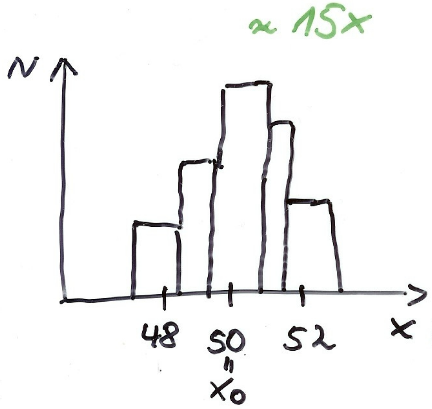
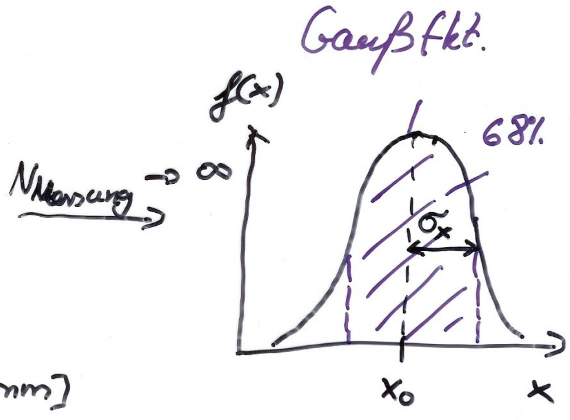
1.2 b) Zufällige Fehler

Bsp:





Häufigkeit von Meßergebnissen bei großer Zahl von Messung:

$$N(x, x_0, \sigma_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_x} \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2 \sigma_x^2}}$$

Gaußverteilung, Normalverteilung

Wenn x_0 wahrer Wert, dann erwartet man im Intervall

$x_0 \pm 1\sigma_x$: 68%, $x_0 \pm 2\sigma_x$: 95%

$x_0 \pm 3\sigma_x$: 99,7%

aller Resultate.

c) Fehlerfortpflanzung

Fehler auf $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, wenn Fehler auf x_i (σ_{x_i}) bekannt ist:

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot \sigma_{x_i}^2}$$

Bsp. Geschwindigkeit eines Läufers

Messung von x, t ; $v = \frac{x}{t}$

$$\sigma_v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \cdot \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 \cdot \sigma_t^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{t^2} \cdot \sigma_x^2 + \frac{x^2}{t^4} \cdot \sigma_t^2}$$

$x = 100\,\text{m}$, $\sigma_x = 10\,\text{cm}$

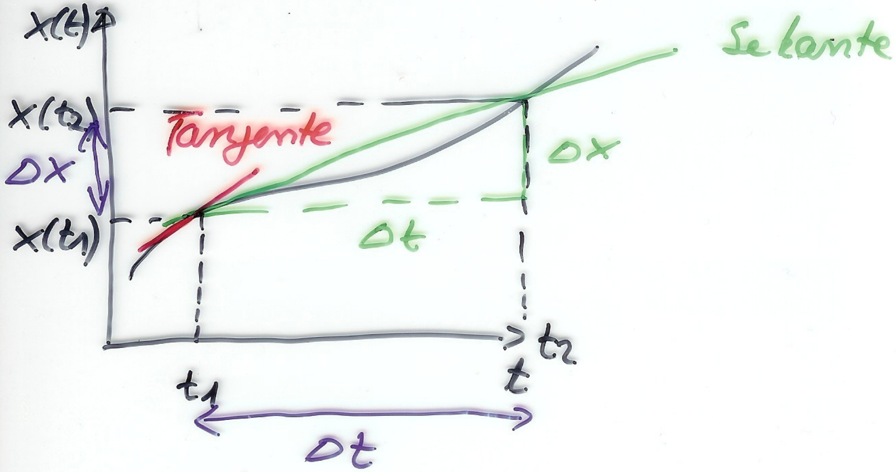
$t = 15\,\text{s}$, $\sigma_t = 0{,}5\,\text{s}$

$\longrightarrow$ $v = 6{,}6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \pm 0{,}2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

2. Klassische Mechanik

2.1 Mechanik von Massepunkten

2.1.1 Bewegung in 1D



Mittlere Geschwindigkeit:

$$\langle v \rangle = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Einheit: $[v] = \frac{m}{s}$

Momentangeschwindigkeit:

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$$

$$dx = V\,dt$$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} V\,dt$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = x_1 + \int_{t_1}^{t_2} V\,dt$$

Mittlere Beschleunigung:

$$\langle a \rangle = \frac{V(t_2) - V(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Beschleunigung:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t)$$

Einheit: $[a] = \frac{m}{s^2}$

$$dv = a(t)\,dt$$

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad v_2 = v_1 + \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$$

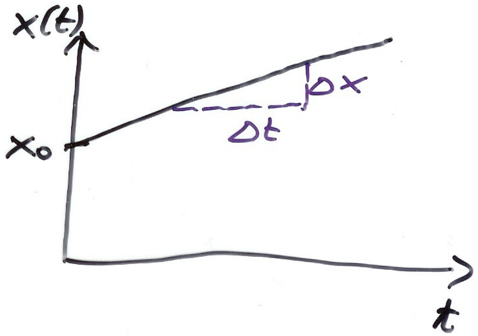
Spezialfälle

a) Unbeschleunigte Bewegung

$$a(t) = 0$$

$$v(t) = v_0$$

$$x(t) = v_0 \cdot t + x_0$$



b) Gleichförmig beschleunigte Bewegung

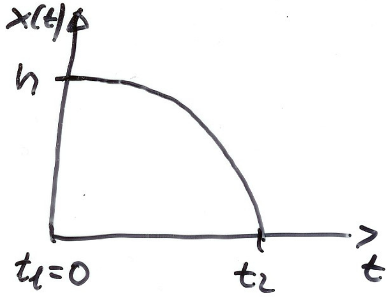
$$\boxed{\begin{aligned} a(t) &= a_0 \\ v(t) &= a_0 \cdot t + v_0 \\ x(t) &= \tfrac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0 \end{aligned}}$$

Bsp.: Fallender Stein aus Höhe h

$$a_0 = -g$$

$$v(t=0) = v_0 = 0$$

$$x(t=0) = h$$



$$v(t) = -g \cdot t$$

$$x(t) = -\tfrac{1}{2} g t^2 + h$$

dh. Abstand nimmt quadratisch mit der Zeit zu

Demo: Fallschnüre

Flugzeit: $x(t_2) = -\tfrac{1}{2} g t_2^2 + h \overset{!}{=} 0$

$$\Leftrightarrow \quad t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Anwendung: Bestimmung von g

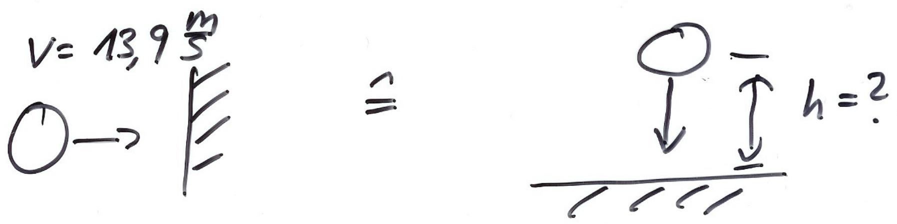
$$g = \frac{2h}{t_2^2}$$

Demo: Fallen im Vakuum

Alle Objekte werden unter Vernachlässigung der Luftreibung gleich schnell beschleunigt.

Zahlenbsp: Unfall in der Stadt

Aufprall gegen Wand $V = 50 \frac{km}{h} = 13{,}9 \frac{m}{s}$



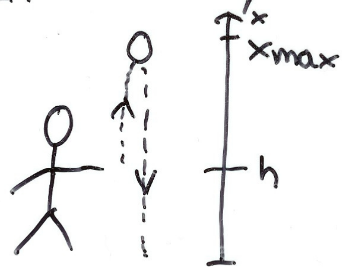
$$V = -g \cdot t \iff t = -\frac{V}{g}$$

$$x(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h$$

$$\iff h = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g \frac{V^2}{g^2} = \frac{V^2}{2g}$$

$$\longrightarrow \quad h = 9{,}9\,m$$

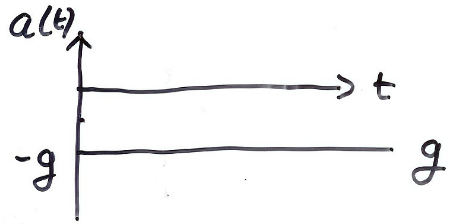
Bsp.: Kind spielt Ball

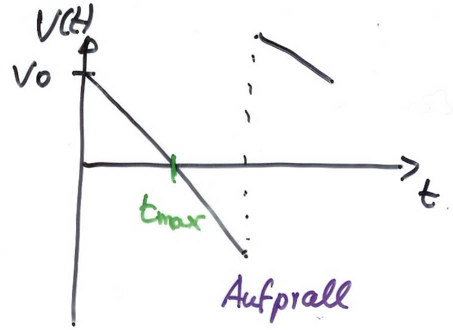


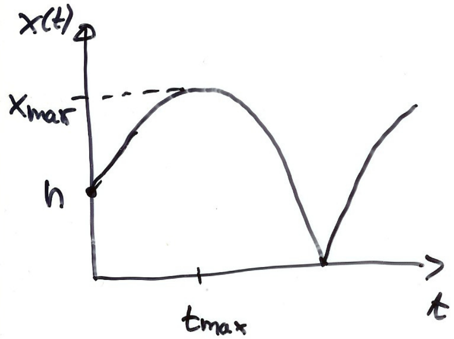
$$a_0 = -g$$

$$V(t) = V_0 - g \cdot t$$

$$x(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \cdot t + h$$



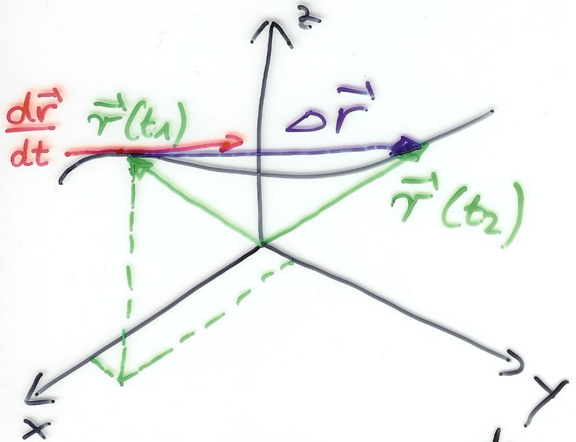




2.1.2 Räumliche Bewegung

Ort des Teilchens:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t)\,\vec{e}_x + y(t)\cdot\vec{e}_y + z(t)\cdot\vec{e}_z$$



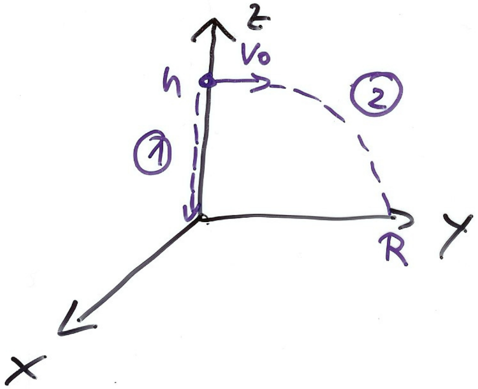
$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dv_x/dt \\ dv_y/dt \\ dv_z/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^2x/dt^2 \\ d^2y/dt^2 \\ d^2z/dt^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Bsp.: Fall mit / ohne horizontaler Bewegung



① $$\vec{r}(t) = -\frac{g}{2}t^2\vec{e}_z + h\,\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{g}{2}t^2 + h \end{pmatrix}$$

Fallzeit:

$$t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

② $$\vec{r}(t) = -\frac{g}{2}t^2\vec{e}_z + v_0\cdot t\,\vec{e}_y + h\cdot\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0\cdot t \\ -\frac{g}{2}t^2 + h \end{pmatrix}$$

Fallzeit: $z(t_f) = -\frac{g}{2}t^2 + h \stackrel{!}{=} 0$

$$\rightarrow t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

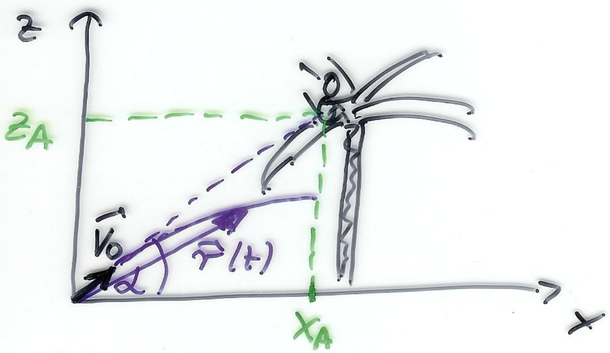
Reichweite:

$$R = y(t_f) = V_0 \cdot t_f = V_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Demo: Fallmaschine

Bewegung in x, y, z-Richtung unabhängig voneinander, da Richtungen orthogonal sind.

Bsp: Affe im Baum



$$\vec{r}_A(t=0) = \begin{pmatrix} x_A \\ z_A \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_A(t) = \vec{r}_A - \frac{g}{2} t^2 \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_K(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_K(t) = \vec{V}_0 \cdot t - \frac{g}{2} t^2 \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_A \overset{!}{=} \vec{r}_K \qquad \text{(Kugel trifft)}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_A \\ z_A - \cancel{\frac{g}{2} t_1^2} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} V_{0x} \cdot t_1 \\ V_{0z} \cdot t_1 - \cancel{\frac{g}{2} t_1^2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{ll} \text{I.} & x_A = V_{0x} \cdot t_1 \\ \text{II.} & z_A = V_{0z} \cdot t_1 \end{array}\right\} \quad \frac{z_A}{x_A} = \frac{V_{0z}}{V_{0x}} = \tan\alpha$$

Demo: Darts

Solange man richtig zielt und $\underbrace{|\vec{v}| \text{ groß}}_{\text{d.h. } R > x_A}$ genug ist, trifft man.