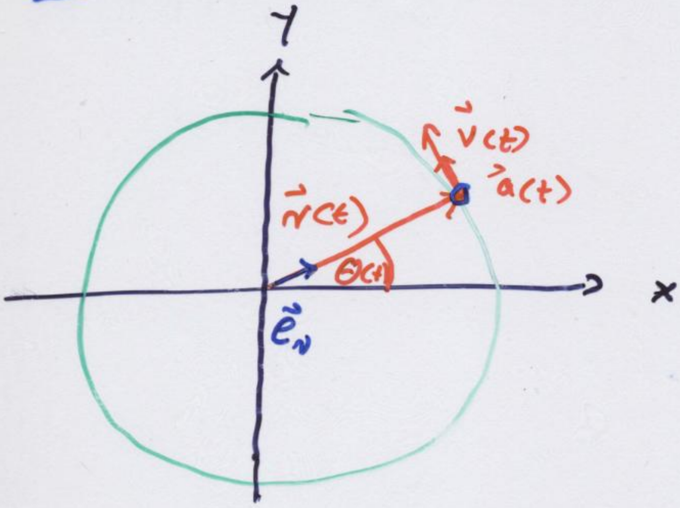
2.1.3 Sonderfall Kreisbewegung



- Generell: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r(t) \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix}$

Kartesische Koordinaten   Polar-Koordinaten

- Speziell Kreisbewegung: $|\vec{r}(t)| = r = \text{const}$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = r \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix} = r \cdot \vec{e}_{\vec{r}}(t)$$

$$\vec{v}(t) = r \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta(t) \\ \cos\theta(t) \end{pmatrix}$$

$$\perp \vec{e}_r(t)$$

$$\vec{v}(t) = r\,\frac{d\theta}{dt}\begin{pmatrix}\cos(\theta + \frac{\pi}{2})\\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2})\end{pmatrix}$$

$$= r \cdot \frac{d\theta}{dt}\,\vec{e}_\theta(t)$$

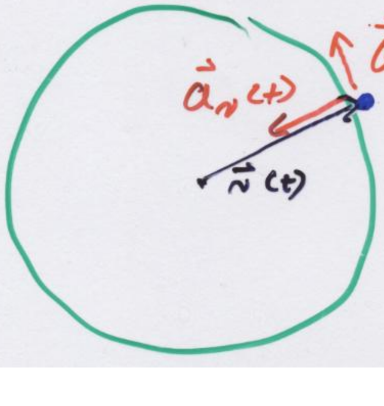
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

$$= r \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} + r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\vec{e}_\theta(t)}_{\vec{a}_\theta(t)} \underbrace{- r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \cdot \vec{e}_r(t)}_{\vec{a}_r(t)}$$

Tangential- Zentripetal-

Beschleunigung



- Konstante Kreisbewegung

$$|\vec{v}(t)| = v = \text{const.}$$

$$= r \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

mit $\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r}$ Winkelgeschw. [rad/s]

$$\Rightarrow \theta(t) = \frac{v}{r} \cdot t + \theta_0$$

mit T Periode bzw Umlaufzeit:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \equiv \omega \cdot r$$

$\uparrow$ Kreisfrequenz

Damit ist:

$$\vec{r}(t) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t + \theta_0) \\ \sin(\omega t + \theta_0) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \omega r \begin{pmatrix} -\sin(\omega t + \theta_0) \\ \cos(\omega t + \theta_0) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = r\omega^2 \begin{pmatrix} -\cos(\ \ ) \\ -\sin(\ \ ) \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

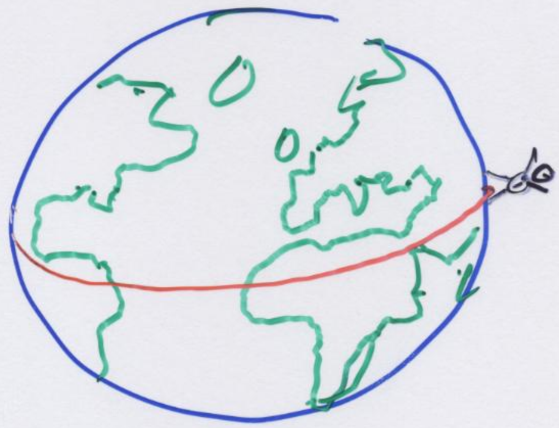
$$|\vec{r}(t)| = r$$

$$|\vec{v}(t)| = v = r \cdot \omega = \frac{2\pi r}{T}$$

$$|\vec{a}(t)| = a_z = r\,\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

Beispiel

a) Bewegung am Äquator



$r = 6380\ \text{km}$

$T = 1\ \text{Tag}\ (1\,\text{d})$

$$v = r \cdot \omega = \frac{r \cdot 2\pi}{T} = \frac{6{,}38 \cdot 10^6\,\text{m} \cdot 2\pi}{24\,\text{h}}$$

$$= 1670\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$a_z = \frac{v^2}{r} = 0{,}034 \frac{m}{s^2}$$

$$\hat{=} 0{,}0035\ g$$

⇒ Sie wiegen am Äquator 3,5 ‰ weniger als am Nordpol.

b) Wie lang ist Ihr kürzeste Tag?

$$a_z = g = r\omega^2 = r \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

$$= 1{,}4\ h$$

≙ Umlaufzeit eines Satelliten im erdnahen Orbit.

2.2 Mechanik von Massepunkten

Die Newtonschen Gesetze

N1: $\sum \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$

N2: $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \cdot \vec{a}$

Newtonsche Bewegungsgleichung

$\left(\vec{a} = \vec{F}/m \right)$

$[F] = 1\,\mathrm{kg}\,\frac{m}{s^2} \equiv 1\,\mathrm{N}$

(1 kp $\equiv$ 9,81 N
Gewicht von 1 kg auf der Erde)

(1 Slug $= \frac{1\,\mathrm{lb}}{1\,\mathrm{ft}/s^2} \mathrel{\hat{=}} 14{,}6\,\mathrm{kg}$)

N3: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

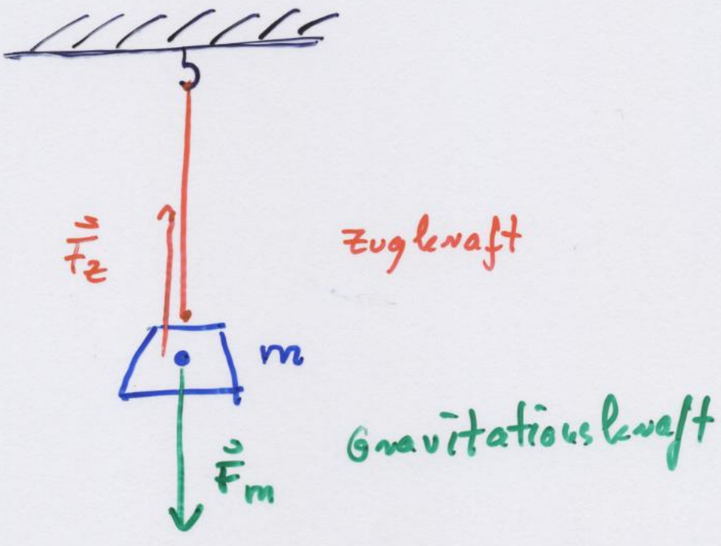
„Aktio = Reaktio"

Einheiten: $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg}\,\frac{m}{s^2}$

$1\,\mathrm{dyn} = 1\,\mathrm{g}\,\frac{cm}{s^2}$

2.2.1 Anwendungen von N. Gesetzen

a)

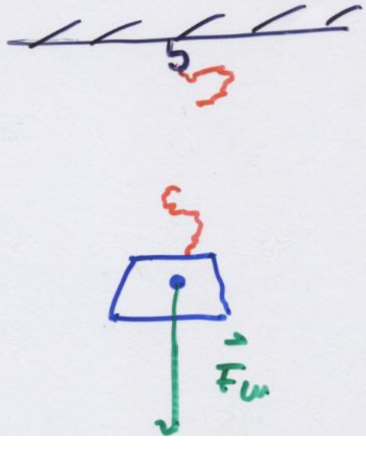


$$\sum \vec{F}_i = 0 \quad \hat{=} \quad \vec{F}_m = -\vec{F}_z$$

$$\Rightarrow \vec{F}_z = -\vec{F}_m$$
$$= -m \cdot \vec{g}$$

Zugspannung: $F_z = m \cdot g$

b)



$$\sum \vec{F}_i = \vec{F}_m$$
$$= m \cdot \vec{g} \neq 0$$

N_2: $m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}$

$\vec{a} = \frac{\vec{F}_m}{\ldots} = g$

genauer:

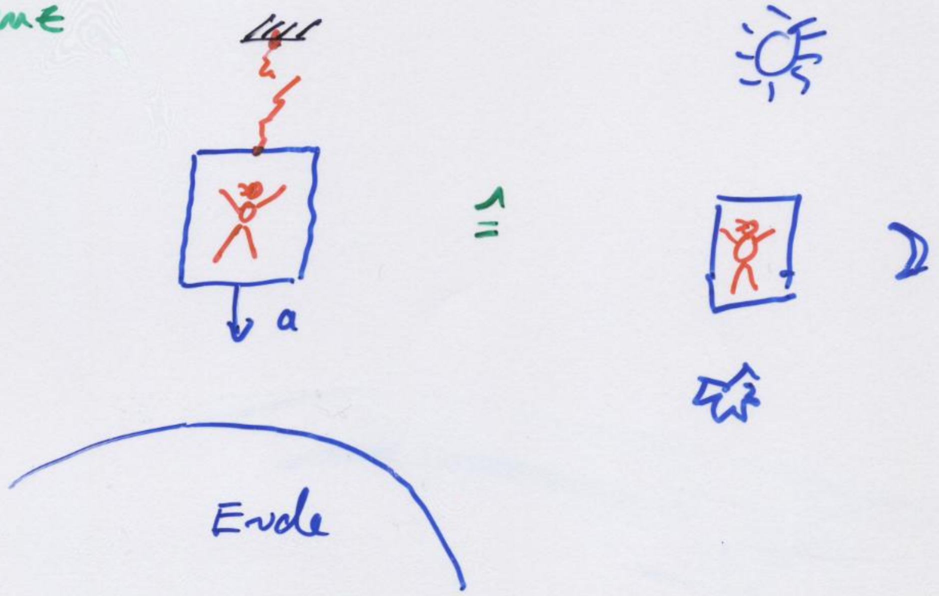
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_m}{m_T} = \frac{m_G \cdot \vec{g}}{m_T}$$

Träge Masse Schwere Masse

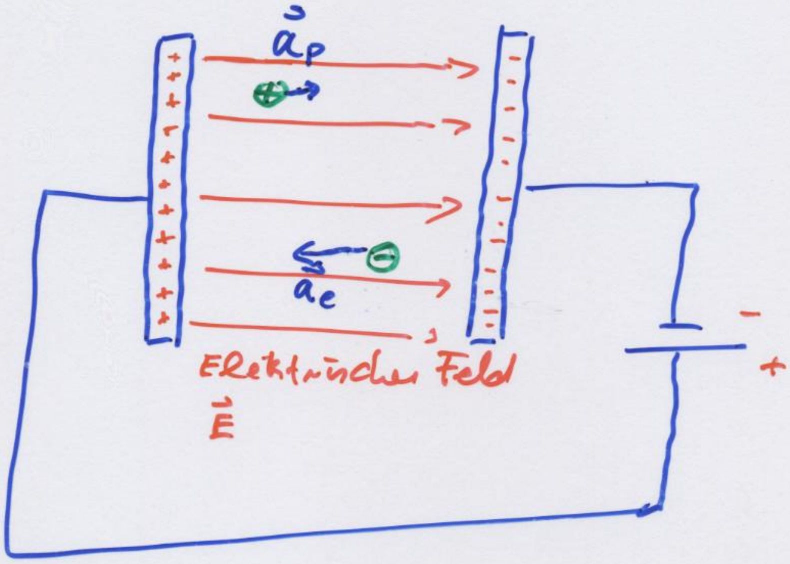
Äquivalenzprinzip: $m_T = m_G$

$\Rightarrow a = g$ unabhängig von Masse, Art, Zusammensetzung des Objektes.

Konsequenz



c) Elektrostatische Kraft



⊖ Elektron, m_e

Elektrostat. Kraft : $\vec{F}_e = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ladung}}}{-e} \cdot \vec{E}$

Beschleunigung : $\dfrac{\vec{F}_e}{m_e} = \vec{a}_e$

⊕ Proton, $m_p \approx 2000 \times m_e$

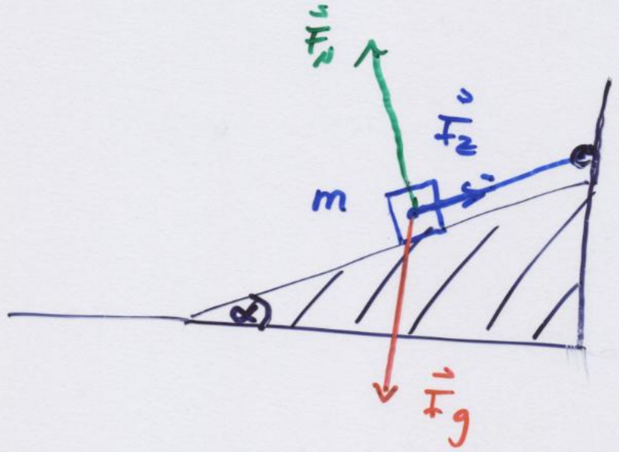
Elektrostat. Kraft $\vec{F}_p = +e\,\vec{E}$

Beschleunigung : $\dfrac{\vec{F}_p}{m_p} = \vec{a}_p$

$$|\vec{F}_p| = |\vec{F}_e|$$

$$\Rightarrow \vec{a}_p = - \vec{a}_e \cdot \frac{1}{2000}$$

d) Aufhängung an schräger Rampe



Normalkraft
⊥ Auflagefläche

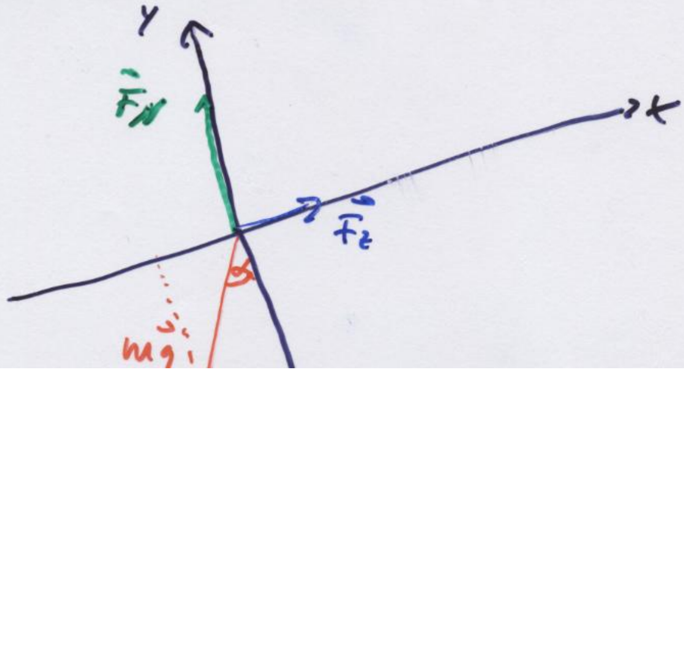
Zugkraft

Gravitationskraft

$$\Sigma \vec{F}_i = m\vec{g} + \vec{F}_N + \vec{F}_Z = 0$$

Bearbeitung des Problems

- Körper ist punktförmig
- Definiere geeignetes Koordinatensystem
- Berücksichtige alle Kräfte, die auf Körper wirken.



$x: \quad F_Z - mg \sin\alpha = 0$

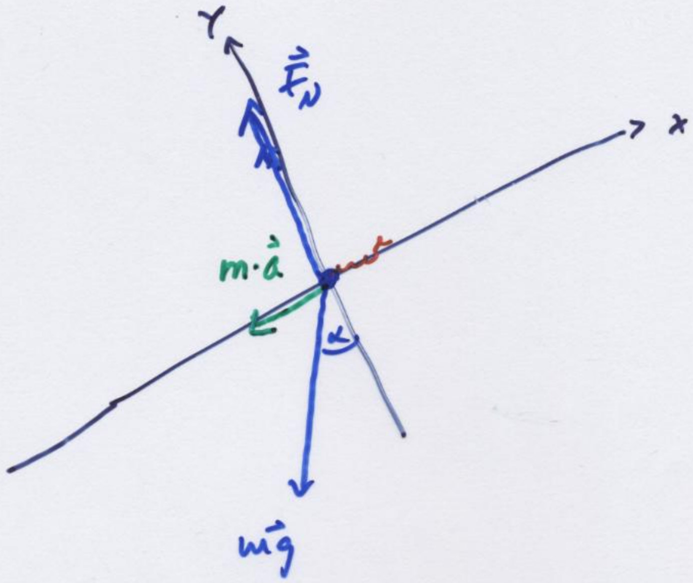
$y: \quad F_N - mg \cos\alpha = 0$

$\Rightarrow$ Lösung : $F_N = mg\cos\alpha$

$$\vec{F}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ mg\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_Z = \begin{pmatrix} -mg\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Seil reißt: $\vec{F}_z = 0$



$$\sum \vec{F}_i = \vec{F}_N + m\vec{g} = m\cdot\vec{a}$$

$$x: 0 \quad - mg\sin\alpha = ma$$

$$y: F_N \quad - mg\cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_N = m\cdot g\cdot\cos\alpha$$

$$a = -g\cdot\sin\alpha$$