

Klassische Physik 1

WS 2012/13

Johannes Blümer

KIT-Centrum Elementarteilchen- und Astroteilchenphysik KCETA



2. Klassische Mechanik

2.2 Dynamik der Massenpunkte

- Newton'sche Axiome
- Impuls
- Energie
- Stoßgesetze
- Reibung
- Schwingungen (1)
- Drehbewegungen (2)
- Rotierende Bezugssysteme

Zusammenfassung v09, Do, 15. November

- Elastizität $e = \frac{v'_2 - v'_1}{v_2 - v_1}$ **völlig inelastisch** $0 \leq e \leq 1$ **völlig elastisch**

- Nichtzentraler elastischer Stoß im Raum

- Reduktion auf **2-dimensionales** Inertialsystem in dem $\vec{v}_2 = 0$ (mitbewegtes System)
- **4 Unbekannte**, Impuls- und Energieerhaltung liefern 3 Bestimmungsgleichungen
- Form der Körper und Stoßparameter **b** liefert vierte Bestimmungsgleichung

- Haft- und Gleitreibung

Immer entgegen der treibenden Kraft/Bewegung

$\vec{F}_N$ Normalkraft, wirkt senkrecht zur
Auflagefläche auf Körper

**material-
abhängig**

$$F_H = \mu_H F_N$$

$$F_G = \mu_G F_N$$

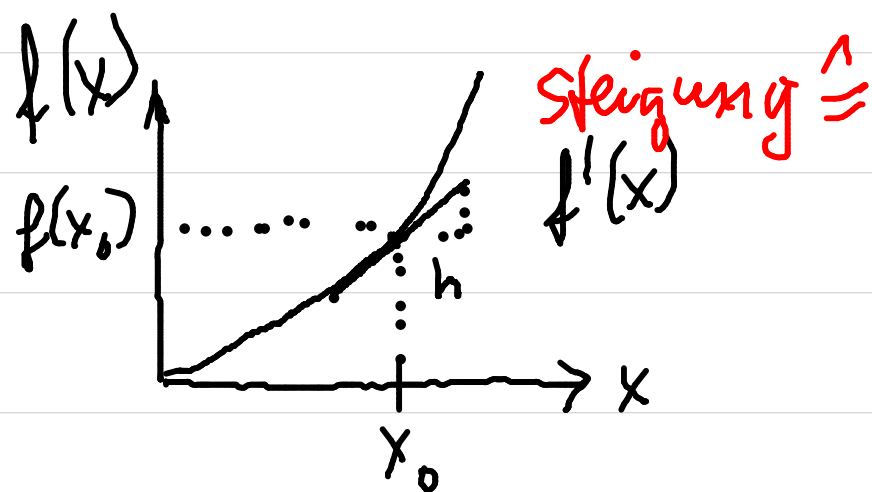
$$\mu_H > \mu_G$$

- Stokes'sche (viskose) Reibung $\vec{F}_R = -6\pi \eta r \vec{v}$
“Für nicht zu große Körper, die sich nicht zu schnell bewegen”

Beispiel-Rechnung: Fallende Kugel im Schwerfeld $v(t) = \frac{mg}{\gamma_S} \left(1 - e^{-\frac{\gamma_S}{m} t}\right)$

- Newton'sche Reibung $\vec{F}_R = -\frac{1}{2} c_w \rho A v \vec{v}$
“Für schnelle Bewegung großer Körper”

Einschub



für kleine h

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h \underbrace{f'(x)|_{x=x_0}}_{f'(x_0)}$$

Taylor-Entwicklung.

1) Beispiel: $x_0 \rightarrow a$

$h \rightarrow x$

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (a^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2a}$$

$$\hookrightarrow f(x) \approx a + x \frac{1}{2a}$$

$$\sqrt{181} = \sqrt{169 + 12}$$

$$\parallel$$

13,45...

$$\approx 13 + \frac{12}{26}$$
$$\approx 13,5$$

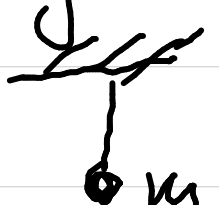
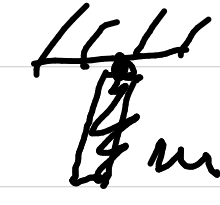
$$\sqrt{5} = \sqrt{4 + 1} \approx 2 + \frac{1}{2 \cdot 2} = 2,25$$

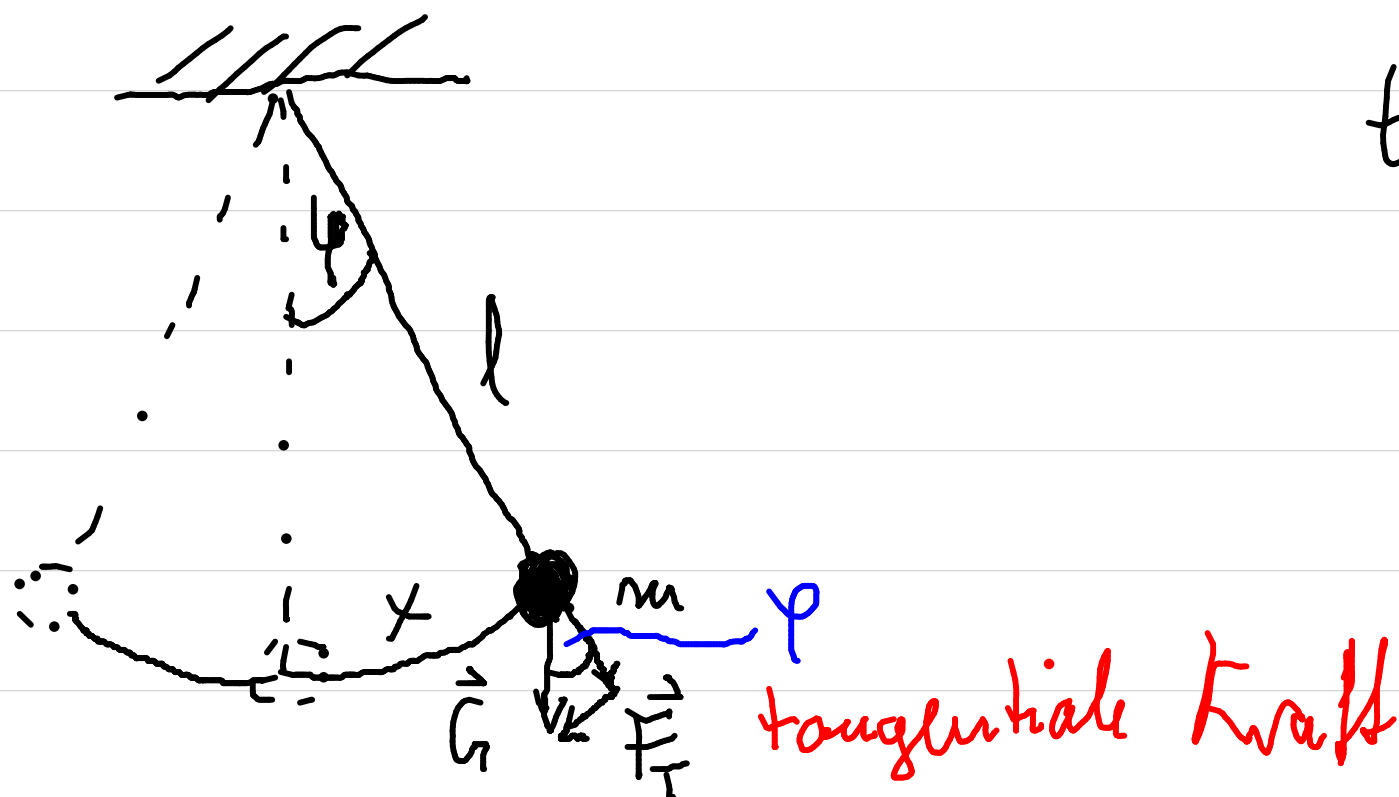
$\approx 2,236$

$$2) f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x \quad \rightarrow e^x \approx 1+x$$

$$e^{-\frac{\delta g}{m} t} \rightarrow 1 - \frac{\delta g}{m} t$$

$$\hookrightarrow v(t) \approx \frac{mg}{\delta g} \left(1 - 1 + \frac{\delta g}{m} t \right) = gt \quad \text{wie freier Fall!}$$

□ Schwingung eines Fadenpendels
 ("math."  "phys." Pendel )



$t=0: x=x_0$
 Anfangsbedingung

$$\varphi = \frac{x}{l}$$

$$\frac{|\vec{F}_T|}{|\vec{G}|} = \sin \varphi \approx \varphi = \frac{x}{l}$$

$$|\vec{F}_T| \approx -mg \frac{x}{l} = ma = m\ddot{x}$$

Dgl. $m\ddot{x} + mg \frac{x}{l} = 0$

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} x = 0$$

linear homogene Dgl. 2. Ord.

Ansatz: $x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$

aus Dgl. und Anfangsbedg.
 Amplitude | Phase

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \delta)$$

Kreisfreq.

in Dgl. einsetzen...

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \delta) + \frac{g}{l} A \cos(\omega t + \delta) = 0$$

$$A \left(\frac{g}{l} - \omega^2 \right) \cos(\omega t + \delta) = 0 \quad \text{für alle } t$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{g}{l}} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Anfangsbedingungen ausnutzen:

$$\left. \begin{aligned} x(t=0) &= x_0 = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\varphi) \\ x(t=\frac{T}{4}) &= 0 = A \cos(\frac{1}{T} \cdot \frac{T}{4} + \varphi) = A \cos(\frac{\pi}{2} + \varphi) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \varphi &= 0 \\ A &= x_0 \end{aligned}$$

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega t), \quad \omega^2 = \frac{g}{l}}$$

Bewegungsgl. für Pendel

□ Federschwingungen

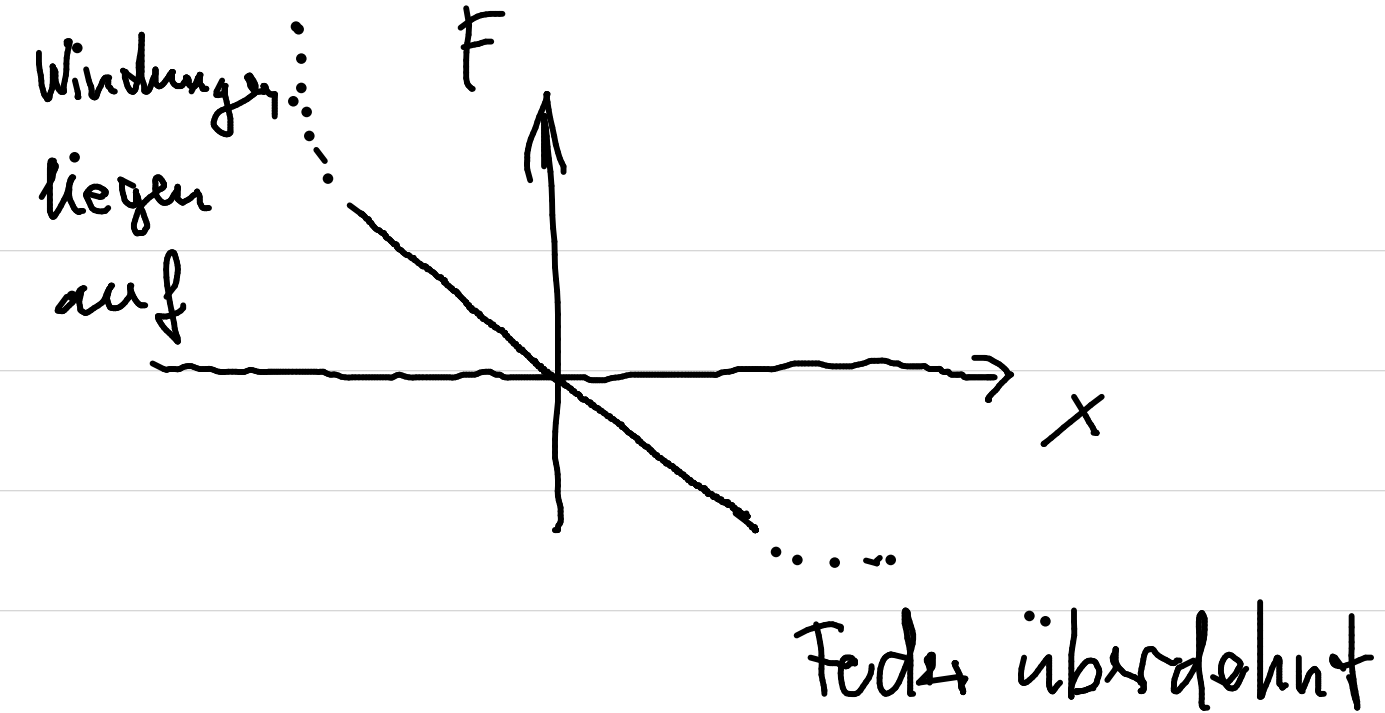


Körper der Masse m .

auslenken $\rightarrow$ Rückstellkraft

$$F_R = -kx \quad k \dots \text{Federkonst.}$$

Hooke's Gesetz



Bewegungsgl.

$$m \ddot{x} = -kx$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{Dgl.}$$

Mathematisch gleiche Form wie math. Pendel

$$\hookrightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t) \quad , \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad , \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

□ Energiebilanz bei harm. Schwingungen

Beispiel Federschw.

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k (x(t))^2$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m (v(t))^2$$

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{konst}$$

$$= \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} m x_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$= \frac{1}{2} k x_0^2 \underbrace{\left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) \right)}_{=1} = \frac{1}{2} k x_0^2$$

Gesamtenergie einer harmonischen Schwingung
ist prop. zum Quadrat der Amplitude.

Einschub: Komplexe Zahlen

$$x^2 + 1 = 0 \quad i = \sqrt{-1}$$

hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung $\rightarrow$ definiere Zahlen $\mathbb{C}$
mit $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ so dass Lösung immer existiert

$\mathbb{C}$ können formal addiert, multipliziert und
dividiert werden wie $\mathbb{R}$

übliche Regeln: Kommutativität, Assoziativität
von Addition und Multiplikation

$$z = a + ib \quad a, b \in \mathbb{R}$$

a : Realteil von z

$$a = \operatorname{Re}(z)$$

b : Im. teil von z

$$b = \operatorname{Im}(z)$$

$$b=0 \Rightarrow z=a \in \mathbb{R} \quad \text{d.h.} \quad \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z)=0\}$$

Außer als im $\mathbb{R}$: keine Anordnung ($<, >$) möglich

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

konjugiert komplexe Zahlen

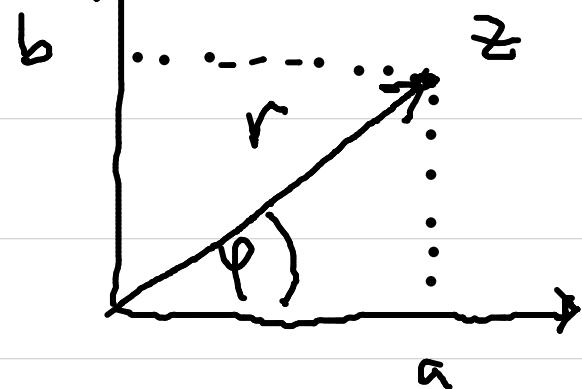
$$z^* = a - ib \quad (z = a + ib) \Rightarrow z \cdot z^* = a^2 + b^2 \geq 0$$

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

geometrische Veranschaulichung

imaginäre Achse



$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Argument: $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

$$-\pi \leq \varphi \leq \pi$$

$$\left. \begin{aligned} a &= r \cos \varphi \\ b &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} z &= r \cos \varphi + i r \sin \varphi \\ &= r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) \end{aligned}$$

Exponentialfunktion e^x mit $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

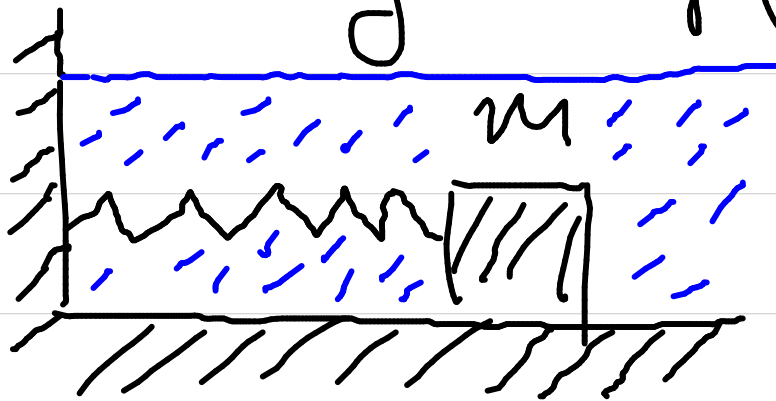
$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$e^{ib} = 1 + ib + \frac{i^2 b^2}{2!} + \frac{i^3 b^3}{3!} + \dots$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} + \dots\right)}_{\cos b} + i \underbrace{\left(b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} + \dots\right)}_{\sin b}$$

$$e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

Beispiel: gedämpfte Schwingungen



trockene Reibung: $F_R = \mu_0 F_N$
unabhängig von v

hier:

$$F_R = \gamma v \quad \text{Stokes'sche Reibung}$$

$$\underbrace{E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}}_{\neq \text{konst.}} + \underbrace{W_{\text{Reibung}}}_{\text{konst.}} = \text{konst.}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{F}_R - \vec{F}_G \Rightarrow m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}$$

$$\Rightarrow \text{Dgl. } m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0 \leftarrow \text{lin. hom. Dgl. 2. Ordnung}$$

Ausatz: $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ geht immer bei lin. hom. Dgl.!
 λ darf komplex sein

Einsetzen des Ansatzes: $0 = m x_0 \lambda^2 e^{\lambda t} + \gamma x_0 \lambda e^{\lambda t} + k x_0 e^{\lambda t}$
 man darf immer durch $x_0 e^{\lambda t}$ teilen, da $x_0 \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0}$$

und $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$

"Charakteristische Gl."

Lösungen
 (pq-Formel)

$$\boxed{\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}}$$