

3] Gravitation

3.1. Gravitationsgesetz

Fundamentale Kräfte:

1. Gravitation
2. Elektromagnetische Kraft
3. Starke Kraft
4. Schwache Kraft

Historie:

~ 140 n. Chr.: Ptolemäus

- Geozentrisches System

1473 - 1543: Copernikus

- Heliozentrisches System

1546 - 1601: Brahe

- Präzise Astronomie

1571 - 1630: Kepler (Assistent von Brahe)

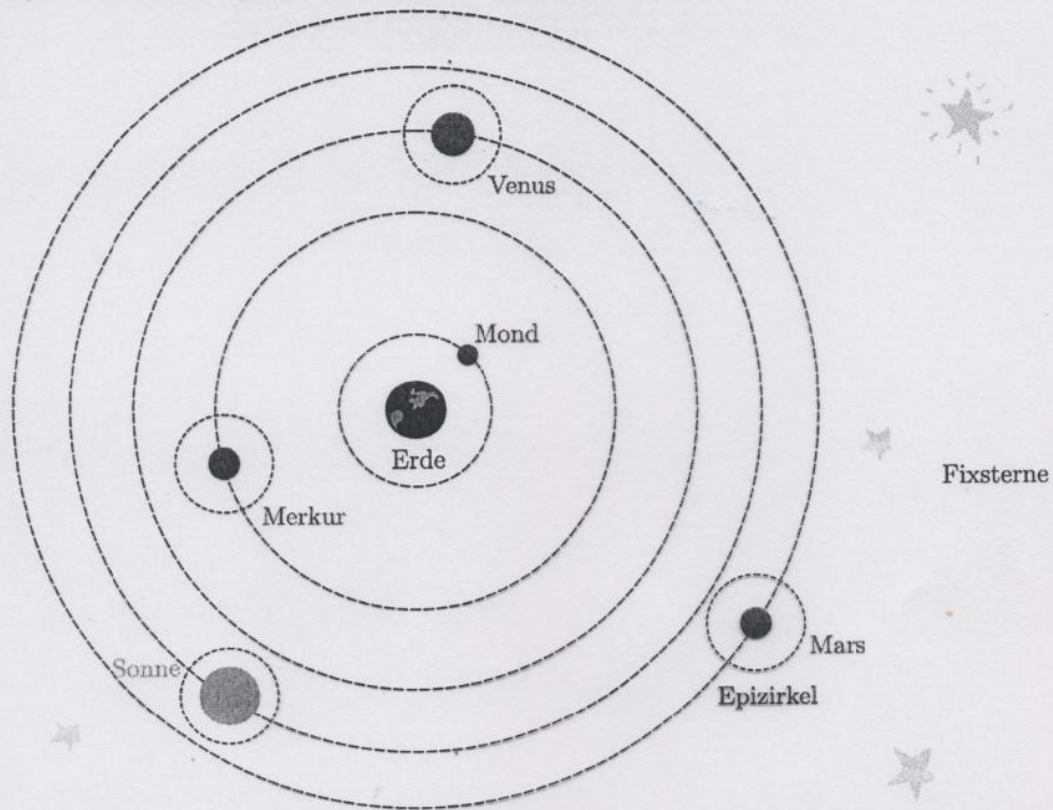
- Empirische Gesetze zur Planetenbewegung

3 Gravitation

3.1 Historisch : Der Weg zum Gravitationsgesetz

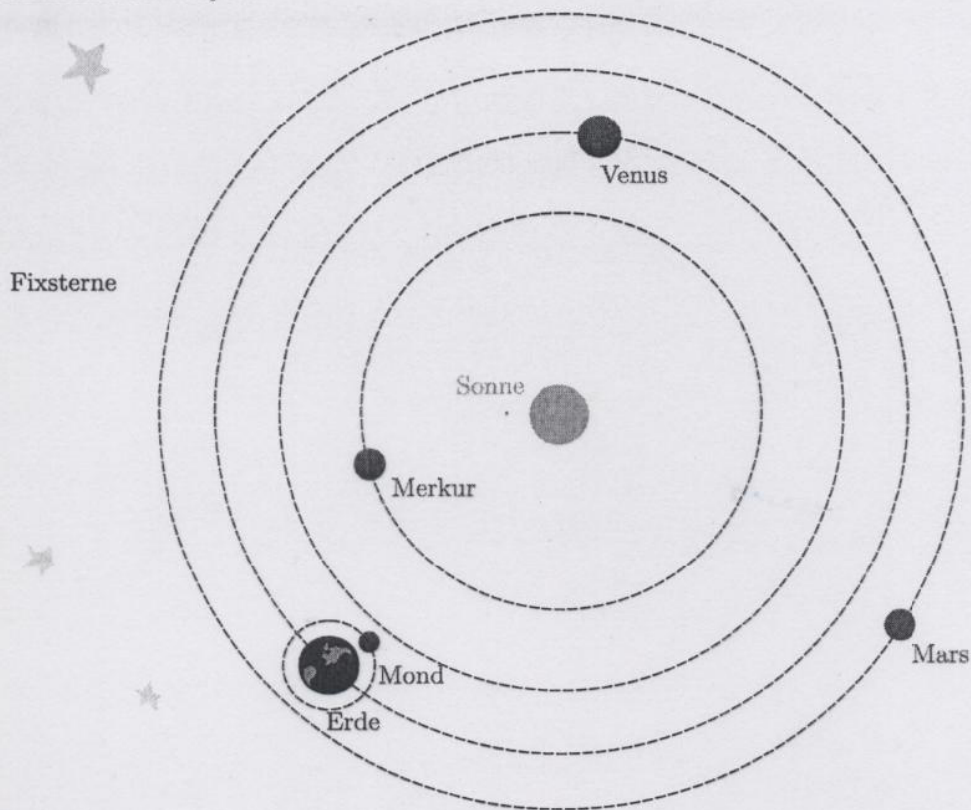
≈ 0 A.D. : Ptolemäus

Versuch, die Planetenbewegung zu verstehen : Geozentrisches System



1473-1543 : Copernikus

Heliozentrisches System :

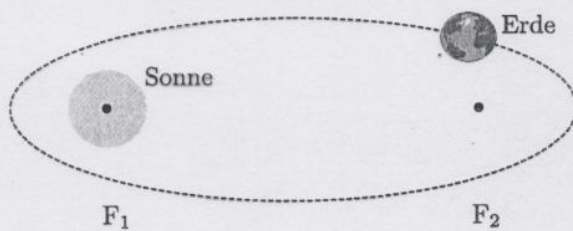


1571-1630 : Kepler (Assistent von Brahe, mit Teleskop)

Empirische Gesetze zur Planetenbewegung :

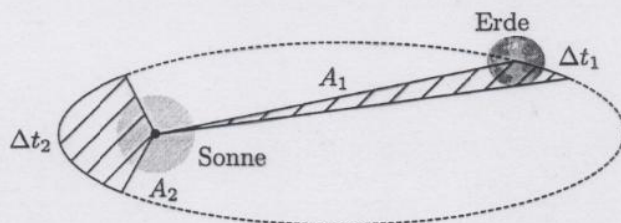
① Gesetz der Laufbahn (Orbit) :

Planetenbahnen sind Ellipsen mit der Sonne in einem der beiden Brennpunkte (Focusse).



② Flächengesetz :

Linie zwischen Sonne und Planet überstreicht in gleicher Zeit gleiche Fläche.



$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$$

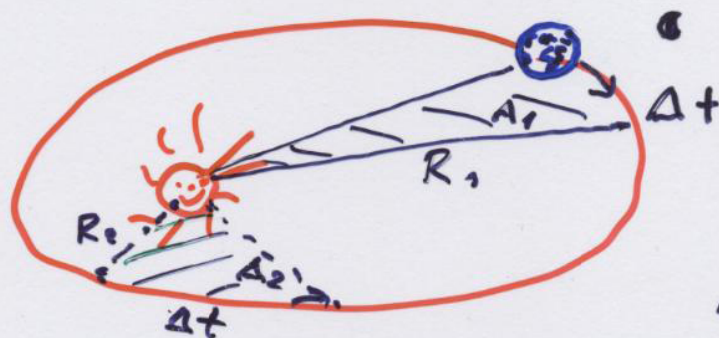
③ Periodengesetz :

$$T^2 = C \cdot \langle R \rangle^3$$

1571 - 1630 Kepler

1. Gesetz des Orbits

Alle Planeten bewegen sich auf Ellipsen
Sonne in einem Fokus



$$A_2 = A_1$$

2. Flächengesetz

Leitstrahl Planet - Sonne überstreicht
in Δt gleiche Flächen.

$$\frac{dA}{dt} = \text{const.}$$

3. Periodengesetz

Quadrat der Periode T eines Planeten
ist prop. zum Kubus des mittl. Abstands

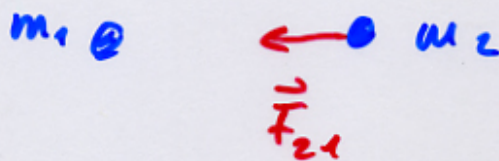
$$T^2 \sim \langle R \rangle^3$$

1642 - 1727

Newton

Gravitationsgesetz

$$\vec{F}_{21} = - G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_{21}$$



Kraft der Masse m_1 auf Masse m_2

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}$$

Diskussion

a) : $G = \text{const}$; $\frac{dG}{dt} = 0$

b) $F \propto m_1 \cdot m_2$

Definiere Einheitsmasse Δm

$$\Rightarrow m_1 = N \Delta m$$

$$m_2 = N \Delta m$$

$$\text{auch: } \Delta F = F_{\Delta m, \Delta m}$$

$$\Rightarrow F_N \cdot \Delta m, \Delta m = N \cdot F_{\Delta m, \Delta m};$$

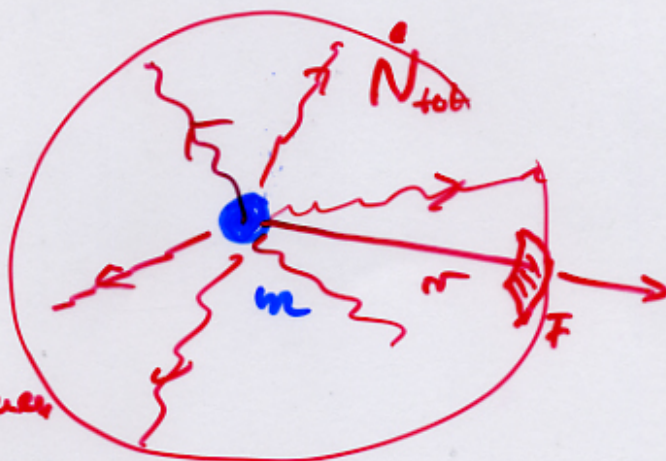
$$F_N \cdot \Delta m, M \cdot \Delta m = N \cdot M \cdot F_{\Delta m, \Delta m} \\ (= F_{m_1, m_2})$$

$$\sim m_1 \cdot m_2$$

Wenn das gilt, gilt auch das
Superpositionsgesetz

$$c) F \propto \frac{1}{r^2}$$

Kraft geschieht durch Austausch von
Bosonen (Gravitonen)



Wenn pro Zeit-
einheit N Gravitonen
ausgesendet werden:

$$\text{Gesamtrate } \dot{N}_{\text{tot}} = \frac{N_{\text{tot}}}{s}$$

Im Abstand r ist Rate / Fläche

$$\dot{N}(r) = \frac{N_{\text{tot}}}{s} \cdot \frac{1 \text{ m}^2}{4\pi r^2} \quad \sim \frac{1}{r^2}$$

Kugeloberfläche

3.3 . Gravitational potential

$$A = \Delta E_{\text{pot}} = - \int_{R_E}^{R_E + h} \vec{F} d\vec{r}$$

$$= \int_{R_E}^{R_E + h} \frac{G m_E m}{r^2} dr$$

$$= G m_E m \left[\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_E + h} \right]$$

$$= \frac{G m_E m}{R_E} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{h}{R_E}} \right]$$

$$\approx 1 - \frac{h}{R_E}$$

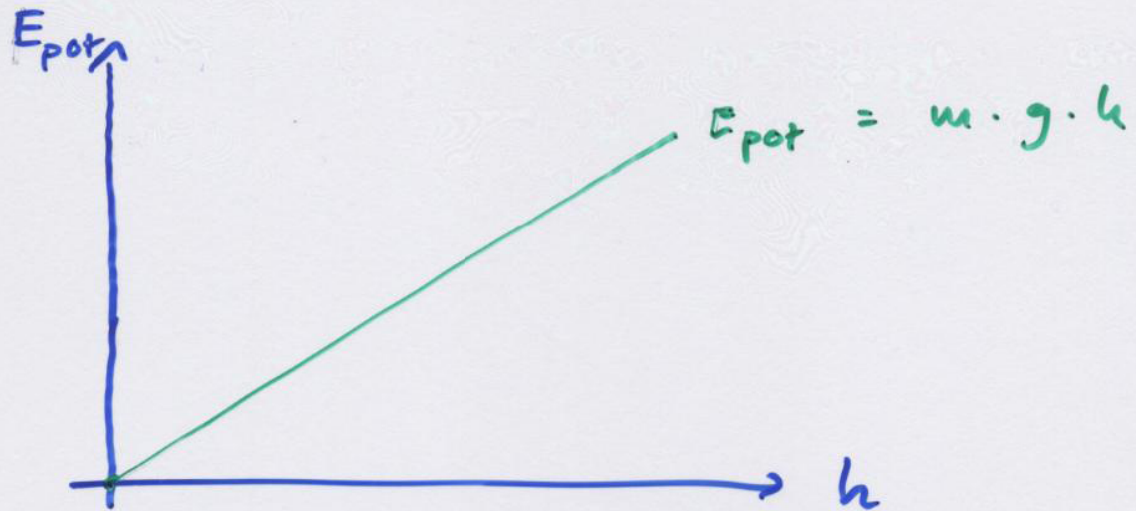
$$\approx \frac{G m_E m}{R_E^2} \cdot h = m \cdot g \cdot h$$

$$A_{\infty} = - \int_{R_E}^{\infty} \vec{F} d\vec{r} = \frac{G \cdot m_E \cdot m}{R_E}$$

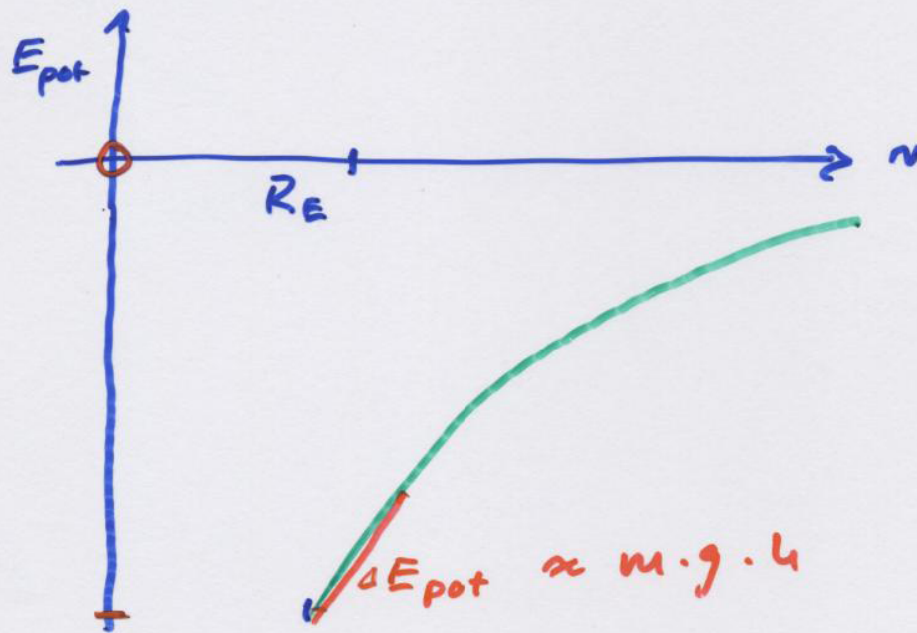
$$= E_{\text{pot}}(\infty) - E_{\text{pot}}(R_E)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{\text{pot}}(r) = - \frac{G m_E \cdot m}{r}} \quad \text{für } r > R_E$$

Bisher:

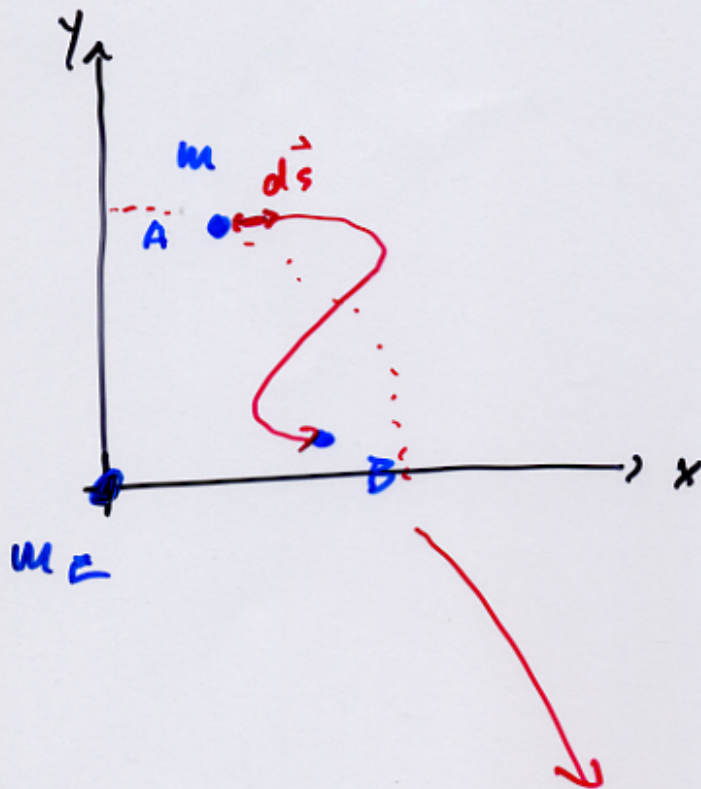


Mit Newton:



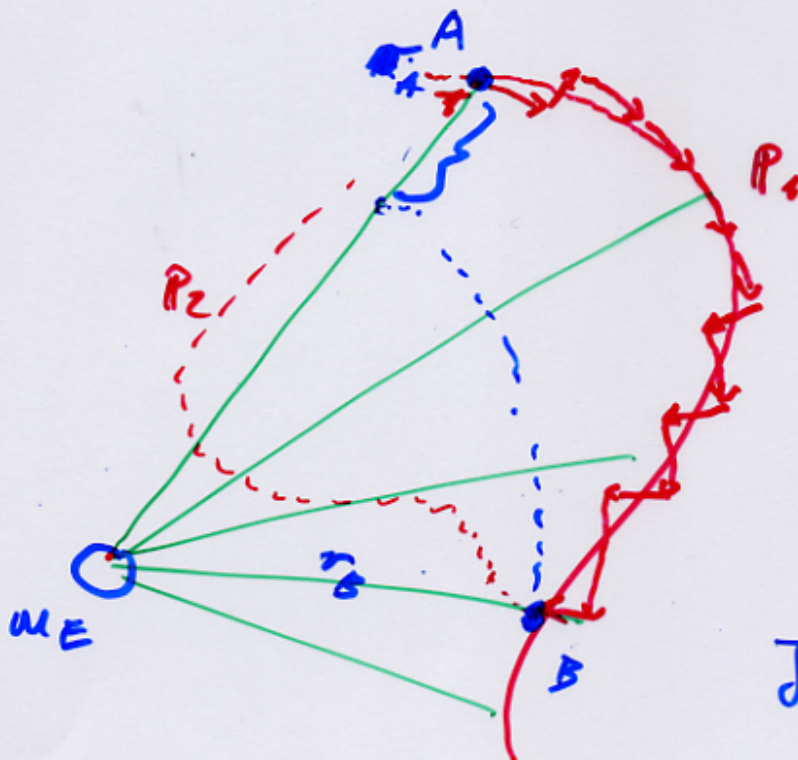
$$E_{\text{pot}}(R_E) \approx - \frac{G m_E m}{R_E}$$

Ist Gravitation konservative Kraft?



$$\Delta A = \vec{F} d\vec{s}$$

$$\vec{F} \sim \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$



Ja, da $A_{A \rightarrow B} = -A_{B \rightarrow A}$

Anwendungen

a) Fluchtgeschwindigkeit von Erde

$$r = \infty : \quad E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = 0$$
$$= 0 \quad = 0$$

$$r = R_E : \quad E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} m v_F^2 - \frac{G m_E m}{R_E} = 0$$

$$\Rightarrow v_F = \sqrt{2 \frac{G m_E}{R_E}} \quad \text{Fluchtgeschwindigkeit}$$

$$= 11,2 \text{ km/s}$$