

Illustration : Federwelle

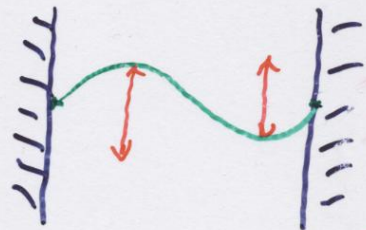
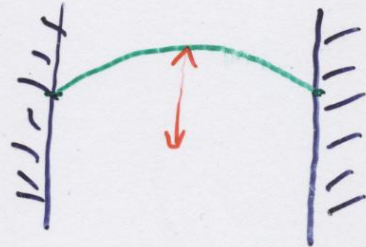
25



Lokale Auslenkung wird über ganze Feder weitertransportiert

c)

• Stehende Wellen

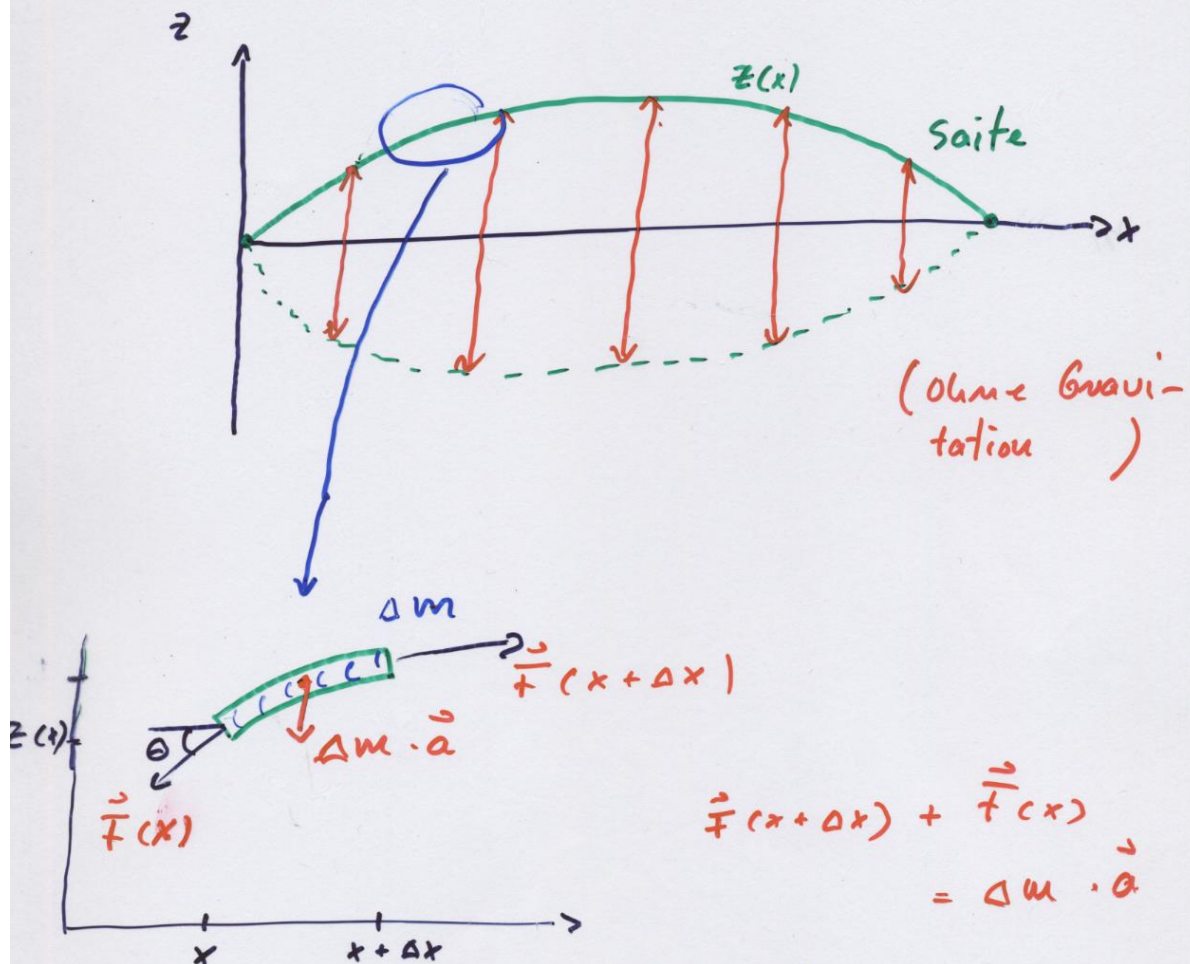


Alle Punkte auf der Welle schwingen synchron

• Laufende Wellen



1] Die Wellengleichung



Horizontale Komponenten von $\vec{F}$ heben sich auf:

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta m \cdot a$$

$$F_z(x) = F \sin \theta \approx F \cdot \tan \theta = F \cdot \frac{\partial z(x)}{\partial x}$$

$$F_z(x + \Delta x) = F \sin(\theta + \Delta \theta) \approx F \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \Delta \frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$\Rightarrow F_z(x + \Delta x) - F_z(x) = F \cdot \Delta \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= \Delta m \cdot a$$

$$= \Delta m \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

Limes $\Delta x, \Delta m \rightarrow 0$:

$$F \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{dm}{dx} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

$\uparrow$ μ : lineare Massendichte
[kg/m]

$$F \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \mu \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

Wellengleichung für
Saitenschwingungen

Lösung:

Ausatz:

$$z(x, t) = z_0 \cdot \sin(kx + \delta) \cdot \cos(\omega t + \beta)$$

$$k \text{ Wellenzahl} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega \text{ Kreisfrequenz} = \frac{2\pi}{T}$$

$$(i) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = z_0 k \cos(kx + \delta) \cos(\omega t + \phi)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -z_0 k^2 \sin(\quad) \cdot \cos(\quad) \\ &= -k^2 z(x, t) \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \frac{\partial z}{\partial t} = -z_0 \omega \sin(\quad) \sin(\quad)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -z_0 \omega^2 \sin(\quad) \cdot \cos(\quad) \\ &= -\omega^2 z(x, t) \end{aligned}$$

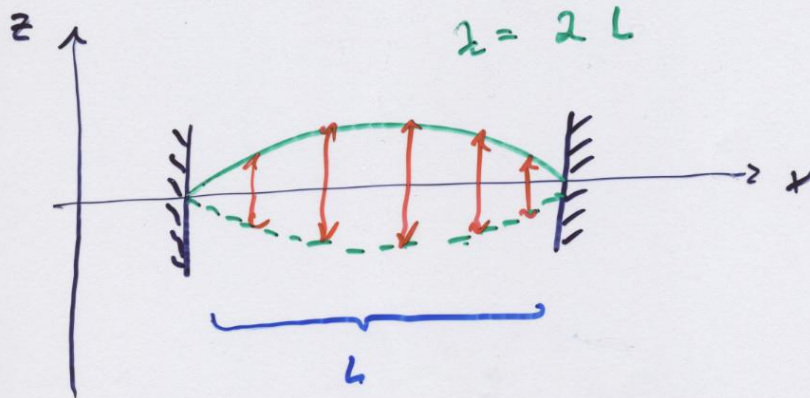
Eingesetzt in Wellengleichung:

$$-F k^2 z(x, t) = -\mu \omega^2 z(x, t)$$

$$\Rightarrow \omega = k \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

- Je größer Spannkraft,
desto höher die Frequenz
- Je massiver Saite,
desto niedriger die Frequenz

2] Stehende Wellen



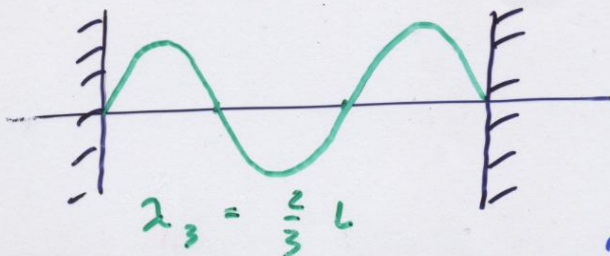
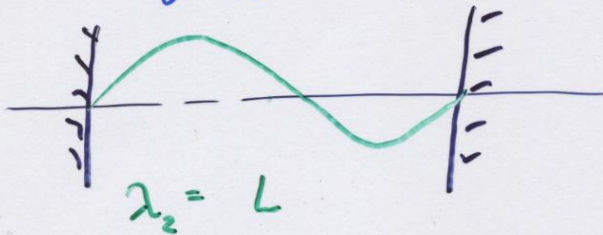
$$z(x,t) = f(x) \cdot g(t)$$

Bsp: Harmonische Oszillation

$$f(x) = z_0 \sin(kx + \delta')$$

$$g(t) = \cos(\omega t + \phi)$$

Schwingungsmoden:



Generell:

$$\lambda_m = \frac{2}{n} \cdot L$$

$n \hat{=}$ * Schwingungsmoden

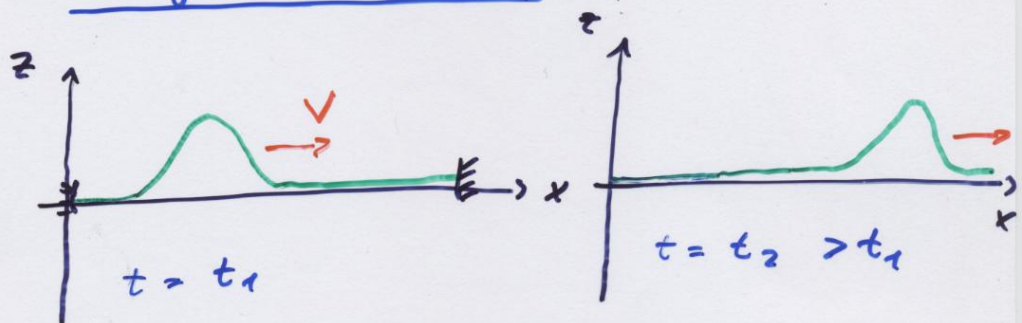
speziell für Saitenschwingungen:

$$\text{Aus } \omega = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow \omega_n = \frac{n \cdot \pi}{L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

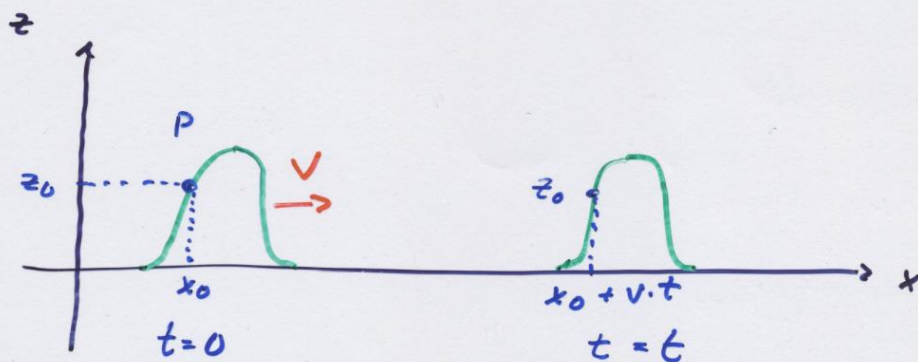
$$\Rightarrow \omega_2 = \omega_1 \cdot 2$$

1 Oktave

3] Laufende Wellen



Beschreibung durch $z(x,t) = f(x - v \cdot t)$



$$t=0 \quad z_0 = f(x_0)$$

$$t=t: \quad z_0 = f(x - v \cdot t)$$

Laufende Welle auf einer Saite:

$$F \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

Bz: $z(x,t) = z_0 \cdot \sin k(x - v \cdot t)$

$$- k^2 \cdot F \cdot z_0 \sin k(x - vt)$$

$$= - k^2 v^2 \mu z_0 \sin k(x - vt)$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle

Generell: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$

Allgemeine Wellenagl.

Behauptung: Jede beliebige Funktion $f(x-vt)$ genügt der Wellengleichung

Beweis: $u \equiv x - vt$
 $z = f(k \cdot u)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = k^2 v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

$$= v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

[Kettenregel: $\frac{\partial (f(u))}{\partial t} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}]$

Wellengleichung in 3d:

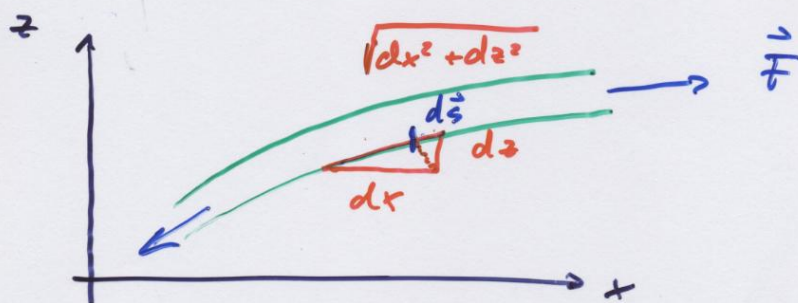
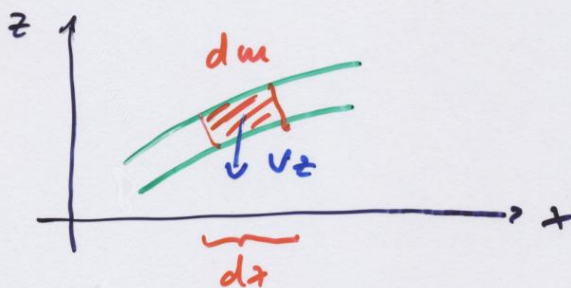
$$\Delta \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

$\uparrow$
Laplace-Operator: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

6.2.4 Energie, Intensität von Wellen

In mechanischen Systemen: Massepunkte werden ausgelenkt, bewegen sich, übertragen Bewegung auf benachbarte Massen
→ Energietransport

Beispiel Saite



saiteverlängerung ds

a) Pot. Energie $dE_p = \vec{F} d\vec{s}$

$$\approx F (\sqrt{dx^2 + dz^2} - dx) \approx F dx \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2$$
$$(1 + \epsilon)^n \approx 1 + n \cdot \epsilon$$

$$\Rightarrow \frac{dE_p}{dx} = F \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2$$

b) Kinetische Energie

$$dE_k = \frac{1}{2} dm \cdot v_z^2$$

$$= \frac{1}{2} \mu dx \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2$$

$$\frac{dE_k}{dx} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2$$

c) Gesamtenergie eines Massenelementes:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{dE_k}{dx} + \frac{dE_p}{dx}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\mu \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + F \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right)$$

Beispiel: Laufende Welle

$$z(x,t) = z_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{dE}{dx} = \mu \omega^2 z_0^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

$$\left(\frac{\mu}{F} = \frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{v^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\text{Energie}} & \propto \omega^2 \\
 & \propto (\text{Amplitude})^2 \\
 & \propto \frac{1}{\lambda^2}
 \end{aligned}$$

d) Intensität und Leistung

$$\langle P \rangle = \frac{\text{mittlere Energiedichte} \cdot \text{Länge}}{\text{Zeiteinheit}}$$

$$= \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{1}{2} \mu \omega^2 z_0^2 v$$

$$\underline{I} = \frac{\langle P \rangle}{\text{Fläche}} \quad (\text{nur für 3d Wellen})$$

6.2.5 Anwendung: Akustik

Schall ist longitudinale Druckwelle
in einem Medium: Gas, Flüssigkeit,
Festkörper

Generell $v = \sqrt{\frac{\text{Rückstellkraftfaktor}}{\text{Massenfaktor}}}$

Speziell: Saite $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$

Schall $v = \sqrt{\alpha \cdot \frac{p_0}{\rho_0}}$

$\hookrightarrow \alpha \approx 1,4$ für
nicht ideales
Gas

Bsp Luft: $\left. \begin{array}{l} p_0 = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \\ \rho_0 = 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \end{array} \right\} v = 330 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (0^\circ\text{C})$