteren sei das folgende Optimierungsproblem gegeben:

(P) Minimiere $f(x,y)$ unter $M = \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) \leq 0\}$.

(a) Skizzieren Sie die Niveaulinien der Funktionen h_1 und h_2 zu den Niveaus $-\frac{15}{16}, -\frac{3}{4}$ und 0.

(b) Bestimmen Sie die Lösung $(x^*, y^*)^\top$ des Problems (P).

(c) Zeigen Sie, dass es keinen Lagrange-Multiplikator $u^* = (u_1^*, u_2^*)^\top \geq 0$ gibt mit

$$\nabla f(x^*, y^*) + u_1^* \nabla h_1(x^*, y^*) + u_2^* \nabla h_2(x^*, y^*) = 0.$$

Warum widerspricht das nicht der Lagrange'schen Multiplikatorenregel?

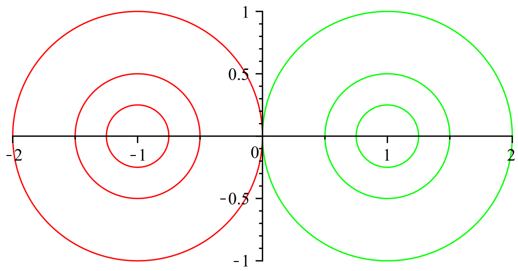
Lösung:

(a) Die Niveaulinien von h_1 zum Niveau $c \in \mathbb{R}$ sind implizit gegeben durch die Gleichung

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 + c,$$

d.h. im Falle $c \geq -1$ handelt es sich um Kreise um den Mittelpunkt $(1,0)^\top$ mit Radius $\sqrt{1+c}$. Niveaulinien zu Werten $c < -1$ treten offensichtlich nicht auf. Genauso sind die Niveaulinien zur Funktion h_2 Kreise mit Mittelpunkt $(-1,0)^\top$ und Radius $\sqrt{1+c}$.

Hier eine Skizze:



(b) Nach Teil (a) liegen in M gerade die Punkte aus $\mathbb{R}^2$, die jeweils zum Punkt $(1,0)^\top$ und zum Punkt $(-1,0)^\top$ höchstens den Abstand 1 besitzen. Dieses Kriterium erfüllt offensichtlich nur der Punkt $(x^*, y^*)^\top = (0,0)^\top$. Folglich ist $\min((\mathrm{P})) = f(0,0) = 0$.

(c) Es gilt

$$\nabla f(x,y) + u_1 \nabla h_1(x,y) + u_2 \nabla h_2(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2y \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 2(x+1) \\ 2y \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2$ und $u = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2_{\geq 0}$. Damit ist mit $(x^*, y^*)^\top = (0,0)^\top$ die Gleichung

$$\nabla f(x^*, y^*) + u_1^* \nabla h_1(x^*, y^*) + u_2^* \nabla h_2(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_1^* \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2^* \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

für kein $u^* = (u_1^*, u_2^*)^\top \geq 0$ lösbar, da die zweite Komponente der linken Seite stets 1, die der rechten Seite stets 0 ist.

Die Mangasarian-Fromowitz-Bedingung (MFB) in $(x^*, y^*)^\top$ reduziert sich, da keine Gleichungsnebenbedingungen vorliegen, auf die Existenz eines $z^* = (z_1^*, z_2^*)^\top \in \mathbb{R}^2$ mit

$$h(x^*, y^*) + h'(x^*, y^*) z^* < 0$$

also
$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2z_1^*\\2z_1^*\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$
Da dies äquivalent zu $z_1^* > 0$ und $z_1^* < 0$ ist, ist die (MFB) in $(x^*, y^*)^\top$ nicht erfüllt. Folglich ist die Lagrange'sche Multiplikatorenregel auf diesen Punkt nicht anwendbar und widerspricht demnach dem Ergebnis von oben auch nicht.

Aufgabe 33: Es sei p ein reelles Polynom, das keine mehrfache Nullstelle besitze; das heißt, es gebe kein $x \in \mathbb{R}$ mit $p(x) = p'(x) = 0$. Des Weiteren gebe es ein $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ mit $p(\tilde{x}) \geq 0$. Bestimmen Sie den Abstand der Menge
$$M = \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : \; y^2 = p(x)\right\}$$
zum Ursprung.

Lösung: Wir definieren die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $g(x,y) = y^2 - p(x)$. Zur Lösung der Aufgabe betrachten wir also das differenzierbare Optimierungsproblem

(P) Minimiere $f(x,y) = x^2 + y^2$ auf der Menge $M = \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : \; g(x,y) = 0\right\}$.

Die Menge $N := M \cap \{(x,y)^\top : x^2 + y^2 \leq \tilde{x}^2 + p(\tilde{x})\}$ mit $\tilde{x}$ wie in der Aufgabenstellung ist kompakt und nichtleer. Da f stetig ist, hat nach dem Satz von Weierstraß

(P') Minimiere $f(x,y) = x^2 + y^2$ auf der Menge N

eine Lösung. Diese Lösung ist auch Lösung von (P).

Die Lagrangefunktion zu (P) ist gegeben durch
$$L(x,y,v) = f(x,y) + vg(x,y) = x^2 + y^2 + v\left[y^2 - p(x)\right].$$
Die Mangasarian-Fromowitz-Bedingung (MFB) im Punkt $(x,y)^\top$ ist zur Bedingung $\nabla g(x,y) \neq 0$ äquivalent. Sie ist also genau dann verletzt, wenn
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -p'(x) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y = 0\,,$$
also $(x,y)^\top = (x,0)^\top$ mit $p'(x) = 0$ gilt. Dann jedoch liegt $(x,y)^\top$ nicht in M, denn sonst wäre $0 = 0^2 = p(x)$ und x entgegen der Voraussetzung in der Aufgabenstellung eine mehrfache Nullstelle von p. Die (MFB) ist daher für alle Punkte in M erfüllt.

Nach der Langrange'schen Multiplikatorenregel kann nun $(x,y)^\top \in M$ nur dann Minimalstelle von f sein, wenn es ein $v \in \mathbb{R}$ gibt mit
$$\nabla_{(x,y)} L(x,y,v) = 0\,,$$
was gleichwertig ist zu
$$\begin{aligned} 0 &= 2x - vp'(x)\,, && (1)\\ 0 &= 2y(1+v)\,. && (2) \end{aligned}$$

Fall: $y = 0$. Wegen $(x,0)^\top \in M$ muss x Nullstelle von p sein. Es gilt $f(x,y) = x^2$.

Fall: $y \neq 0$ und $v = -1$. Aus (1) folgt $2x + p'(x) = 0$, und da $(x,y)^\top \in M$, ist außerdem $p(x) = y^2 > 0$. Es folgt $y = \pm\sqrt{p(x)}$ und $f(x,y) = x^2 + p(x)$.

Insgesamt erhalten wir
$$\min(P) = \min\left\{x^2 : \; p(x) = 0\right\} \cup \left\{x^2 + p(x) : \; p(x) > 0 \text{ und } 2x + p'(x) = 0\right\}.$$