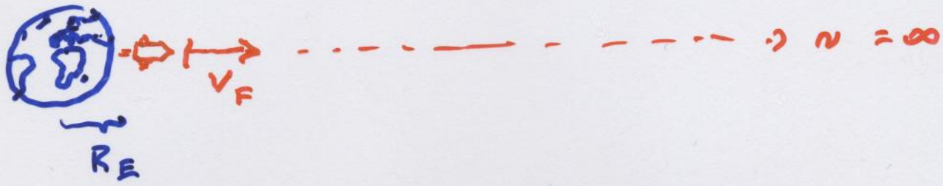
Anwendungen bzgl. Gravitationspotential

a) Fluchtgeschwindigkeit von Erde



$$E_{tot} = E_{kin}(r) + E_{pot}(r) = 0$$

Auf Erdoberfläche:

$$\frac{1}{2} m v_F^2 - \frac{G m_E m}{R_E} = 0$$

$$\Rightarrow v_F = \sqrt{2 \frac{G \cdot m_E}{R_E}}$$

$$= 11{,}2 \text{ km/s}$$

b) Was wäre, wenn $v_F = c$?

$$\Rightarrow R_S = \frac{2 G m}{c^2}$$ Schwarzschild-radius

Bsp: • Sonne: $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg

$\Rightarrow R_S = 3$ km

vgl. $R_\odot = 0{,}7 \cdot 10^{6}$ km

• Neutronenstern: $M_N = M_\odot \cdots 3{,}3 \cdot M_\odot$

$R_S = 3 - 10$ km

vgl. $R_N = 10 - 16$ km

• Schw. Loch: $M_S \gtrsim 5\ M_\odot$

$R_S \gtrsim 15$ km

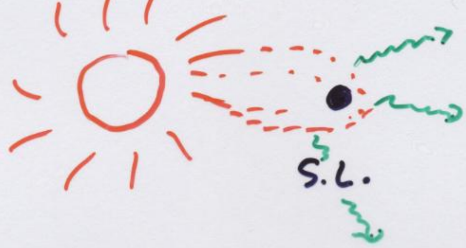
Entstehung eines Neutronensterns oder schw. Loches.

Kernfusion, bis Ni, Fe entstanden ist. Dann gibt es im Zentrum keinen Gegendruck, Stern stürzt in sich zusammen.

Stern mit $M = 5\ M_\odot$

Je nach Masse:
→ Neutronenstern oder S.L.

Präsenz von Schwarzen Löchern:



Bremsstrahlung aus sehr kleinem Gebiet

3.4. Planetenbahnen und Keplersche Gesetze

- **Gesetz des Orbits**

Folgt aus Drehimpuls- und Energieerhaltung:

- $E_{pot}(r) + \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} = const$

$\Rightarrow \frac{dr}{dt}$

$r = r(t)$

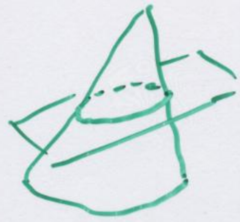
- $L = m r^2 \cdot \dot{\phi} = const$

$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt}$

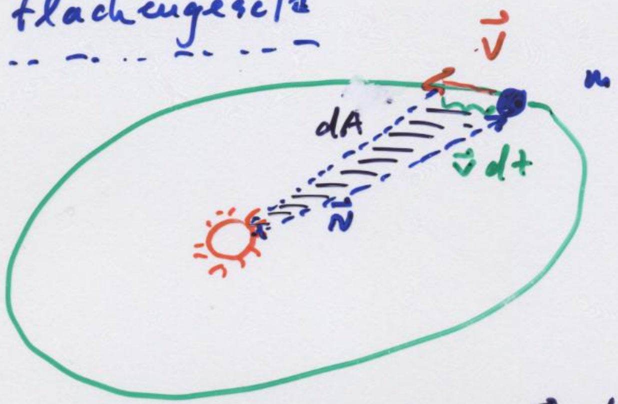
$\Rightarrow$ DGL mit $\frac{d\phi}{dr}$

$\Rightarrow r = r(\phi)$

(Kegelschnitte)



- Flächengesetz



$$dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\,dt\right|$$

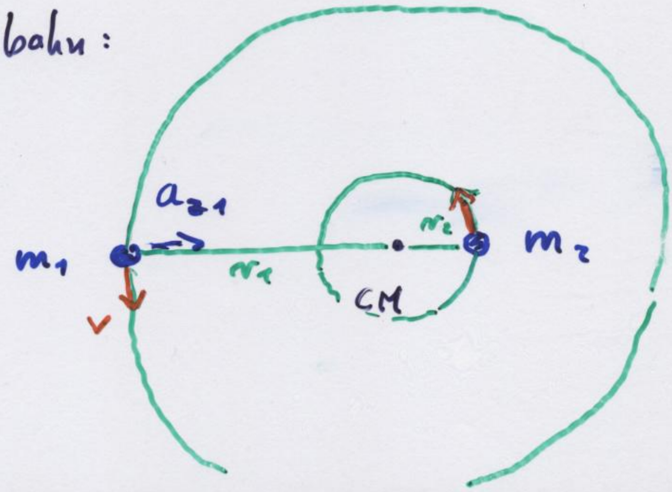
$$= \frac{1}{2m}\left|\vec{r} \times m\vec{v}\,dt\right|$$

$$= \frac{1}{2m}\left|\vec{r} \times \vec{p}\right|dt$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{const.}$$

- Periodengesetz

Für Kreisbahn:



$$F = \frac{G m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} = m_1 a_{z1}$$

$$= m_1 \cdot \omega^2 r_1$$

Für $m_2 \gg m_1$: $r_2 \ll r_1$

$$\Rightarrow F \approx \frac{G \cdot m_2}{r_1^2} m_1 = m_1 \omega^2 r_1$$

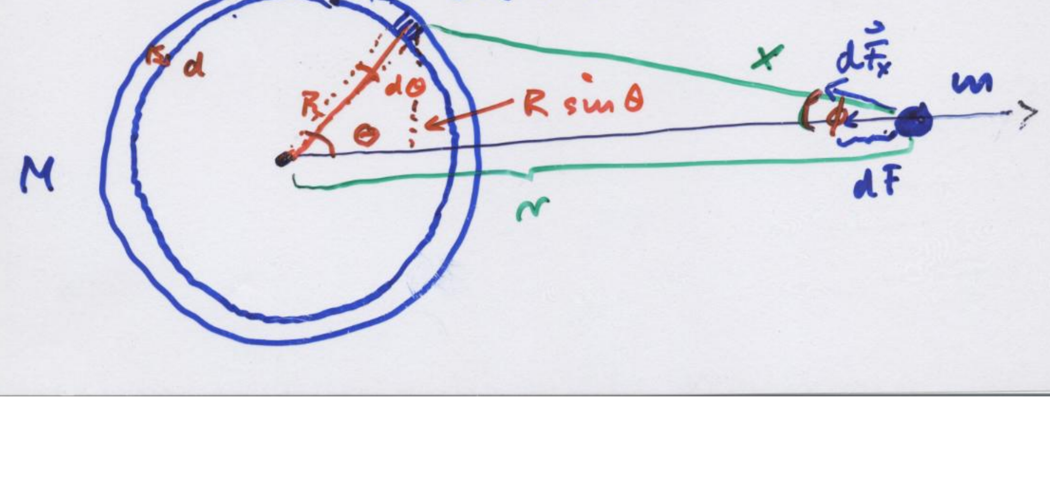
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G m_2} \cdot r_1^3$$

3.5 Gravitation in Masseverteilungen

a] Probemasse m außerhalb Kugelschale M

$$dM = \varrho \cdot 2\pi R \sin\theta \cdot d \cdot R\, d\theta$$



Kraft auf m durch dM

$$dF = dF_x \cdot \cos\phi$$

horizontale Komponente

$$dF = \frac{G\, m\, dM}{x^2} \cos\phi$$

$$= \frac{G\, m \cos\phi}{x^2}\, \varrho\, 2\pi R \sin\theta \cdot d \cdot R\, d\theta$$

verwende:

(i) $$\cos\phi = \frac{r - \cos\theta\, R}{x}$$

(ii) $$x^2 = (R \sin\theta)^2 + (r - \cos\theta \cdot R)^2$$

$$= R^2 + r^2 - 2 r R \cos\theta$$

$$\Rightarrow R \cdot \cos\theta = \frac{R^2 + r^2 - x^2}{2r}$$

(iii) $$\frac{d}{d\theta} x^2 = 2x \frac{dx}{d\theta} = 2 r R \sin\theta$$

$$\Rightarrow \sin\theta\, d\theta = \frac{x\, dx}{r \cdot R}$$

$$\Rightarrow dF = \frac{\pi G\, d\, \varrho\, m\, R}{r^2} \cdot \frac{r^2 - R^2 + x^2}{x^2}\, dx$$

$$= \underbrace{\frac{\pi G\, d\, \varrho\, m\, R}{r^2}}_{f} \left(\frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1 \right) dx$$

$$F = \int_{F(r-R)}^{F(r+R)} dF = \int_{r-R}^{r+R} dx \cdot f \cdot \left(\frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1 \right)$$

$$= f \cdot \left(- \frac{r^2 - R^2}{x} + x \right) \Big|_{r-R}^{r+R}$$

$$= f \cdot 4R$$

$$F = \frac{4 \pi G d \rho m R^2}{r^2} = G \frac{m M}{r^2}$$