Differentielle Beschreibung von Strömungen

Felder: Dichte $\rho(\vec{r},t)$

Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r},t)$

Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},t) = \rho\vec{v} = \frac{\text{Masse}}{\text{Fläche}\cdot\text{Zeit}}$

Kontinuumsgleichung

wg. Teilchenzahl- bzw Massenerhaltung muss für jedes beliebige Volumen gelten

$$\underbrace{\oint \vec{j}\,d\vec{A}}_{\text{Oberfläche}(V)} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho(\vec{r},t)\,dV = -\int_V \frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}\,dV$$

zeitl. konstant

mit $\vec{j}=\rho\vec{v}$ und Gauß'schem Satz

$$\int_V\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\vec{v})\right)dV=0$$

zur Erinnerung:
Divergenz eines Vektorfelds $\vec{f}(\vec{r})$
$\mathrm{div}\,\vec{f}=\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}\right)$
Quellstärke

muss für beliebiges Volumen gelten, also

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\vec{v})=0}$$ Kontinuitätsgleichung

oder $$\boxed{\dot{\rho}+\rho\,\mathrm{div}\,\vec{v}+\vec{v}\,\mathrm{grad}\,\rho=0}$$

stationäre Strömung $(\partial\rho/\partial t=0)$

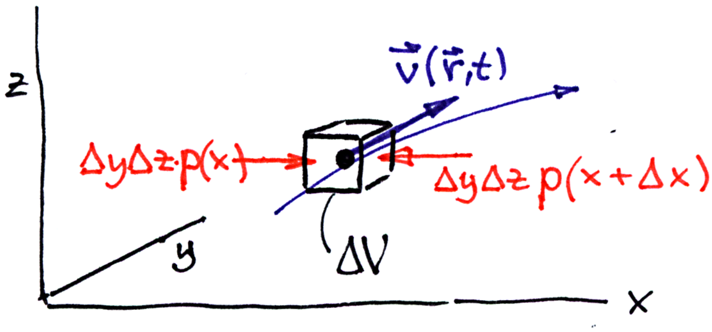
$$\boxed{\mathrm{div}(\rho\vec{v})=0}$$

für inkompressible Flüssigkeiten ($\rho=\text{konst}$)

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{v}=0}$$

Eulergleichung

Bewegungsgleichung idealer (reibungsloser) Flüssigkeiten, d.h. wg $\eta = 0$ treten keine Schubspannungen auf



Beschleunigung des Massenelements $\Delta m = \rho \Delta V$ durch interne Kräfte (Druck) und externe Kräfte (z.B. Schwerkraft)

$$\Delta m \frac{d\vec{v}}{dt} = \Delta \vec{F}_{ges} = \Delta \vec{F}_{ext} + \Delta \vec{F}_{Druck}$$

$$\rho(\vec{r},t)\cancel{\Delta V} \frac{d\vec{v}(\vec{r},t)}{dt} = \vec{f}(\vec{r},t)\cancel{\Delta V} - \text{grad}\, p \cancel{\Delta V}$$

Kraftdichte
z.B. $\vec{f} = \rho \cdot \vec{g}$

Beschleunigung in Richtung abnehmendem Druck

Beschleunigung hat zwei Anteile

- $\vec{v}(\vec{r},t)$ hängt am Ort $\vec{r}$ explizit von t ab
- in dt bewegt sich Δm von $\vec{r}$ nach $\vec{r} + d\vec{r} = \vec{r} + \vec{v}dt$, dort ist wegen $\vec{v}(\vec{r},t)$ die Geschwindigkeit verschieden

formal ausgedrückt: totales Differential $d\vec{v}$

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz$$

$$\text{mit } dx = \frac{dx}{dt} dt = v_x dt, \quad dy = v_y dt, \quad dz = v_z dt$$

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + \underbrace{(\vec{v} \cdot \nabla)}_{\left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right)} \vec{v}\, dt$$

damit:

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right) = -\nabla p + \vec{f}}$$ Eulergleichung der Hydrodynamik

3 Eulergleichungen (für v_x, v_y, v_z),
Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0$
und Zustandsgleichung $p = p(\rho)$ (z.B. $p\cancel{V} = nRT$)
sind 5 partielle Differentialgleichungen
zur Bestimmung der 5 Felder $\vec{v}, \rho, p$

Navier-Stokes-Gleichung

viskose Flüssigkeit, Reibung führt zu Scherkräften (Schubspannungen)
rechte Seite der Eulergleichung muss durch Reibungsterm ergänzt werden
bei inkompressiblen Flüssigkeiten: $\boxed{\eta\Delta\vec{v}}$

Laplace-Operator

mit $\Delta\vec{v} = \text{grad}\,\text{div}\,\vec{v} - \text{rot}\,\text{rot}\,\vec{v}$

$$\Delta\vec{v} = \nabla(\nabla\cdot\vec{v}) - \nabla\times(\nabla\times\vec{v})$$

Bernoulli-Gleichung als Spezialfall der Eulergleichung
reibungsfrei, kräftefrei, stationär, inkompressibel
$\eta = 0$, $f = 0$, $\partial v/\partial t = 0$, $\rho = \rho_0$

$$\rightarrow \rho_0(\vec{v}\cdot\Delta)\vec{v} = -\text{grad}\,p \quad ; (\vec{v}\cdot\Delta)\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 - \vec{v}\times\underbrace{(\nabla\times\vec{v})}_{\text{für laminare Str. } = 0}$$

$$\rightarrow \nabla\left(\rho_0\frac{v^2}{2} + p\right) = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\rho_0\frac{v^2}{2} + p = \text{const}}$$

Potentialströmung

für laminare, also wirbelfreie und stationäre Strömungen gilt:

$$\text{rot}\,\vec{v}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{v}(\vec{r}) = 0$$

es muss ein Feld existieren, so dass

$$\vec{v}(\vec{r}) = \text{grad}\,\phi(\vec{r})$$ (vgl. Kraft u. pot. Energie)

Potentialströmung (Geschwindigkeits-) Potential

für inkompressible Flüssigkeiten ist

$$\text{div}\,\vec{v} = 0$$ Kontinuitätsgleichung

$$\rightarrow \text{div}(\text{grad}\,\phi) = 0$$

oder $\boxed{\Delta\phi = 0}$ Laplace-Gleichung

(siehe auch Elektrostatik)

Grenzen unserer Diskussion

laminare → turbulente Strömung ($\text{rot}\,\vec{v} \neq 0$)

Kennzahl: Reynoldszahl $Re = \frac{2r\rho v}{\eta}$

$Re < 2000$: laminar

$Re > 3000$: turbulent