Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
PD. Dr. Frank Hettlich
Leonie Fink

Karlsruhe, den 25. Juli 2025

Optimierungstheorie
Lösung zum 12. Übungsblatt – Sommersemester 2025

Aufgabe 34: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = x_1^2 x_2$ für alle $x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, womit durch

$$\text{(P)} \quad \text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{auf der Menge} \quad M = \Big\{ x \in \mathbb{R}^2 : \; \|x\|_2^2 - 4 = 0 \Big\}$$

ein differenzierbares Optimierungsproblem gegeben ist.

(a) Bestimmen Sie alle KKT-Punkte von (P).

(b) Zeigen Sie mithilfe der notwendigen Optimierungsbedingung 2. Ordnung, dass die Funktion f im Punkt $x^* = (0, -2)^\top$ bzgl. M kein lokales Minimum besitzt.

(c) Zeigen Sie mithilfe der hinreichenden Optimierungsbedingung 2. Ordnung, dass die Funktion f im Punkt $x^* = (0, 2)^\top$ bzgl. M ein striktes lokales Minimum besitzt.

Lösung: Die Nebenbedingung können wir auch schreiben als $g(x) := x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0$. Damit lautet die zugehörige Langrangefunktion zum Problem (P):

$$L(x_1, x_2, v) = x_1^2 x_2 + v(x_1^2 + x_2^2 - 4).$$

(a) Die KKT-Punkte von (P) sind charakterisiert durch $\nabla_x L(x, v) = 0$ und $g(x) = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} 2x_1(x_2 + v) &= 0, \\ x_1^2 + 2vx_2 &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 &= 4. \end{aligned}$$

Fall: $x_1 = 0$. Dann ist $x_2 = \pm 2$ und $v = 0$.

Fall: $x_1 \neq 0$. Dann ist $x_2 = -v$ und damit $x_1^2 - 2v^2 = 0$ sowie $x_1^2 + v^2 = 4$. Subtraktion liefert $3v^2 = 4$ und somit $v = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ samt den zugehörigen Punkten $(\pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}})^\top$ bzw. $(\pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})^\top$. Insgesamt erhalten wir also 6 KKT-Punkte.

(b) Die constraint qualification (CQ2) ist für alle $x \in M$ erfüllt, da für diese

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Weiter ist die Hessematrix von L bzgl. x gegeben durch

$$\nabla_x^2 L(x_1, x_2, v) = \begin{pmatrix} 2x_2 + 2v & 2x_1 \\ 2x_1 & 2v \end{pmatrix}.$$

Falls f im Punkt $x^* = (0, -2)^\top$ mit Multiplikator $v^* = 0$ ein lokales Minimum von (P) besäße, so müsste die Hessematrix der Lagrangefunktion auf dem linearen Unterraum

$$K = \big\{ z \in \mathbb{R}^2 : \; g'(x^*)z = 0 \big\} = \Big\{ z = (z_1, z_2)^\top \in \mathbb{R}^2 : \; z_2 = 0 \Big\}$$

positiv semidefinit sein. Allerdings gilt dort

$$z^\top \nabla_x^2 L(0,-2,0) z = z^\top \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z = -4z_1^2 < 0$$

für alle $z \in K \setminus \{0\} \neq \emptyset$. D.h. im Punkt $x^* = (0,-2)^\top$ kann kein lokales Minimum von (P) vorliegen.

(c) Da nur eine Gleichheitsnebenbedingung bei der Menge M auftritt und keine Kleiner-Gleich-Bedingung, betrachten wir denselben Kegel K wie in Teil (b). Wir zeigen, dass im Punkt $x^* = (0,2)^\top$ mit Multiplikator $v = 0$ die Hessematrix der Lagrangefunktion positiv definit auf K ist. Wegen

$$z^\top \nabla_x^2 L(0,2,0) z = z^\top \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z = 4z_1^2 > 0$$

für alle $z \in K$ mit $z_1 \neq 0$ ist dies der Fall. D.h. im Punkt $x^* = (0,2)^\top$ liegt ein striktes lokales Minimum von (P) vor.

Aufgabe 35: Gegeben sei das Optimierungsproblem

(P) Minimiere $-(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ unter $x_1 + x_2 + x_3 = 3$.

(a) Bestimmen Sie alle KKT-Punkte von (P).

(b) Verwenden Sie die hinreichende Optimierungsbedingung 2. Ordnung, um zu zeigen, dass das Problem (P) im Punkt $x^* = (1,1,1)^\top$ ein striktes lokales Minimum besitzt.

Lösung:

(a) Wir definieren die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = -(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \quad \text{und} \quad g(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 3$$

für alle $x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$. Die zugehörigen Gradienten lauten:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_3 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lagrangefunktion zum Problem ist gegeben durch

$$L(x,v) = -(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + v(x_1 + x_2 + x_3 - 3)\,,$$

und die KKT-Punkte erhalten wir aus der Bedingung $\nabla_x L(x,v) = 0$ und $g(x) = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} -x_2 - x_3 + v &= 0, \\ -x_1 - x_3 + v &= 0, \\ -x_1 - x_2 + v &= 0 \end{aligned} \qquad \text{sowie} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3.$$

Addition der ersten drei Gleichungen liefert $-2(x_1 + x_2 + x_3) + 3v = 0$ und daraus mit der vierten Gleichung $v = 2$. Aus der ersten zusammen mit der vierten Gleichung folgt dann $x_1 = 1$. Weiteres Einsetzen ergibt $x_2 = x_3 = 1$. Der einzige KKT-Punkt ist daher $x^* = (1,1,1)^\top$ mit $v^* = 2$.

(b) Wir betrachten den Kegel

$$K = \{z \in \mathbb{R}^3 : g'(x^*)z = 0\} = \left\{z = (z_1, z_2, z_3)^\top \in \mathbb{R}^3 : z_1 + z_2 + z_3 = 0\right\}$$

sowie die Hessematrix von L (bzgl. x)

$$\nabla_x^2 L(x^*, v^*) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $z \in K$ gilt

$$z^\top \nabla_x^2 L(x^*, v^*) z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} -z_2 - z_3 \\ -z_1 - z_3 \\ -z_1 - z_2 \end{pmatrix} = -\big(z_1(z_2 + z_3) + z_2(z_1 + z_3) + z_3(z_1 + z_2)\big).$$

Da für alle $z \in K$ die Bedingung $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ gilt, folgt daraus:

$$z^\top \nabla_x^2 L(x^*, v^*) z = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 > 0 \quad \text{für alle} \quad z \in K,\ z \neq 0.$$

Nach der hinreichenden Optimierungsbedingung 2. Ordnung besitzt daher das Problem (P) im Punkt $x^* = (1, 1, 1)^\top$ ein striktes lokales Minimum.

Aufgabe 36: Das quadratische Optimierungsproblem (P) sei gegeben durch:

(P) Minimiere $f(x, y) = x^2 - y^2$ auf der Menge $M = \left\{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : x + 2y \leq 4,\ y \geq 0\right\}$.

(a) Ist M kompakt?

(b) Gilt $\inf(\text{P}) > -\infty$?

(c) Bestimmen Sie die Lösung von (P). Verwenden Sie dazu die Kuhn–Tucker–Bedingungen.

Lösung:

(a) Die Menge M ist nicht kompakt, da sie etwa den Strahl $\left\{(-t, 0)^\top : t \geq 0\right\}$ enthält und somit nicht beschränkt ist.

(b) Für $c > 0$ betrachten wir die Niveaumenge

$$N_c = \left\{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = -c^2\right\}.$$

Für jeden Punkt $(x, y)^\top$, der sowohl in M als auch in N_c liegt, gilt somit $y^2 = x^2 + c^2$, woraus wegen $y \geq 0$ folgt, dass $y \geq c$ sowie $|x| \leq |y| = y$ erfüllt ist. Wegen

$$x + 2y \geq 2y - |x| \geq 2y - y = y \geq c$$

und der Bedingung $x + 2y \leq 4$ kann es also keine Punkte in $M \cap N_c$ für $c > 4$ geben. Insbesondere folgt damit $\inf(\text{P}) \geq -16$.

(c) Nach Teil (b) und weil M nichtleer ist – zum Beispiel gilt $(0, 0)^\top \in M$ –, folgt aus dem Existenzsatz für quadratische Probleme (Satz 4.14 im Skript), dass (P) eine Lösung hat.

Das Problem (P) lässt sich auch schreiben als

$$\text{(P)} \qquad \text{Minimiere} \quad (x,y)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=:Q}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^\top}_{=:c^\top}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

auf der Menge

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=:A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:b} \right\}.$$

Da M nicht in Normalform beschrieben wird, können wir den Satz von Kuhn–Tucker für quadratische Probleme (Satz 4.15 im Skript) nicht direkt anwenden. Stattdessen leiten wir alternative Kuhn–Tucker–Bedingungen her, wie wir es im Skript zur Einführung des Verfahrens von Goldfarb–Idnani gemacht haben. Die notwendige Bedingung an eine Extremalstelle $z = (x,y)^\top$ ist somit die Existenz eines $v = (v_1, v_2)^\top \geq 0$ mit

$$2Qz + c + A^\top v = 0 \quad \text{und} \quad (b - Az)^\top v = 0\,.$$

Ausgeschrieben bedeutet das:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 2x + v_1 & = & 0, \\ (2) & -2y + 2v_1 - v_2 & = & 0 \end{array} \qquad \text{sowie} \qquad \begin{array}{lrcl} (3) & (4 - x - 2y)v_1 & = & 0, \\ (4) & yv_2 & = & 0. \end{array}$$

Wir unterscheiden nun folgende vier Fälle:

- $v_1 = v_2 = 0$. Dann ist $x = y = 0$ wegen (1) und (2).
- $v_1 = 0, v_2 > 0$. Dann ist $x = y = 0$ wegen (1) und (4), und aus (2) folgt nun $v_2 = 0$. Dieser Fall kann also nicht eintreten.
- $v_1 > 0, v_2 = 0$. Dann ist $2x + v_1 = 0$ nach (1) und $-y + v_1 = 0$ nach (2), also $2x + y = 0$. Aus (3) folgt $x + 2y = 4$ und zusammen dann $x = -\frac{4}{3}$, $y = \frac{8}{3}$ und $v_1 = \frac{8}{3}$.
- $v_1 > 0, v_2 > 0$. Dann ist $y = 0$ und $x = 4$ wegen (3) und (4). Allerdings folgt aus (1) dann $v_1 = -8$. Dieser Fall tritt also ebenfalls nicht ein.

Der erste der beiden möglichen Fälle führt auf den Funktionswert $f(0,0) = 0$, der zweite auf $f\left(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right) = -\frac{16}{3}$. Der zweite Funktionswert ist kleiner als der erste. Ferner gilt $\left(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)^\top \in M$. Also ist $\left(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)^\top$ die gesuchte Minimalstelle und $-\frac{16}{3}$ der gesuchte minimale Wert von f auf M.