# Trägheitstensor

Starrer Körper aus $m_i$ Massepunkten

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \qquad , \quad \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$= \sum_i m_i \underbrace{\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)}_{\text{i.A. nicht parallel } \vec{\omega}}$$

oder $$= \sum_i m_i \left( \vec{\omega}\, r_i^2 - \vec{r}_i \underbrace{(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})}_{\text{i.A.} \neq 0} \right)$$

kontinuierlicher starrer Körper:

$$\vec{L} = \int_{\text{Körper}} \left( r^2 \vec{\omega} - \vec{r}\,(\vec{r}\cdot\vec{\omega}) \right) dm \qquad (dm = \rho(\vec{r})\,dV)$$

$$L_x = \int \left[ r^2 \omega_x - x(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) \right] dm$$

$$= \underbrace{\int (\underbrace{r^2 - x^2}_{y^2+z^2})\, dm}\cdot \omega_x \underbrace{- \int xy\, dm} \cdot \omega_y \underbrace{- \int xz\, dm}\, \omega_z$$

$$= \Theta_{xx}\, \omega_x + \Theta_{xy}\, \omega_y + \Theta_{xz}\, \omega_z$$

$$L_y = \int \left[ r^2 \omega_y - y(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) \right] dm$$

$$= \underbrace{\int (\underbrace{r^2 - y^2}_{x^2+z^2})\, dm}\, \omega_y \underbrace{- \int yx\, dm} \cdot \omega_x \underbrace{- \int yz\, dm}\, \omega_z$$

$$= \Theta_{yy}\, \omega_y + \underbrace{\Theta_{yx}}_{=\Theta_{xy}}\, \omega_x + \Theta_{yz}\, \omega_z$$

$$L_z = \int \left[ r^2 \omega_z - z(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) \right] dm$$

$$= \underbrace{\int (\underbrace{r^2 - z^2}_{x^2+y^2})\, dm}\, \omega_z \underbrace{- \int zx\, dm}\, \omega_x \underbrace{- \int zy\, dm}\, \omega_y$$

$$= \Theta_{zz}\, \omega_z + \underbrace{\Theta_{zx}}_{=\Theta_{xz}}\, \omega_x + \underbrace{\Theta_{zy}}_{=\Theta_{yz}}\, \omega_y$$

in Matrixschreibweise

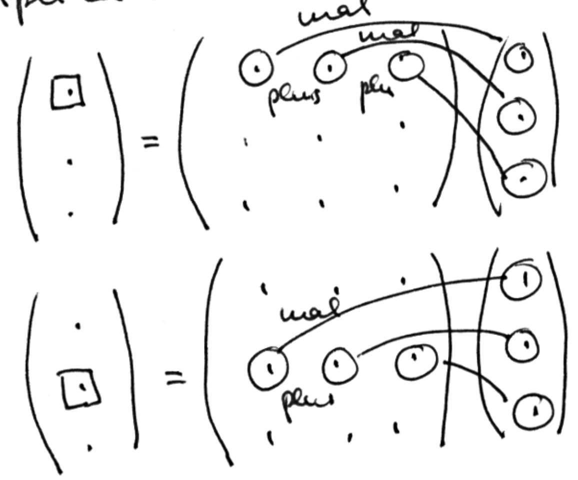
$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Theta_{xx} & \Theta_{xy} & \Theta_{xz} \\ \Theta_{yx} & \Theta_{yy} & \Theta_{yz} \\ \Theta_{zx} & \Theta_{zy} & \Theta_{zz} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\Theta}}} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{\Theta}}$ Trägheitstensor

$$\boxed{\vec{L} = \underline{\underline{\Theta}}\, \vec{\omega}}$$

$\vec{L}$ i.A. <u>nicht</u> parallel $\vec{\omega}$

Multiplikation Matrix · Vektor




$\underline{\underline{\Theta}}$ ist 3×3-Matrix
mit axiale Trägheitsmomenten (Diagonalelemente)

$$\Theta_{xx}, \quad \Theta_{yy}, \quad \Theta_{zz}$$

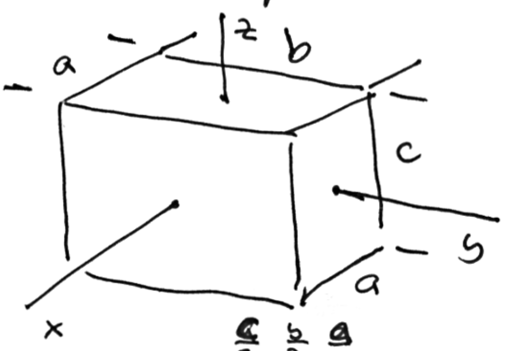
und Deviationsmomenten (Nichtdiagonalelemente)

$$\Theta_{xy} = \Theta_{yx}, \quad \Theta_{yz} = \Theta_{zy}, \quad \Theta_{xz} = \Theta_{zx}$$

$\underline{\underline{\Theta}}$ ist eine <u>symmetrische</u> Matrix,

kann durch "Hauptachsentransformation"
in "Diagonalform" gebracht werden

z.B. Trägheitstensor eines Quaders




Achsen durch den Schwerpunkt

$$\Theta_{xx} = \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \rho a \left( \left[\tfrac{1}{3} y^3\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c + b \left[\tfrac{1}{3} z^3\right]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \right)$$

$$= \frac{m}{V} a \left( \frac{c}{3} \left( \left(\frac{b}{2}\right)^3 - \left(-\frac{b}{2}\right)^3 \right) + \frac{b}{3} \left( \left(\frac{c}{2}\right)^3 - \left(-\frac{c}{2}\right)^3 \right) \right)$$

$$= \frac{m}{abc} a \left( \frac{c}{3} \frac{2}{2^3} b^3 + \frac{b}{3} \frac{2}{2^3} c^3 \right)$$

$$= \frac{m}{12} \left( b^2 + c^2 \right)$$

$$\Theta_{xy} = -\rho \iiint xy\, dx\, dy\, dz$$

$$= -\frac{m}{V} \left[\tfrac{1}{2} x^2\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\tfrac{1}{2} y^2\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[z\right]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}$$

$$= -\frac{m}{abc} \frac{1}{2} \underbrace{\left( \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{-a}{2}\right)^2 \right)}_{=0} \quad \dots$$

$$= 0$$

....

bei dieser Wahl des Koordinatensystems

wird der Trägheitstensor diagonal

$$\underline{\underline{\Theta}} = \frac{m}{12}\begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

Die gewählten Achsen sind die Hauptträgheitsachsen

Für Rotation um Hauptträgheitsachsen gilt:

$$\vec{L} = \underline{\underline{\Theta}}\,\vec{\omega}, \quad \vec{L} \parallel \vec{\omega}$$

und diese $\vec{\omega}$ sind "Eigenvektoren" von $\underline{\underline{\Theta}}$

z.B. $\vec{\omega}$ in y-Richtung: $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_y \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{L} = \frac{m}{12}(a^2+c^2)\,\vec{\omega}, \quad \vec{L} \parallel \vec{\omega}$$

Für Körper mit $a > b > c$ gilt

$$\Theta_{xx} = \frac{m}{12}(b^2+c^2) = \Theta_{min}$$

$$\Theta_{yy} = \frac{m}{12}(a^2+c^2)$$

$$\Theta_{zz} = \frac{m}{12}(a^2+b^2) = \Theta_{max}$$

$$\Theta_{zz} > \Theta_{yy} > \Theta_{xx}$$

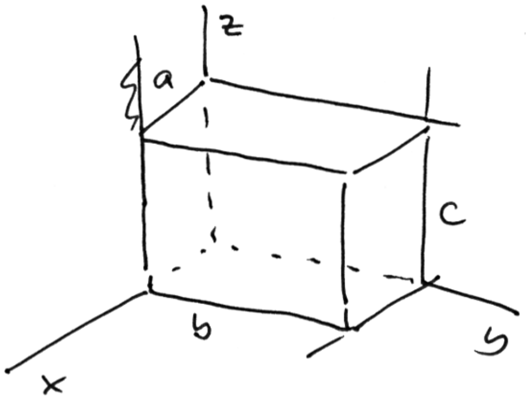
stabile, freie Rotation ist nur möglich um die Achse des größten oder kleinsten Trägheitsmoments

Exp. Quader

+  Scheibe

+ Lasso (Kette)

Trägheitstensor hängt vom gewählten Koordinatensystem ab




$$\Theta_{xx} = \rho \int_0^a \int_0^b \int_0^c (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{m}{V}\left(\frac{b^3}{3}ac + \frac{c^3}{3}ab\right)$$

$$= \frac{m}{3}\,\frac{\cancel{abc}}{\cancel{abc}}\,(b^2+c^2)$$

$$\Theta_{xy} = -\rho \iiint xy\,dx\,dy\,dz$$

$$= -\frac{m}{abc}\,\frac{1}{2}a^2\,\frac{1}{2}b^2 c$$

$$= -\frac{m}{4}ab$$

$$\Theta = m \begin{pmatrix} \frac{b^2+c^2}{3} & -\frac{ab}{4} & -\frac{ac}{4} \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2+c^2}{3} & -\frac{bc}{4} \\ -\frac{ac}{4} & -\frac{bc}{4} & \frac{b^2+a^2}{3} \end{pmatrix}$$

$\Theta$ ist hier <u>nichtdiagonal</u>, aber symmetrisch, lässt sich daher diagonalisieren.

Es gilt: | Der Trägheitstensor eines beliebig geformten, starren Körpers lässt sich diagonalisieren und besitzt drei aufeinander senkrechte Hauptträgheitsachsen |