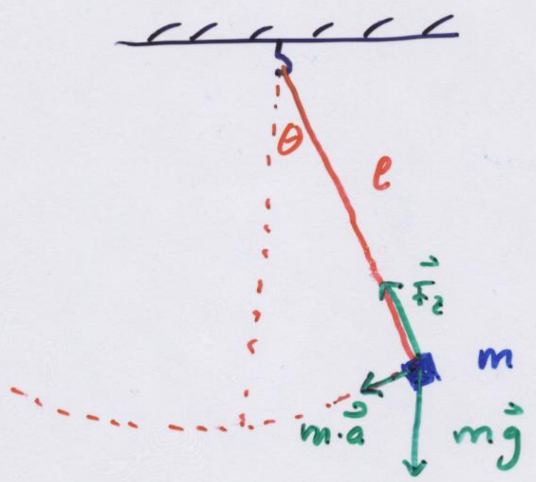
6.1.2 Pendel

a) Mathematisches Pendel



$$\vec{F} = \vec{F}_z + m\vec{g}$$
$$= m \cdot \vec{a}$$

$$-mg \sin\theta = m \cdot a$$
$$= m \cdot l \cdot \alpha$$
$$= m \cdot l \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Analytisch nicht lösbar

Näherung für kleine θ:

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \approx \theta$$

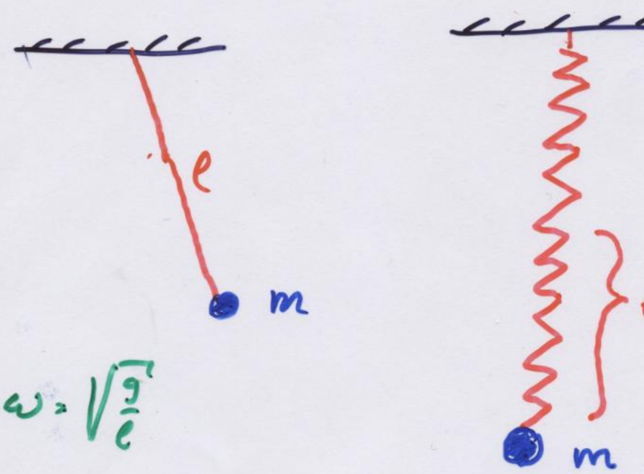
$$\Rightarrow -mg\,\theta = ml\,\frac{d^2\theta}{dt^2} \;;\; \theta(t) = \theta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$$

Pendelschwingung : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Bs: $l = 1\,m$, $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$

$\Rightarrow \underline{T = 2\,s}$

Vergleich Pendel- und Federschwingung:



$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m}}$

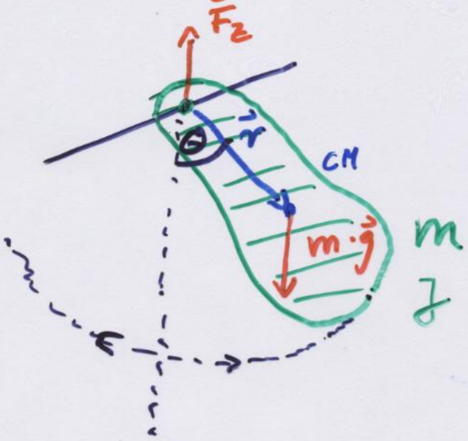
Für $l' = l$: $\omega' = \omega$

Dehnung der Feder: $F = m \cdot g$
$= k \cdot l'$

$\Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{l'}$

$\Rightarrow \omega' = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l'}}$

b) Physikalisches Pendel



Kräfte:

$$\vec{F}_Z + m\vec{g} = 0$$

Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{r} \times m\vec{g}$$
$$= J \cdot \vec{\alpha}$$

In Komponenten:

$$M = -r \cdot mg \underbrace{\sin\theta}_{\approx\theta} = J\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

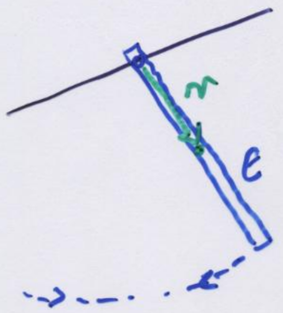
$$\theta(t) = \theta_0 \cos\sqrt{\frac{rmg}{J}}\,t$$

Beispiele: a) Masse konzentriert am CM:

$$J = m r^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr}{mr^2}} = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

b) Homogener Stab

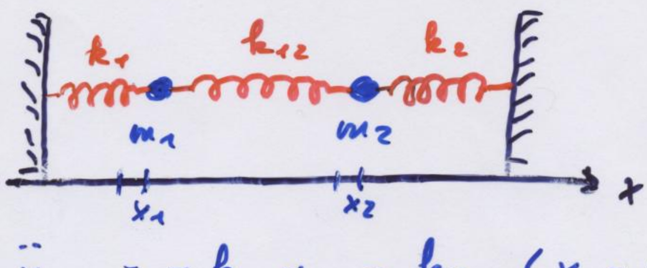


$$J = \frac{1}{3} m l^2$$
$$= \frac{4}{3} m r^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{4} \frac{g}{r}} \quad \left(= \sqrt{\frac{3}{2} \frac{g}{l}} \right)$$

6.1.3 Gekoppelte Schwingungen

1. Einfachster Fall: Gekoppeltes Federpendel



Von oben gesehen

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_{12} (x_1 - x_2)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k_{12} (x_2 - x_1)$$

Spezialfall: $m_1 = m_2 = m$

$k_1 = k_2 = k$

$$\Rightarrow m\cdot(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2)$$

$$m\cdot(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -k(x_1 - x_2) - 2k_{12}(x_1 - x_2)$$

Ansatz: $x_M := \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x_D := \frac{1}{2}(x_1 - x_2) = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}}$$

Spezialfälle:

a) Massen m_1 und m_2 $(= m)$ schwingen in Phase $(\phi_1 = \phi_2 = \phi)$

$$x_M(t) = x_1(t) = x_2(t) = A\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \phi\right)$$

$$x_D(t) = 0$$

b) Massen schwingen entgegengesetzt:

$$x_M(t) = 0$$

$$x_D(t) = x_1(t) = -x_2(t)$$

$$= A \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}}\, t + \phi\right)$$

c) $A_1 = A_2 = A$:

$$x_1(t) = \left(x_M(t) + x_D(t)\right) \cdot$$

$$= A\left(\cos(\omega_1 t + \phi_1) + \cos(\omega_2 t + \phi_2)\right)$$

$$= 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) *$$

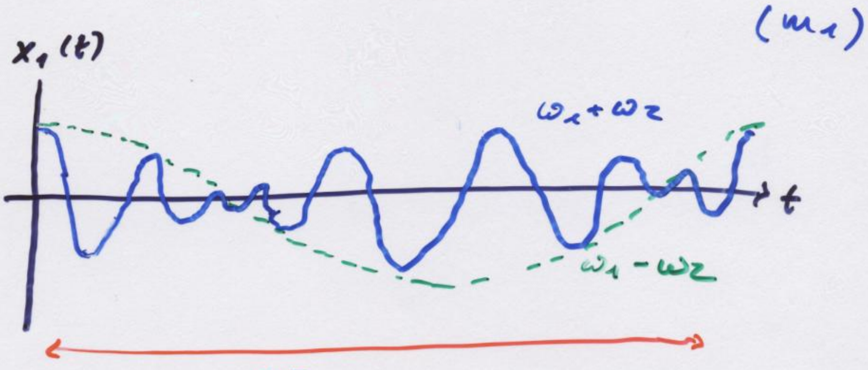
$$\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$$

$$x_2(t) = \left(x_M(t) - x_D(t)\right)$$

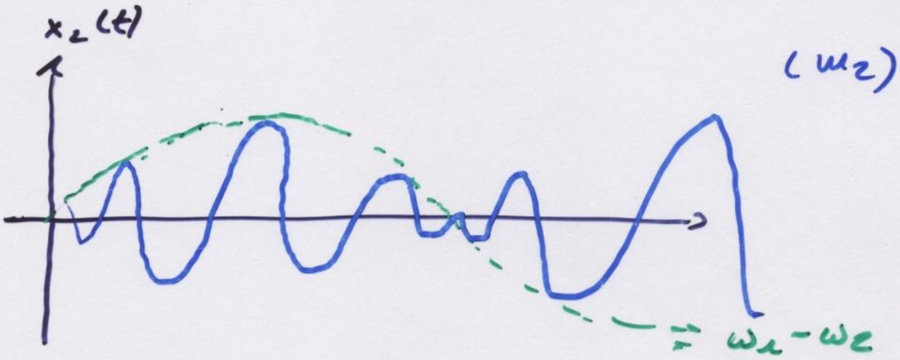
$$= A\left(\cos(\omega_1 t + \phi_1) - \cos(\omega_2 t + \phi_2)\right)$$

$$= -2A \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) *$$

$$\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$$



$$T = \frac{4\pi}{\omega_2-\omega_1}$$



Nach $\frac{T}{4}$ wird Schwingungsenergie von einer auf die andere Oszillation übertragen.

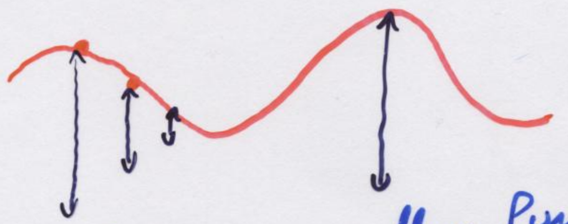
6.2 Wellen

Wellen sind Erscheinungen, welche gekoppelte oszillierende Systeme erzeugen.

Kategorien :

A

- Transversale Wellen



vertikalbewegung aller Punkte längs der Welle

- Longitudinale Wellen

Horizontale Bewegung

• 1d Wellen

z.B. Feder

Saite

• 2d Wellen

z.B. Wasser

z.B Vibration einer
Platte

• 3d Wellen z.B. Schall
EM Wellen etc