

Klassische Physik 1

WS 2012/13

Johannes Blümer

KIT-Centrum Elementarteilchen- und Astroteilchenphysik KCETA



2. Klassische Mechanik

2.2 Dynamik der Massenpunkte

- Newton'sche Axiome
- Impuls
- Energie
- Stoßgesetze
- Reibung
- Schwingungen (1)
- Drehbewegungen (2)
- Rotierende Bezugssysteme

Zusammenfassung v10 und v11

- Harmonische Schwingung ohne Dämpfung

Rückstellkraft $\propto$ Auslenkung

Bewegungsgleichung $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

Fadenpendel

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Feder

Lösung $x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$



aus Anfangsbedingungen bestimmen

- Harmonische Schwingung mit (Stokes-)Dämpfung

Bewegungsgleichung $m\ddot{x} + \rho\dot{x} + kx = 0$

Dämpfung: Reibungskraft $\propto$ Geschwindigkeit

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \delta = \frac{\rho}{2m}$$

- a) Schwach gedämpft $\omega_0 > \delta$

$$x(t) = e^{-\delta t} (c_1 \cos \omega_h t + c_2 \sin \omega_h t)$$

$$\omega_h^2 = \omega_0^2 - \delta^2$$

- b) Mittelstark gedämpft (aperiodischer Grenzfall) $\omega_0 = \delta$

$$x(t) = e^{-\delta t} (c_1 + c_2 t)$$

- c) Stark gedämpft $\omega_0 < \delta$

$$x(t) = e^{-\delta t} (c_1 e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t})$$

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = \underline{F_0 \cos \omega t}$$

$$x(t) = x_h(t) + \underline{x_p(t)}$$

$$\underline{x_p(t)} = X_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

(Lsg. in Übung 7)

$$\tan \phi = \frac{-\gamma \omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$X_0 = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$$

Maximum

Resonanz - Kreisfrequenz ω_R : $\left. \frac{dx_0}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_R} \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_R^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2m^2} = \omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$$x_{0R} = x_0(\omega=\omega_R) = \frac{F_0}{\sqrt{\gamma^2(\delta^2 + \omega_R^2)}} \rightarrow \infty \quad \text{für } \gamma \rightarrow 0$$

➤ Statiker und Konstrukteure müssen Dämpfung groß genug machen um "Resonanzkatastrophe" zu vermeiden.

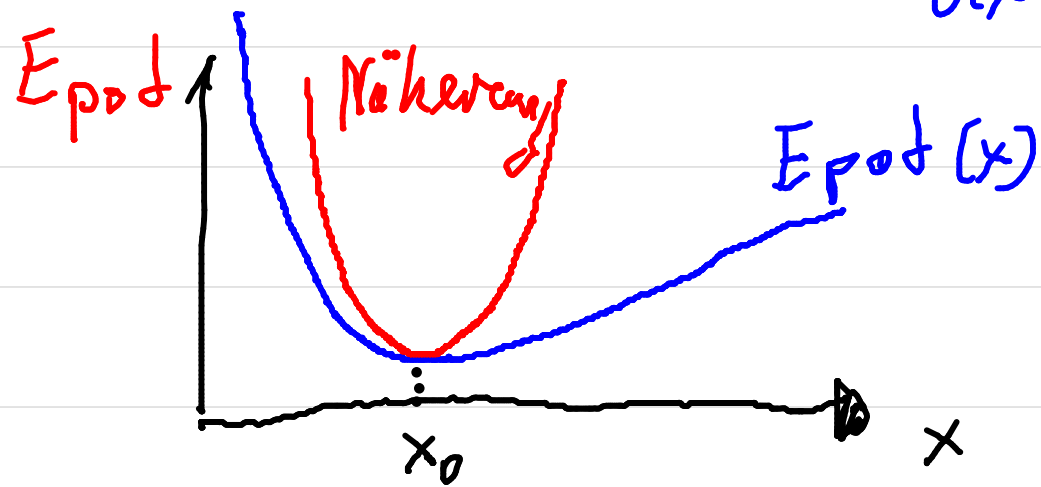
□ Bewegung in der Nähe von Gleichgewichtspunkten

$$W = \int \vec{F} d\vec{s}$$

Umkehr: $\vec{F} = - \overset{\text{Konvention}}{\text{grad}} E_{\text{pot}}(\vec{r})$

in x-Komp.: $F(x) = - \frac{dE_{\text{pot}}(x)}{dx}$

Gradient $\text{grad } f(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} f(\vec{r})$



Taylor-Entwicklung von $E_{\text{pot}}(x)$ um Minimum (Gleichgewichtslage)

$$E_{\text{pot}}(x) = E_{\text{pot}}(x_0) + \underbrace{\frac{dE_{\text{pot}}}{dx} \Big|_{x=x_0}}_{=0 \text{ wg. Minimum}} (x-x_0) + \underbrace{\frac{1}{2!} \frac{d^2 E_{\text{pot}}}{dx^2} \Big|_{x=x_0}}_{>0 \text{ wg. Min.}} (x-x_0)^2 + \dots$$

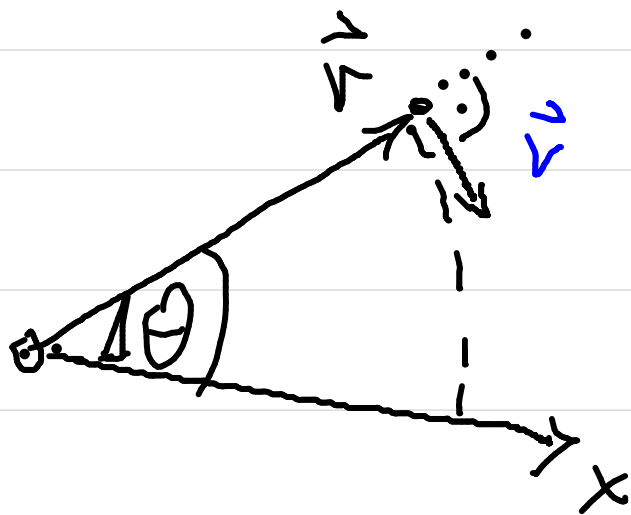
$$\Rightarrow E_{\text{pot}}(x) \approx E_{\text{pot},0} + \frac{1}{2} k (x-x_0)^2$$

$$k = \frac{d^2 E_{\text{pot}}(x)}{dx^2} \Big|_{x=x_0}$$

$$F(x) = - \frac{dE_{\text{pot}}(x)}{dx} = -k(x-x_0) - \dots$$

d.h. Bewegung um Gleichgewichtslage kann immer in Näherung durch harm. Oszillator beschrieben werden!

Drehbewegungen



$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}$$

Winkelgeschw.

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$$

Bahngeschw.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta}$$

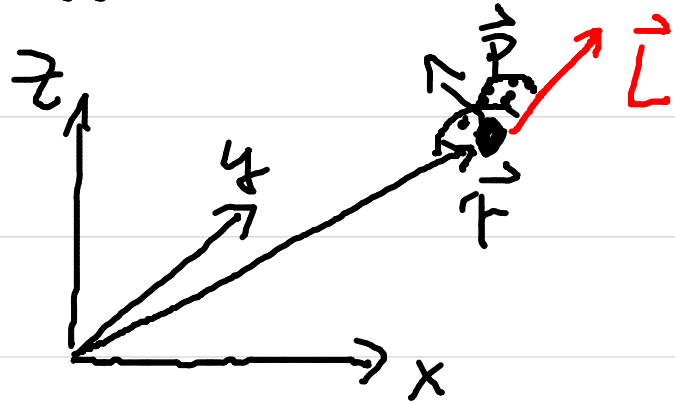
Winkelbeschleunigung

$$a_z = \frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

zentripetal beschleunigung

Drehimpuls, Drehmoment und Drehimpulserhaltung

Zunächst: Massepunkt

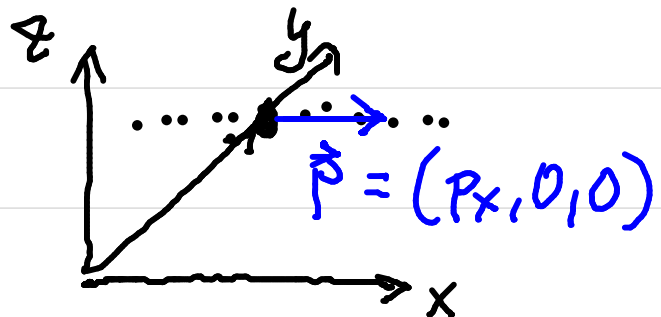


$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$\vec{L} = 0$ bezüglich Ursprung ($\vec{r} = 0$)

$\vec{L} \perp (\vec{r}, \vec{p})$, Richtung
gemäß "Rechte-Hand-Regel"

Beispiel:

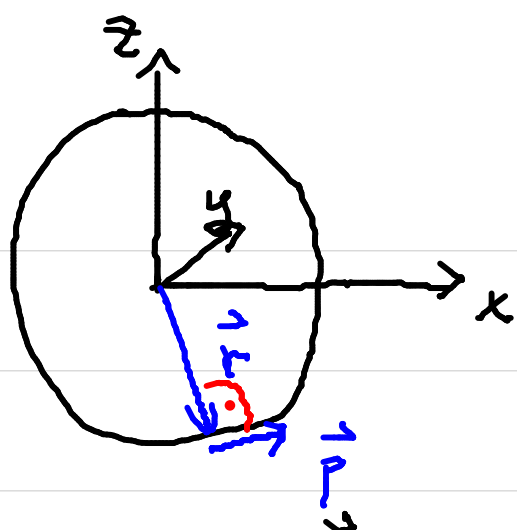


$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gleichförmige Bewegung in x-Richtung
mit $\vec{p} = \text{konst.}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = -y p_x \vec{e}_z = \text{konst.}!$$



Masse auf Kreisbahn in (x, z) -Ebene

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = -r p \hat{e}_y = \text{konst.}$$

$$\vec{p} = \text{konst.}$$

$$\vec{p} \perp \vec{r}$$

Was ist $\frac{d\vec{L}}{dt}$?

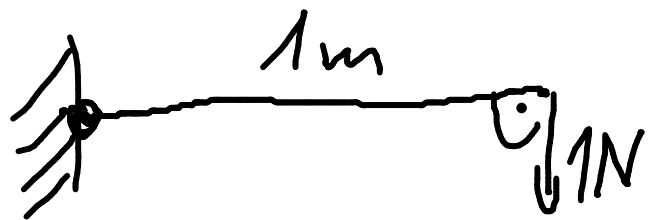
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \times \vec{p}}_{=0 \text{ da } \vec{v} \parallel \vec{p}} + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Drehmoment
"Drehkraft"

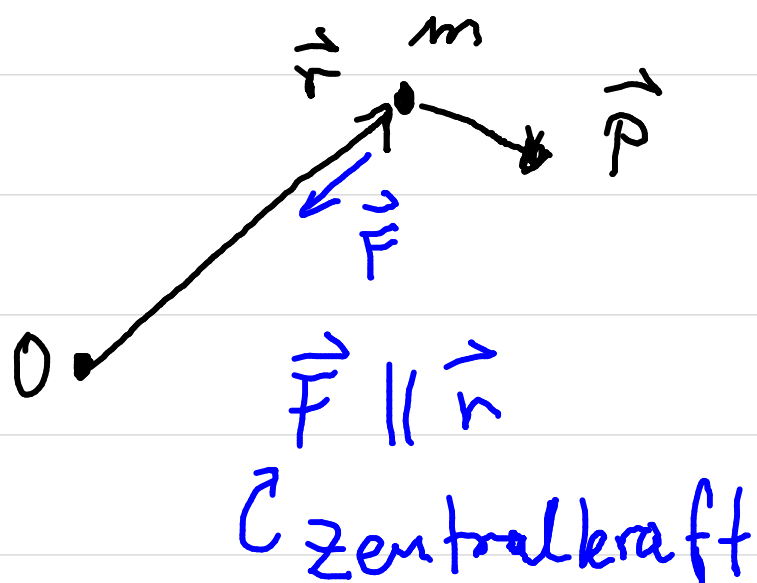
Gibt Kraft an die an Ort $\vec{r}$ bzgl. einer Achse angreift. Einheit: Nm

1 Nm = Drehmoment einer Kraft von 1N, die senkrecht an einem 1m langen Hebelarm wirkt



$$\vec{F}(\vec{r}) = -f(r) \hat{r}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

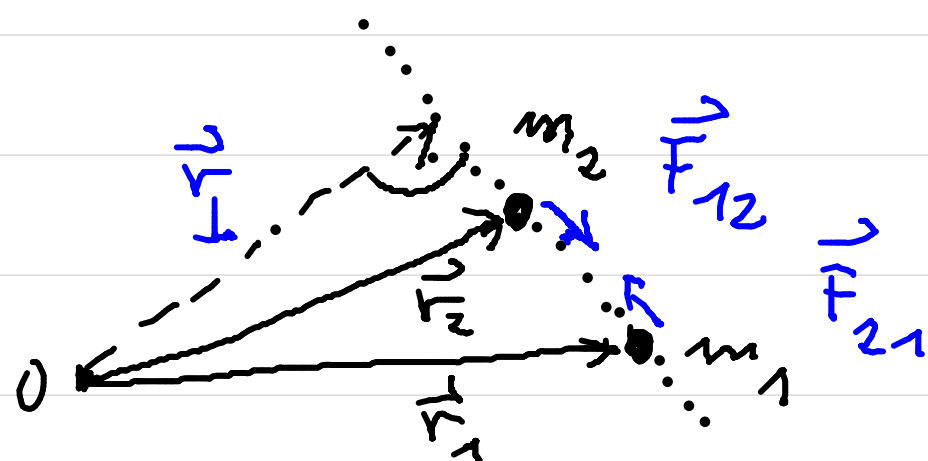


$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = -\vec{r} \times f(r) \hat{r} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \text{konst.}$$

z.B.
 Gravitation!

Drehmomente von N Teilchen, die miteinander ww.



3. Newton'sches Axiom

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} = \vec{r}_\perp \times \vec{F}_{21}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} = -\vec{r}_\perp \times \vec{F}_{21}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0 \Rightarrow \text{Alle Drehmomente verschwinden paarweise!}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{L} = \sum_{j=1}^N \vec{L}_j = \text{konst.}$$

ohne äußere
Einwirkung

$\Rightarrow$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{außen}}$$

Drehimpuls ist fundamentale Erhaltungsgröße:

In einem abgeschlossenen System (d.h. $\vec{M}_{\text{außen}} = 0$)

bleibt der Gesamtdrehimpuls konstant.

Schwerpunkt / Massenmittelpunkt

N Teilchen:

$$\vec{R}_S = \frac{\sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j}{\sum_{j=1}^N m_j}$$

gewichtete Summe

Summe der Gewichte

$$\sum \vec{p}_j = \sum m_j \dot{\vec{r}}_j = \dot{\vec{R}}_S \cdot \sum m_j = M \dot{\vec{R}}_S = M \vec{V}_S$$

Summe der Teilchenimpulse = Gesamtmasse $\cdot$ Schwerpunkts-geschw.

$$\sum_j \vec{F}_j = \sum_j \frac{d\vec{p}_j}{dt} = \sum_j \underbrace{m_j}_{M} \vec{v}_s = M \vec{A}_s$$

Summe aller Kräfte = $\overset{M}{\text{Gesamtmasse}} \cdot \text{Schwerpunktsbesch.}$

nützliche Zerlegung des Gesamtdrehimpulses:

$$\vec{L} = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{p}_j = \underbrace{\sum_j (\vec{r}_j - \vec{R}_s) \times \vec{p}_j}_{\text{Drehimpuls des Systems bzgl. Schwerpunkt}} + \underbrace{\sum_j \vec{R}_s \times \vec{p}_j}_{\text{Drehimpuls des Schwerpunkts}}$$