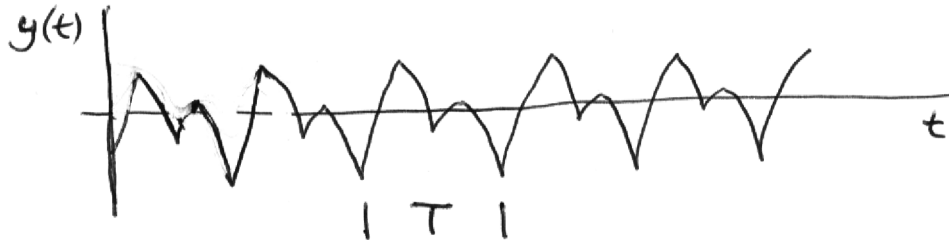


periodische nicht-harmonische klirungen

Fourieranalyse
~ synthese

(1768 - 1830)



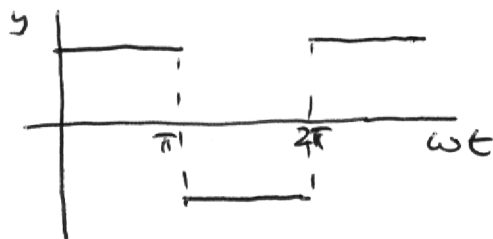
Grundkreisfrequenz $\omega = 2\pi \frac{1}{T}$

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

$k=1$: Grundklirung (1. Harmonische)
 $k=2$: erste Oberklirung (2. Harmonische)
 $k=3$: zweite " (3. ")
: n : (n-te Harmonische)

a_k, b_k = Fourierkoeffizienten

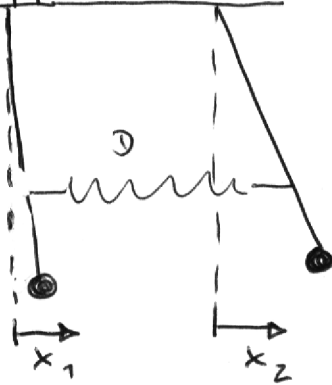
2.3. Rechteck-Funktion



$$y(t) \propto \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots$$

Gekoppelte Oszillatoren, Eigenbewegungen

2.3. zwei gekoppelte Pendel



gekoppelte Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 + \frac{D}{m} (x_1 - x_2) = 0$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_0^2 x_2 + \frac{D}{m} (x_2 - x_1) = 0$$

suche Eigenmoden (stationäre Schwingungsformen)
und Eigenfrequenzen

hier:

gleichphasig: $x_1 = x_2$, $\omega_a = \omega_0$

gegenphasig: $x_1 = -x_2$, $\omega_b^2 = \omega_0^2 + 2 \frac{D}{m}$

3 gekoppelte Oszillatoren (3-dimensional)

3 longit. + 2x3 transversale Moden

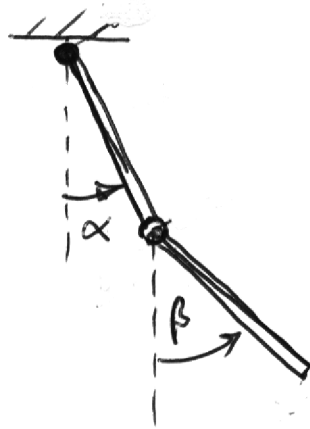
N gekoppelte Oszillatoren

3N Eigenbewegungen

(Molekülbewegungen, spez. Wärme)

Nichtlineare Systeme und Chaos

Das Knickpendel



zwei Stäbe,
Länge l

für kleine Auslenkungen, $\alpha, \beta \ll \frac{\pi}{2}$

$$\ddot{\alpha} + \frac{9}{8} \omega_0^2 \alpha + \frac{3}{8} \ddot{\beta} = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

$$\ddot{\beta} + \frac{9}{8} \omega_0^2 \beta + \frac{3}{2} \ddot{\alpha} = 0$$

2 Eigenmoden



$$\omega_1 = 0.856 \omega_0, \quad \beta_0/\alpha_0 = 1.431$$

$$\omega_2 = 2.295 \omega_0, \quad \beta_0/\alpha_0 = -2.097$$

Große Auslenkungen:

"hochgradig nichtlinear gekoppelte Dgl'n"

grundrätlich berechenbar, aber

winzige Unterschiede in Anfangsbedingungen

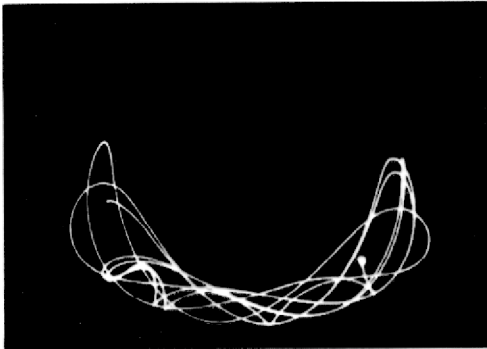
bedeuten nach kurzer Zeit große Unterschiede im Bewegungsablauf.

"deterministisches Chaos"

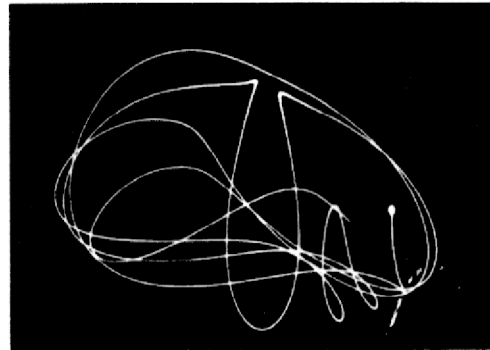
Übergang stationär $\leftrightarrow$ chaotisch wird

durch Lyapunov-Exponenten charakterisiert

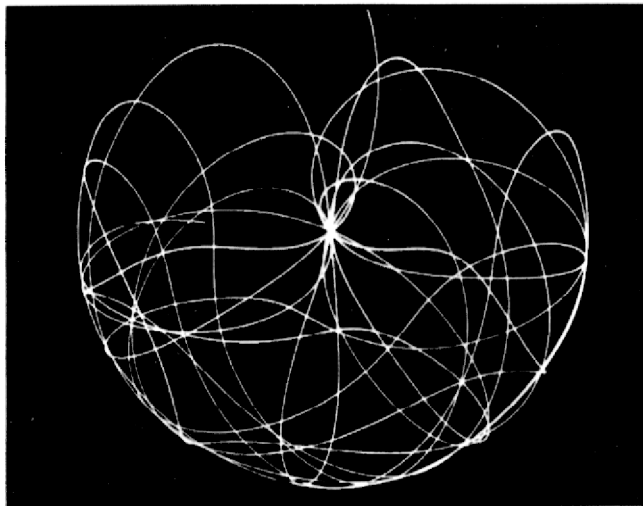
aus H.J. Leisi, Klassische Physik, Bd I: Mechanik
Birkhäuser 1996



$\alpha_0 = 60^\circ; t \approx 5s$



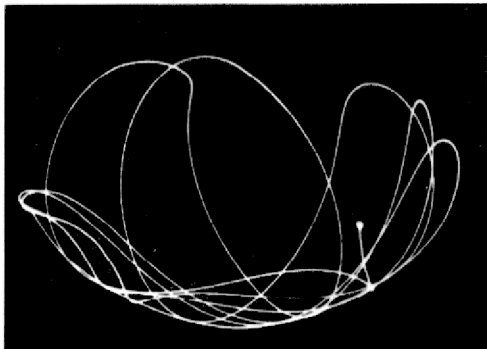
$\alpha_0 = 90^\circ; t \approx 5s$



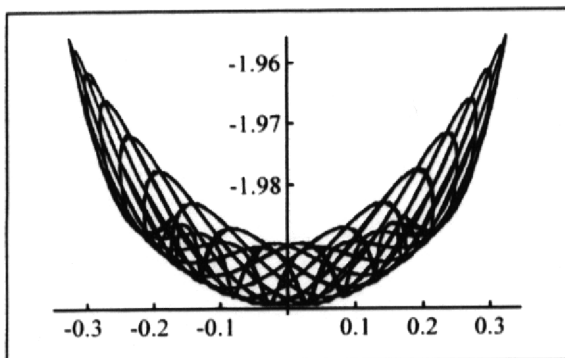
$\alpha_0 = 180^\circ$

$\beta_0 = 180^\circ$

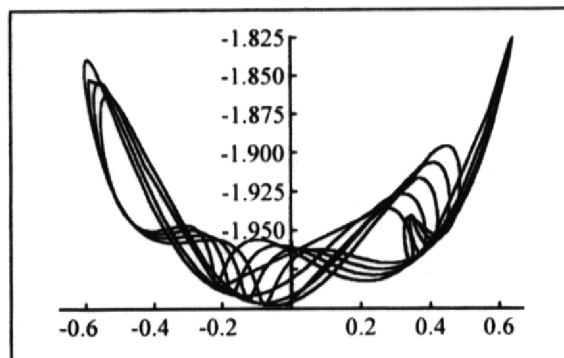
$t \approx 10s$



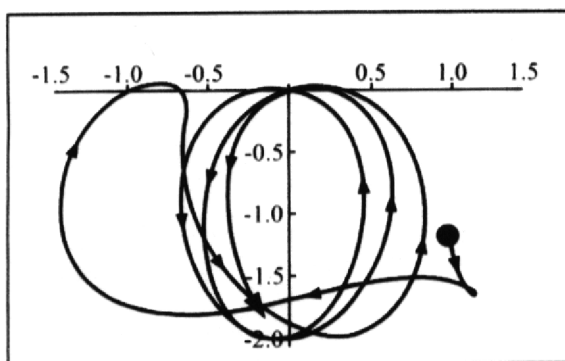
$\alpha_0 = 81^\circ$ ("exakt"), zweimal; $t \approx 5s$



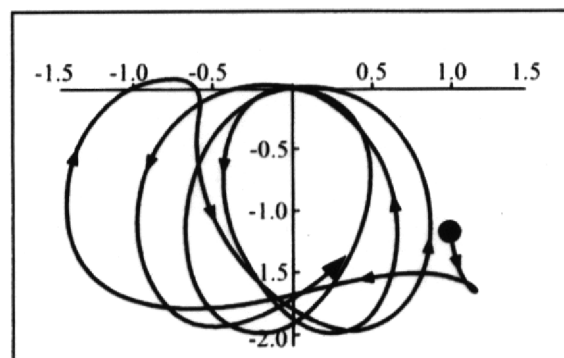
$$\alpha_0 = 10^\circ; \quad t = 30$$



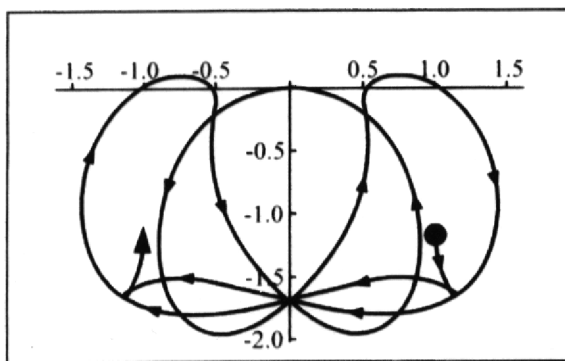
$$\alpha_0 = 20^\circ; \quad t = 10$$



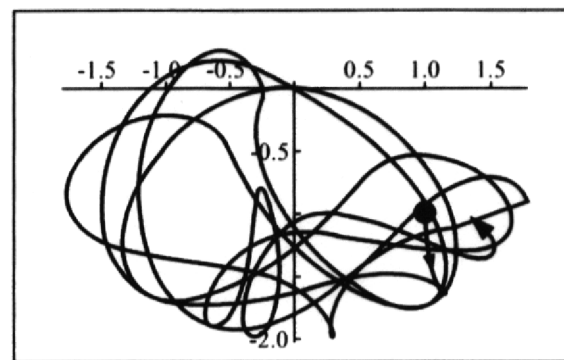
$$\alpha_0 = 79^\circ; \quad t = 5$$



$$\alpha_0 = 80^\circ; \quad t = 5$$



$$\alpha_0 = 81^\circ; \quad t = 5$$



$$\alpha_0 = 90^\circ; \quad t = 10$$