Karlsruher Institut für Technologie

Klassische Physik 1 WS 2012/13

Johannes Blümer

KIT-Centrum Elementarteilchen- und Astroteilchenphysik KCETA

Errata

2. Klassische Mechanik
2.2 Dynamik der Massenpunkte

- Newton’sche Axiome
- Impuls
- Energie
- Stoßgesetze
- Reibung
- Schwingungen (1)
- Drehbewegungen (2)
- Rotierende Bezugssysteme

$$\underline{m\lambda^2 + \varrho\lambda + k = 0} \quad \text{charakteristische Gl.}$$

$$\hookrightarrow \quad \lambda_{1/2} = -\frac{\varrho}{2m} \pm \sqrt{\frac{\varrho^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

1) "Schwache Dämpfung": $\frac{\varrho^2}{4m^2} < \frac{k}{m}$

$\iff \sqrt{}$ imaginär

$e^{\lambda t}$ beschreibt Schw. wenn λ komplex:

$$x_1(t) = x_0 e^{\lambda_1 t} = x_0 e^{\left(-\frac{\varrho}{2m} + i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\varrho^2}{4m^2}}\right)t}$$

$$= x_0 e^{-\varrho/2m\, t} e^{i\sqrt{\frac{k}{m} - \varrho^2/4m^2}\, t}$$

$$= x_0 e^{-\delta t} e^{i\omega t} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \delta = \frac{\varrho}{2m} \\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2} \end{array} \right.$$

$$x_2(t) = \tilde{x}_0 e^{-\delta t} e^{-i\omega t}$$

$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ mit $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ Kreisfrequenz der ungedämpften Schw.

Einschub I: Eine homogene lineare Dgl. 2. Ordnung hat <u>immer</u> zwei Lsg.!

Falls $x_1(t)$, $x_2(t)$ Lsg. der Dgl., dann $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ auch Lsg.!

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \Rightarrow \begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \\ \sin x &= \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \end{aligned}$$

durch Linearkombination:

$$x_1(t) = x_0 \, e^{-\delta t} \cos \omega t$$

$$x_2(t) = \tilde{x}_0 \, e^{-\delta t} \sin \omega t$$

harmonische Schwingungen

$\omega < \omega_0$

neu: exponentielle Dämpfung

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Beispiel: $x(t=0) = A \qquad \dot{x}(t=0) = 0$

$$t=0: \quad \underbrace{e^{0}}_{1}\left(x_0 \underbrace{\cos 0}_{1} + \underbrace{\tilde{x}_0 \sin 0}_{0}\right) = A \Rightarrow x_0 = A$$

$$x(t) = e^{-\delta t}\left(x_0 \cos\omega t + \tilde{x}_0 \sin\omega t\right)$$

$$\dot{x}(t) = -\delta e^{-\delta t}\left(x_0 \cos\omega t + \tilde{x}_0 \sin\omega t\right)$$

$$+ e^{-\delta t}\left(-x_0\omega \sin\omega t + \tilde{x}_0 \omega \cos\omega t\right)$$

$$\dot{x}(t=0) = -\delta A + \tilde{x}_0 \omega \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{x}_0 = \frac{\delta A}{\omega}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = A e^{-\delta t}\left(\cos\omega t + \frac{\delta}{\omega}\sin\omega t\right)$$

2) "mittlere Dämpfung" $\quad \frac{\varrho^2}{4m^2} = \frac{k}{m}$

$\hookrightarrow \sqrt{0}$

$\Rightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{\varrho}{2m} \pm 0$ $\quad$ Zwei Lsg. fallen zusammen?

Einschub II: Theorie der linearen Dgl.

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

Falls $y_1(x)$ bekannt, so lässt sich Ordnung der Dgl. um 1 reduzieren mit Produktansatz

$$\boxed{y_2(x) = u(x)\, y_1(x)}$$

Einsetzen und $u(x)$ bestimmen

$m\ddot{x} + \varrho\dot{x} + kx = 0$ $\quad$ Ansatz: $x_2(t) = u(t)\, x_0\, e^{-\varrho/(2m)t}$
$= u(t) \cdot x_1(t)$

$$m(\ddot{u}x_1 + 2\dot{u}\dot{x}_1 + u\ddot{x}_1) + \varrho(\dot{u}x_1 + u\dot{x}_1) + kux_1 = 0$$

$$m(\ddot{u}x_1 + 2\dot{u}\dot{x}_1) + \varrho\,\dot{u}x_1 + u\underbrace{(m\ddot{x}_1 + \varrho\dot{x}_1 + kx_1)}_{=0} = 0$$

$[v = u]$

$$m\Big(\ddot{u}x_1 - 2\dot{u}\frac{\varrho}{2m}x_1\Big) + \varrho\dot{u}x_1 = 0 \Rightarrow \ddot{u} = 0 \Rightarrow \dot{u} = C$$

$$u = Ct$$

$$\Rightarrow x_2(t) = \tilde{x}_0\, t\, e^{-\varrho/2m\, t}$$

zweite Lsg.

$$\boxed{x(t) = (x_0 + \tilde{x}_0 t)\, e^{-\varrho/2m\, t}}$$

"aperiodischer Grenzfall"

3) "starke Dämpfung" $\quad \frac{\varrho^2}{4m^2} > \frac{k}{m}$

$\sqrt{}$ reell und >0 $\quad$ oder $\delta^2 > \omega_0^2$

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

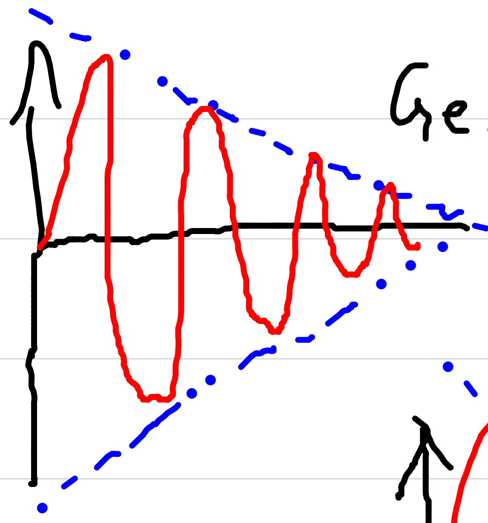
$$x(t) = x_0 e^{\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t} + \tilde{x}_0 e^{\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t}$$
$$= e^{-\delta t}\left(x_0 e^{\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\,t} + \tilde{x}_0 e^{-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\,t}\right)$$

Beispiel: $x(t) = e^{-\delta t} \cos(\omega t)$ $\omega = \sqrt{100^2 - \delta^2}$

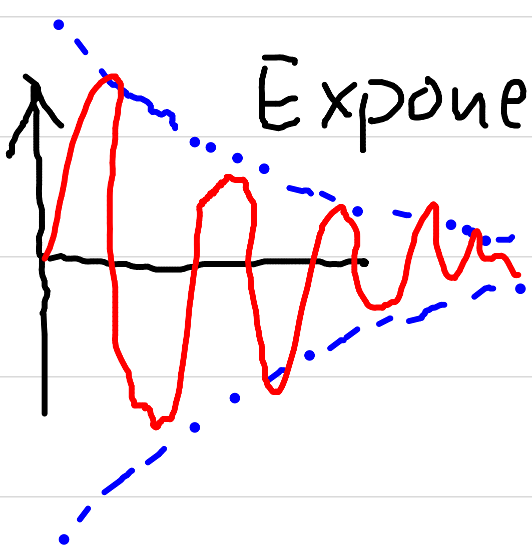
$\omega_0 = 100$

□ Vergleich verschiedener Dämpfungsgesetze

$F_R \sim v^n$

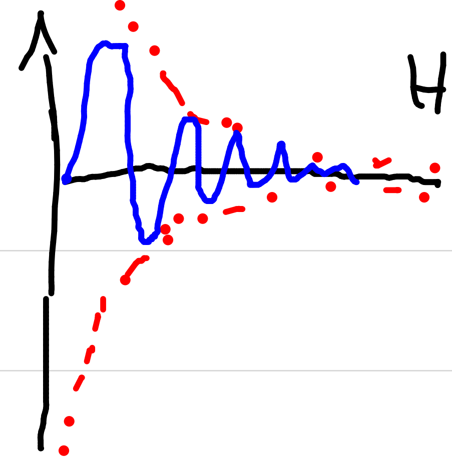


$n = 0$: Coulomb-Reibung



$n = 1$: Stokes-Reibung

$n = 2$: Newton-Reibung



D Energiebetrachtungen

$$E = E_{pot} = \frac{1}{2} k x_0^2 \quad \text{mit } t=0 \text{ und } \dot{x}(t=0)=0$$

$$= E_{kin}(\dot{x}) + E_{pot}(x)$$

$$\frac{x(t+T)}{x(t)} = \frac{x_0 e^{-\delta(t+T)} \cos(\omega(t+T))}{x_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t)} = e^{-\delta T}$$

An Umkehrpunkten: $E_{pot} \propto x^2 \Rightarrow \frac{E}{E_0} = \frac{x^2}{x_0^2} = e^{-2\delta T}$

Anfangsenergie

$$P = \dot{E} = -2\delta \underbrace{E_0 e^{-2\delta t}}_{E} = -2\delta E$$

Gütefaktor Q des Systems $\quad Q \equiv 2\pi \frac{E}{|\Delta E|_{\text{pro Periode}}}$

$$Q = 2\pi \frac{E}{|2\delta E T|} = 2\pi \frac{\tau}{T} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{1}{2\delta} = \frac{m}{\varrho}$$

τ charakteristische Zeitskala der Energieabnahme.

Erzwungene Schwingungen

bisher: (un-)gedämpfte Systeme ohne periodische Anregung. Wurden kurz angestoßen und oszillierten mit ihrer Eigenfrequenz.

jetzt: Erreger – Kopplung – Mitschwinger

Oszillator — Resonator

z.B. Geige: Saite – Steg – Boden

mathematische Beschreibung: weiteren Kraftterm

$$\underbrace{F = F_0 \cos\omega t}$$ ← allgemein, da $t=0$ gewählt werden kann so dass sich cos-Schwingung ergibt.

$$m\ddot{x} + \xi\dot{x} + kx = F_0 \cos\omega t$$ inhomogene lineare Dgl. 2. Ordnung

Ansatz:

$$x(t) = \underbrace{c_1 e^{-\delta t}\cos\omega_0 t + c_2 e^{-\delta t}\sin\omega t}_{\text{Lsg. der homogenen Dgl.}} + \underbrace{x_0 \cos(\omega t + \phi)}_{\text{spezielle Lsg. (Ansatz)}}$$

Nach dem Einschwingvorgang muss System der Anregung folgen.