Karlsruher Institut für Technologie

Klassische Physik 1 WS 2012/13

Johannes Blümer

KIT-Centrum Elementarteilchen- und Astroteilchenphysik KCETA

"Kepler 2" = Drehimpulserhaltung

Planet bewegt sich in Zeit dt um Wegstück $\vec{v}\,dt$

Gravitation wirkt immer in $-\vec{r}$-Richtung, kein Drehmoment!

$$dA = \text{halbe Parallelogrammfläche}$$

$$= \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \vec{v}\,dt \right| = \frac{1}{2m} \underbrace{\left| \vec{r} \times m\vec{v} \right|}_{\text{Drehimpuls}} dt = \frac{1}{2m} L\, dt$$

$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ Drehimpuls des Planeten relativ zur ... Sonne

$L = \text{konst} \longleftrightarrow dA = \text{konst} \cdot dt$ = Aussage des Flächensatzes

Gravitationsgesetz schließt "Kepler 3" ein

Spezialfall Kreisbahn mit Radius r

m_p Planetenmasse, $M_\odot$ Sonnenmasse

Zentripetalbeschleunigung: $a_z = \dfrac{v^2}{r}$

$$\underbrace{F = m_p \cdot a_z}_{\text{Newton II}} = m_p v^2 / r = \underbrace{G \frac{M_\odot m_p}{r^2}}_{\text{Grav. Gesetz}}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{G M_\odot}{r}$$

hängt nur von Zentralmasse ab

Umlaufzeit $T \Rightarrow v = \dfrac{2\pi r}{T}$, $v^2 = \dfrac{4\pi^2 r^2}{T^2}$ vgl

$$\frac{G M_\odot}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \rightarrow T^2 = \underbrace{\frac{4\pi^2}{G M_\odot}}_{\text{konst}} \cdot r^3$$

Aussage von K. 3 ✓

Gravitation: $1/r^2$ Zentralkraft [wie z.B. el. statische Kraft]

Test im System Erde, Mond

Erde, Mond $\rightarrow$ Punktteilchen (!)

Bahnradius des Mondes $\simeq 60\, r_E = r$

Bahnbeschleunigung $a_m = v^2/r = 4\pi^2 r^2/T^2$

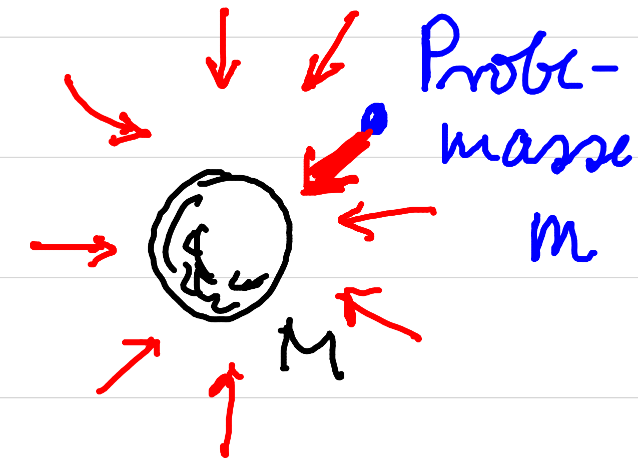
$\underbrace{r}_{384\,000\,km} \qquad \underbrace{T}_{27{,}3 \text{ Tage}}$

$a_m = 2{,}72 \cdot 10^{-3}\ m/s^2$

$g_E = 9{,}81\ m/s^2 = G \dfrac{M_E}{r_E^2} \Rightarrow \dfrac{g_E}{a_m} = \dfrac{r_m^2}{r_E^2}$

$g_E/a_m = 3607 \simeq 60^2$

Gravitationsfeld



Langreichweitige Wirkung? ~~Spuk~~?

(Feldbegriff, Kraftvermittler

Änderungen (in Feldern) breiten sich nicht instant aus, sondern mit Lichtgeschwindigkeit

QM: fundamentale Kräfte werden durch Austauschteilchen vermittelt

Definition des Feldes / der Feldstärke durch Kraft auf einen Probekörper!

Punktmasse → $F = G m_1 m_2 / r^2$

Stärke des Gravitationsfelds der Erde $= g(r) = \frac{F}{m} = \frac{GM_E}{r^2}$

$m_1 = M_E\ ,\ m_2 \to m$

von der Punktmasse zu Massenverteilungen

Kugel $\to \Sigma$ dünne Kugelschalen

$\quad$ └ Σ dünne Ringe

$\quad\quad$ └ Σ v. Massenelementen auf einem Kreis

Ring mit homogener Massenbelegung, Gesamtmasse m

Beitrag von dm zur Kraft auf die Probemasse

$$dF = G \cdot dm \cdot m_0 / s^2$$

$-$?

Symmetrie! betr. Proj. von dF auf x-Achse

$$dF_x = -dF \cos\alpha = -G \frac{dm \cdot m_0}{s^2} \cdot \cos\alpha$$

Feldstärke (durch dm verursacht): $dg_x = \frac{dF_x}{m_0} = -G\,\frac{dm}{s^2}\cos\alpha$

Kraft bezogen auf die Probemasse!

$$g_x = -\int \frac{G\,dm}{s^2}\cos\alpha = -\frac{G\cos\alpha}{s^2}\int dm \qquad \int\limits_{(\text{Ring})} dm = m$$

$$= -\frac{G\cos\alpha\; m}{s^2} \quad (*)$$

$$s^2 = x^2+a^2,\quad \cos\alpha = \frac{x}{s} \qquad g_x = -\frac{G\,m\,x}{(x^2+a^2)^{3/2}} \quad \text{„Ring}\checkmark\text{"}$$

Kugelschale aus Ringen aufbauen

Masse des Streifens $dM = M\cdot\frac{dA}{A}$ Gesamtmasse × Verh. der Flächen

$$= M\cdot\frac{2\pi R^2\sin\theta\,d\theta}{4\pi R^2} = \underbrace{\frac{1}{2}\,M\,\underbrace{\sin\theta\,d\theta}}$$

(*) verwenden $dg_R = -G \frac{\overbrace{dM}}{s^2}\cos\alpha = -\frac{GM\sin\theta\, d\theta}{2\,s^2}\cos\alpha$

Beitrag dg_R des Kugelschalenstreifens

Parameter s, α, θ $\rightarrow$ alles durch s ausdrücken
"$d\theta \rightarrow ds$"

kleines Dreieck: $R^2 = x^2 + R^2\sin^2\theta$

großes " : $s^2 = (r-x)^2 + R^2\sin^2\theta$

$= r^2 + x^2 - 2r\underline{x} + R^2\sin^2\theta$

$= r^2 + R^2 - 2r\,\underline{R\cos\theta}$

$\frac{d}{d\theta}$ bilden: $\frac{d(s^2)}{d\theta} = \frac{2s\,ds}{d\theta} = 2rR\sin\theta$ $\rightarrow$ $\underbrace{\sin\theta\, d\theta}_{\text{s. eins.}} = \frac{s\cdot ds}{rR}$

$\cos\alpha$ aus gr. Dreieck $\cos\alpha = \frac{s^2 + r^2 - R^2}{2sr}$

$\hookrightarrow$ $dg_r = -\frac{GM}{2s^2}\cdot\frac{s\,ds}{rR}\cdot\frac{s^2+r^2-R^2}{2sr} = -\frac{GM}{4r^2R}\left(1 + \frac{r^2-R^2}{s^2}\right)ds$

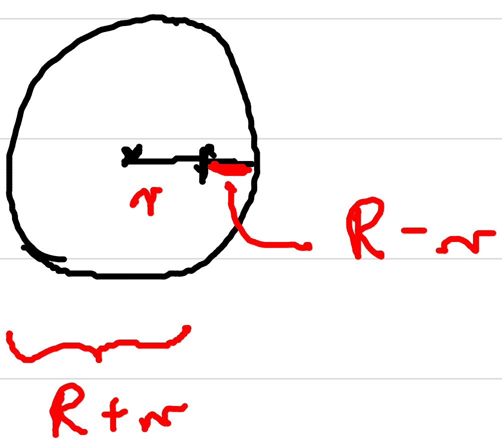
über s von $r-R$ $[\theta = 0°]$ bis $r+R$ $[\theta = 180°]$ integr.

$$g_r = -\frac{GM}{4r^2R}\int_{r-R}^{r+R}\left(1+\frac{r^2-R^2}{s^2}\right)ds$$ aufteilen u. integr.

$$= -\frac{GM}{4r^2R}\underbrace{\left[s - \frac{r^2-R^2}{s}\right]_{r-R}^{r+R}}_{4R} \quad \boxed{= -\frac{GM}{r^2}}$$

wie eine Punktmasse im Abstand r

jetzt Gravitationsfeld innerhalb der Kugelschale

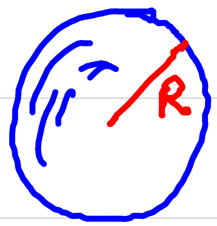


analoge Argum., Integr. von R − r bis R + r

$$g_R^{innen} = -\frac{GM}{4r^2R}\left[s - \frac{r^2-R^2}{s}\right]_{R-r}^{R+r} = 0.$$

Das Gravitationsfeld in einer Hohlkugel verschwindet.

Vollkugel

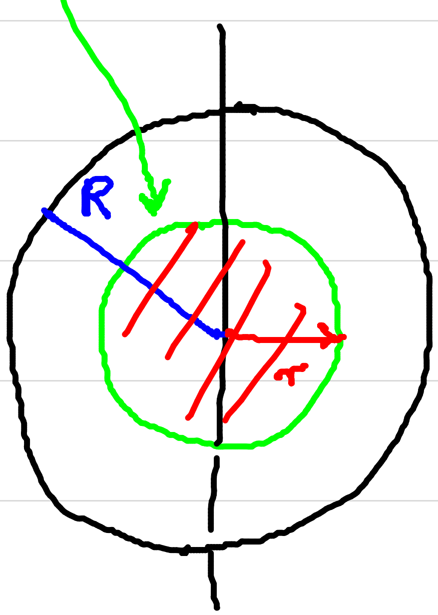


Dichte $\rho(r)$

└ Serie infinitesimaler Kugelschalen

Masse, die sich innerhalb eines Radius r befindet:

$$m'(r) = \int_0^r \rho(r)\,dV \xrightarrow[\rho(r)=\rho_0]{\text{Vereinf.}} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 = M\cdot\frac{r^3}{R^3}$$



$$g_r^{\text{innen}}(r) = -\frac{G\,m'(r)}{r^2} = -\frac{G M r^3}{r^2 R^3} = -\frac{GM}{R^3}\cdot r$$

$r < R$

aussen: $g_r^{\text{außen}}(r) = -\dfrac{GM}{r^2}$