Karlsruher Institut für Technologie

Klassische Physik 1 WS 2012/13

Johannes Blümer

KIT-Centrum Elementarteilchen- und Astroteilchenphysik KCETA

„harmonische" Wellen

lineares Kraftgesetz für die Rückstellkräfte
Beschreibung durch eine (1) Frequenz

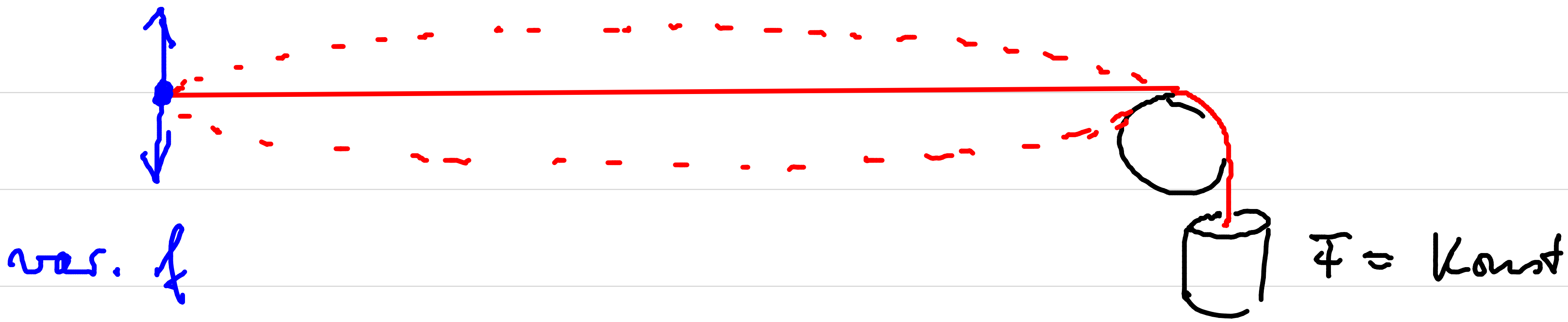
$$y(x,t) = y_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \omega t\right) = y_0 \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - f t\right)$$

$\underbrace{\omega/c}_{} = \frac{2\pi}{\lambda} = \underbrace{k}_{}$ „Wellenzahl" $\rightarrow$ symmetr. Notation in x, t:

$$y = y_0 \sin(kx - \omega t) \quad (*)$$

Wellengleichung: Dgl. für die Dynamik des Vorgangs
Wellenfunktion: Lösung der W.gl.

Phänomene: Reflexion, Beugung, Interferenz, Brechung
[Dispersion: $c = f\lambda$ hängt f, λ ab]
stehende Wellen



Wellengleichung [für schwingende Saite] folgt aus $F = m \cdot a$

→ Skizze!

An den Enden des Segments greifen Kräfte $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ an, nicht ganz kollinear

Bewegung des Segments in $\pm y$
betr. Vertikalkomponenten von $\vec{F}_1, \vec{F}_2$

$F_y = F \cdot \sin\theta_2 - F \sin\theta_1$, $F = |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ sonst globale horiz. Bewegung

$F_y = F(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \simeq F(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)$ für kleine Winkel

$\tan\theta_{1,2}$ = Steigung der Kurve an der Stelle $x_{1,2}$

, die die Saite zur Zeit t beschreibt

$\tan\theta_2 - \tan\theta_1$ = (kleine) Differenz in den $\underbrace{\text{Kurvensteigungen}}_{\text{1. Ableitung}}$

Steigung $S = \tan\theta = \dfrac{\partial y}{\partial x}$, nehme t = konst.

$\hookrightarrow$ damit $F_y = F\cdot(S_2 - S_1) = F\cdot\Delta S$ = Rückstellkraft auf das Saitenelement

Newton !: $= \Delta m \cdot a_y$

└ Beschleunigung in y-Richt

└ $\Delta m = \mu \cdot \Delta x$

$a_y \to a_y(x) = \ddot{y}\Big|_{x=\text{konst}}(t) = \dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$

Jm einsetzen u. part. Abl. verwenden

$$F \cdot \Delta S = \mu \, \Delta x \cdot \frac{\partial y^2}{\partial t^2} \longrightarrow \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\Delta x \to 0 : \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Also $\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \underbrace{\frac{\mu}{F}}_{\text{konst.}} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$ Wellengleichung, lin. part. Dgl 2. Ordn in x, t

Wellenfunktion dazu suchen!

└ oder „geratene" Lösung als richtig beweisen

vermute (*) ist WF, Zush. zwischen k, ω, μ, F ???

$$\underbrace{y = A \cdot \sin(kx - \omega t)}_{\text{WF}} \quad \text{ist Lösung von} \quad \underbrace{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}_{\text{Wgl.}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = k \cdot A \cdot \cos(kx - \omega t) \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 \underbrace{A \sin(kx - \omega t)}_{} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 \underbrace{A \sin(kx - \omega t)}_{\equiv y}$$

$$= -k^2 y \qquad = -\omega^2 y$$

in Dgl einsetzen: $\left(-\omega^2 y\right) = v^2 \left(-k^2 y\right)$

explizite Form von y "egal" (nicht ganz)

erfüllt, wenn $\boxed{\omega^2 = v^2 k^2, \quad v = \omega / k}$ Erinn. d.h. $v = c$

Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle

Also $v_{Saite} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$ mit Spannung $\sigma = F/A$

Dichte $\rho = m/V$

altern. Herleitung "Dynamik des Saitensegments"

resultierende radiale Kraft auf Segment $F_r = 2F \sin\frac{\theta}{2} = F\cdot\theta$

für kleine θ

$\Delta m = \mu \Delta s = \mu r \theta$; $\mu = m/L$

$\Delta m = \rho \cdot A \cdot \Delta s = \rho A r \theta$

Zentripetalbeschl. $= v^2/r$

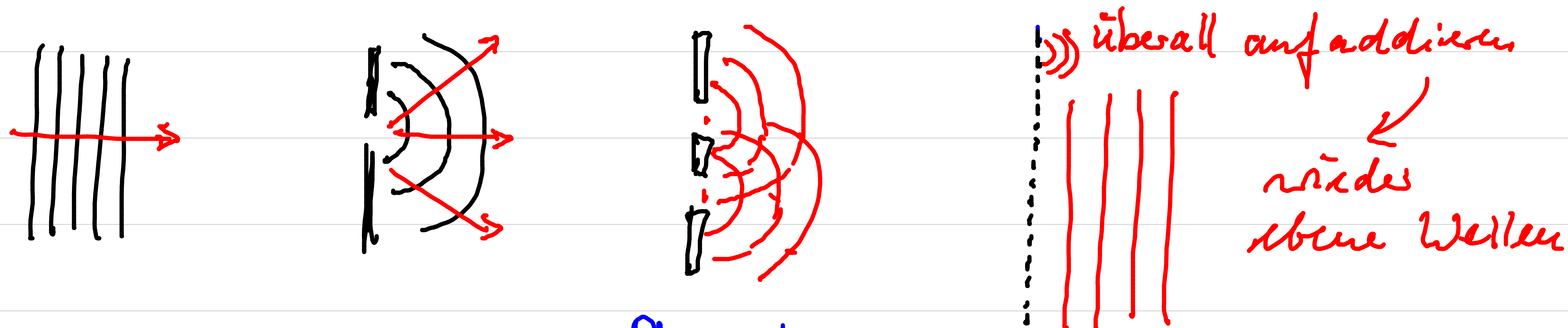
Kräftebalance $F\cdot\theta = \Delta m\, v^2/r = \rho A r \theta \cdot v^2/r$

$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$ wie zuvor

Versuche: Stehende Wellen am Gummiseil

Auslöschung / Addition von (linearen) Wasserwellen

↳ 2-dim. Wellenwanne

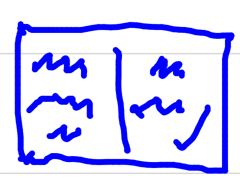


Phasen!

Huygenssches Prinzip

Addition von Schwingungsvorgängen

- Add. v. sin(...), cos(...)
- Add. Theoreme →



Superposition / Interferenz von Wellen

Betr. harmon. (lfd.) Welle $y_1 = A \cdot \sin(\underbrace{kx - \omega t}_{\text{Phase}})$

+ 2. Welle $y_2 = A \cdot \sin(kx - \omega t + \delta)$ Phasenverschiebung $\delta > 0$

Phasendifferenz der Wellen am best. Ort x als Funktion der Zeit:

$$(kx - \omega t_1) - (kx - \omega t_2 + \delta) = \omega(t_2 - t_1) - \delta$$

$$= \omega \Delta t - \delta$$

gleiche Phase: $\omega \Delta t - \delta \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \Delta t = \delta/\omega > 0$, $t_2 > t_1$

„2. Welle geht um δ/ω nach"

Phasendifferenz bei gleichen Zeiten:

$$(kx_1 - \omega t) - (kx_2 - \omega t + \delta) = k(x_1 - x_2) - \delta = k\,\Delta x - \delta$$

gleiche Phase : $k\,\Delta x - \delta \stackrel{!}{=} 0 \;\rightarrow\; \Delta x = \delta/k = \lambda \cdot \frac{\delta}{2\pi}$ „Gangunterschied"

$$x_2 = x_1 + \lambda \frac{\delta}{2\pi}$$

Überlagerung $y_1 + y_2$ ausführen und als Fkt. v. δ untersuchen

$$y_1 + y_2 = \underline{A} \cdot \sin(\underbrace{kx - \omega t}_{\alpha}) + \underline{A} \sin(\underbrace{kx - \omega t + \delta}_{\beta})$$

Vereinfachung

$$= A \cdot [\sin\alpha + \sin\beta]$$

$$= A \cdot 2 \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$ vgl. Theoreme

$$= \underbrace{2A \cdot \cos\frac{\delta}{2}}_{\text{neue Amplitude}} \cdot \underbrace{\sin\left(kx - \omega t + \frac{\delta}{2}\right)}_{\text{harmon. Anteil mit gleicher Wellenzahl, Freq.; neue Phase}}$$