6.2.8 Überlagerung von Wellen

1] Allgemeines

Superpositionsprinzip:

Wenn $z_1(x,t)$ und $z_2(x,t)$ Wellenfunktionen sind, dann auch

$\pm z_1(x,t) \pm z_2(x,t)$, $a \cdot z_1(x,t)$, $b \cdot z_2(x,t)$

Grund: Wellengleichungen linear in z

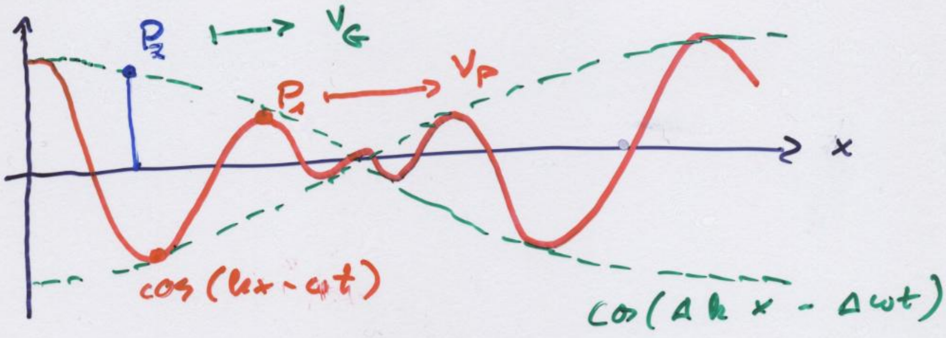
Beispiel: 2 laufende harmon. Wellen

$$z_1(x,t) = z_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t)$$
$$z_2(x,t) = z_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$z_1 + z_2 \equiv z(x,t) = 2 \cdot z_0 \cos(kx - \omega t) \cdot \cos(\Delta k x - \Delta\omega t)$$

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \qquad \Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2} \qquad \Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2}$$



v_P Phasengeschwindigkeit: $kx - \omega t = \text{const}$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v_P}$$

v_G Gruppengeschwindigkeit: $\Delta k x - \Delta \omega t = \text{const}$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = v_G}$$

Falls Welle in Medium, kann Frequenz von Wellenlänge abhängen:

$\omega = \omega(k)$ Dispersionsrelation

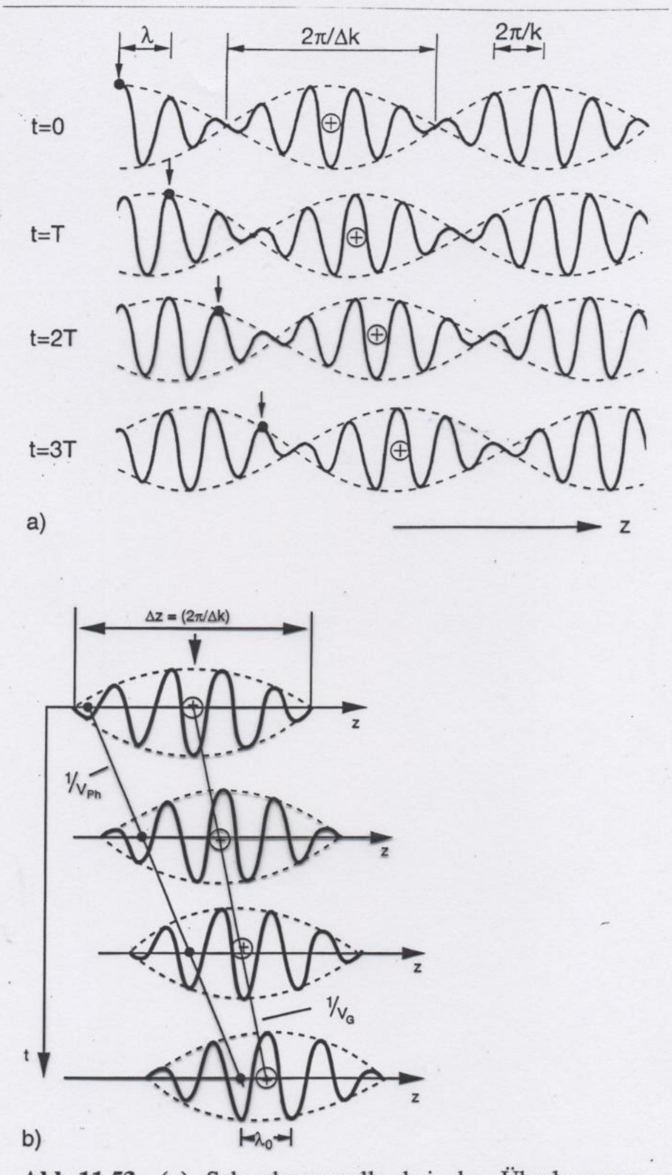


Abb. 11.53. (**a**) Schwebungswelle bei der Überlagerung zweier monochromatischer Wellen. Der *schwarze Punkt mit dem schwarzen Pfeil* gibt den Ort gleicher Phase beim Fortschreiten der Welle an, das Zeichen ⊕ das Maximum der Einhüllkurve. (**b**) Bewegung des Maximums der Einhüllenden eines Wellenpaketes mit der Gruppengeschwindigkeit v_G im Vergleich zur Phasengeschwindigkeit v_{Ph}

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\,(v_p \cdot k)$$

$$= v_p + k \cdot \frac{dv_p}{dk}$$

Mit $k = \frac{2\pi}{\lambda}$: $\frac{dk}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda^2}$

$$\underline{v_g = v_p - \lambda \cdot \frac{dv_p}{d\lambda}}$$

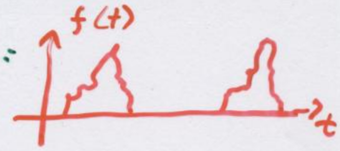
Beispiel: Wasserwellen, Lichtwellen

Kommentar: falls $\omega(k) = \omega = const$

$v_g = v_p$

2] Pulsformen

Jede periodisch wiederkehrende Funktion kann durch Superposition von harmon. Wellen beschrieben werden:



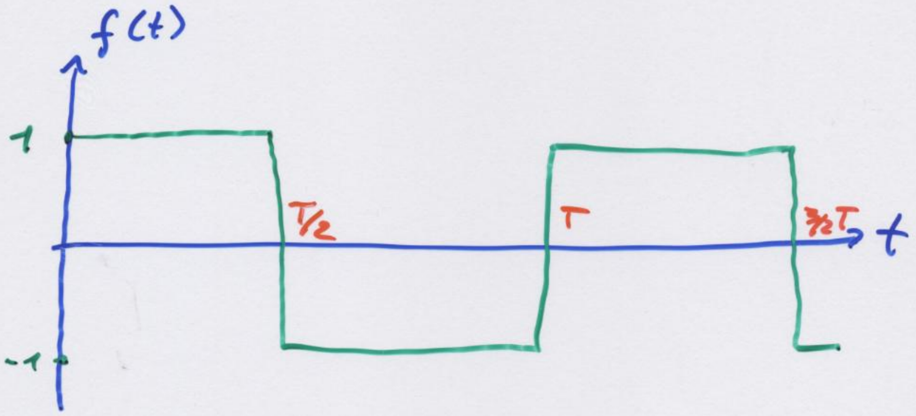
$$f(t) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos(n \cdot \omega t) + \sum_1^{\infty} b_n \sin(n \cdot \omega t)$$

Bestimmung der Komponenten:

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cos(n \omega t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n \omega t)\, dt$$

Beispiel: Rechteckfunktion



$f(t) = +1$ für $t = 0 \dots \frac{T}{2}$

$\quad\quad 0$ für $t = \frac{T}{2} \dots$

$\quad\ -1$ für $t = \frac{T}{2} \dots T$

$\quad\ +1$

$\quad\ \vdots$

i) $a_n = \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} \cos(n\omega t)\,dt - \int_{T/2}^{T} \cos(n\omega t)\,dt\right)$

mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

$$a_n = \frac{2}{T}\,\frac{1}{n\omega}\left(\sin(n\omega t)\Big]_0^{T/2} - \sin(\;)\Big]_{T/2}^{T}\right)$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(\sin n\pi - \sin 0 + \sin n\cdot 2\pi - \sin n\cdot\pi\right)$$

$= 0$ für alle n

ii) $b_n = \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} \sin(n\omega t)\,dt - \int_{T/2}^{T} \sin(n\omega t)\,dt\right)$

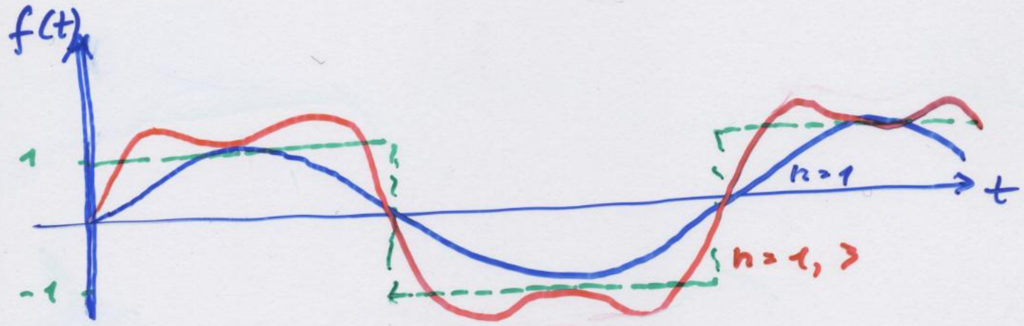
$$= \frac{2}{n\cdot\pi}\left(1 - \cos n\pi\right)$$

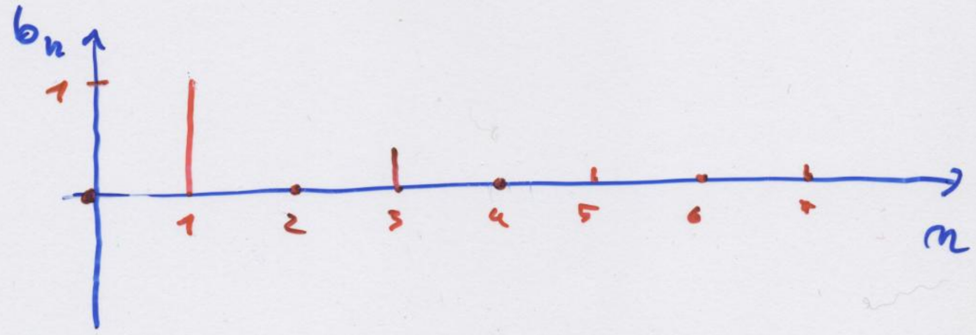
$b_n = 0$ für n gerade

$\frac{4}{n\cdot\pi}$ für n ungerade

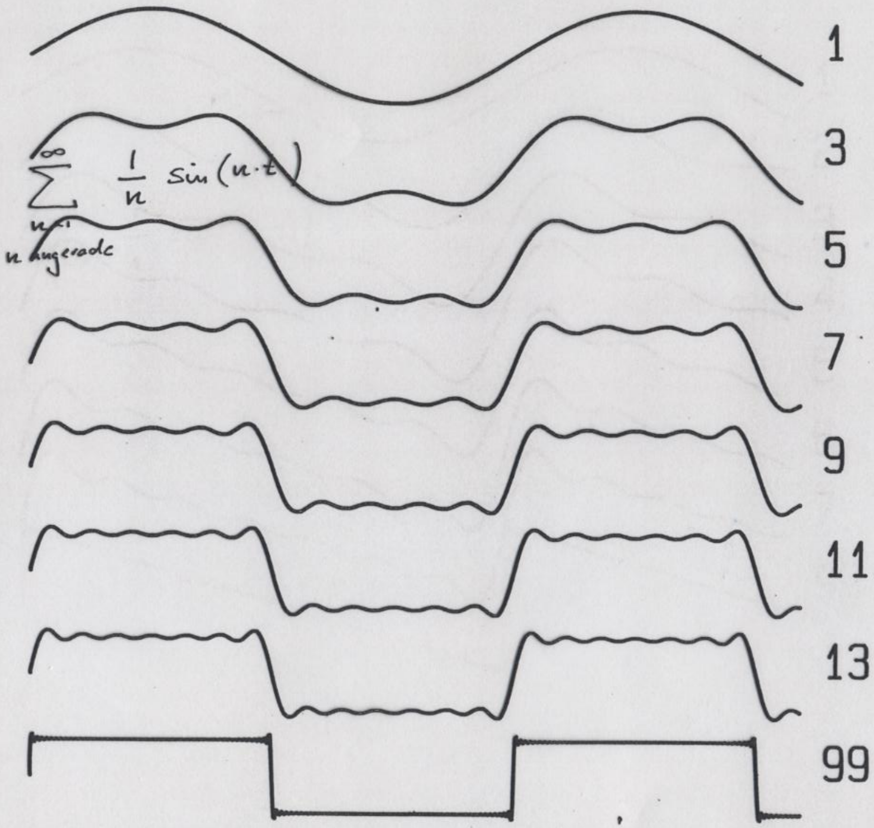
$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \dots\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin n\omega t \quad \text{(n ongerade)}$$





$$f(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n \cdot t)$$



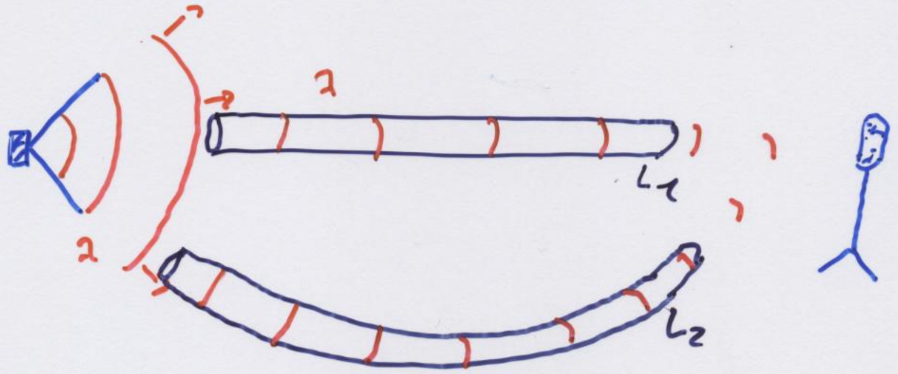
$\sin \omega t$

$\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega t$

3] Interferenz von Wellen in 2, 3 Dimensionen

Illustration

a)

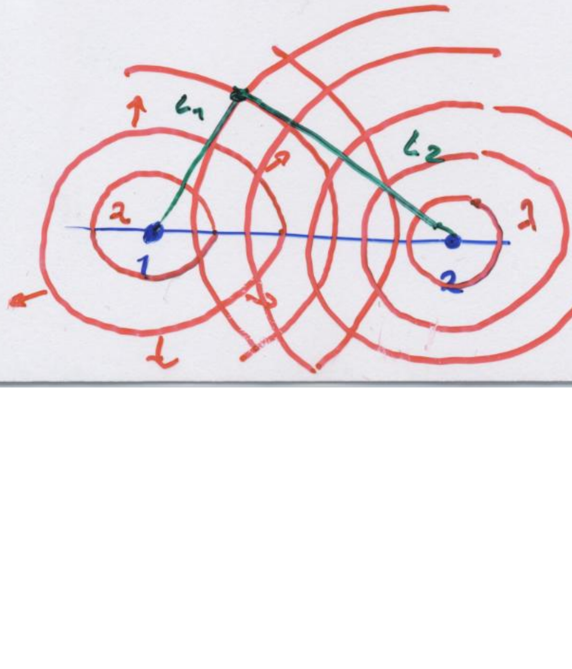


Für $L_1 = L_2$: Amplituden addieren sich

$= L_2 \pm m \cdot \lambda$

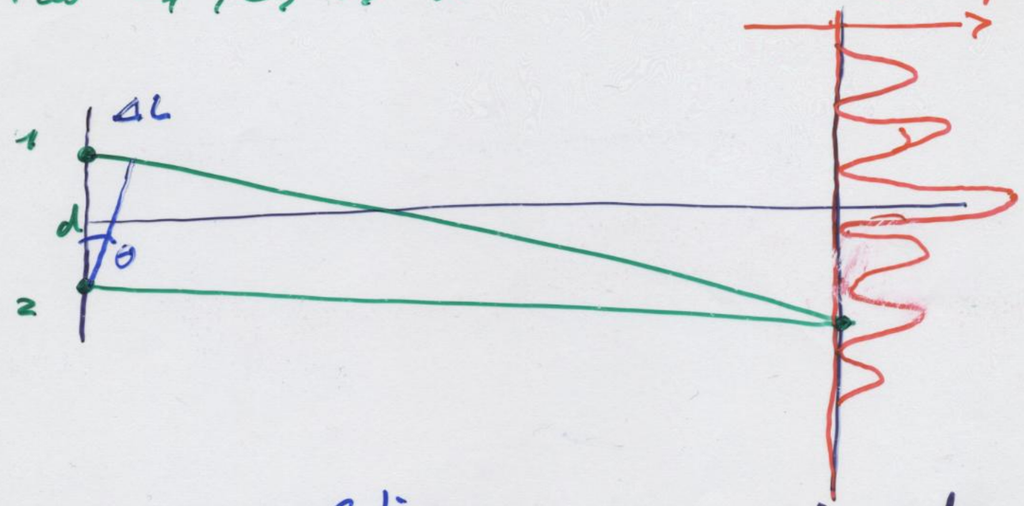
Für $L_1 = L_2 \pm \frac{2n+1}{2}\lambda$ Amplituden löschen sich aus.

b)



Für $\Delta L = \pm n\lambda$: Amplituden addieren sich.

Für $L_1, L_2 \gg d$



Schirm oder Empfänger

Maxima am Schirm

wenn $\Delta L = |L_1 - L_2|$

$= n\lambda$

$= d \cdot \sin\theta$.

$\Rightarrow$ für $\sin\theta = \dfrac{n \cdot \lambda}{d}$

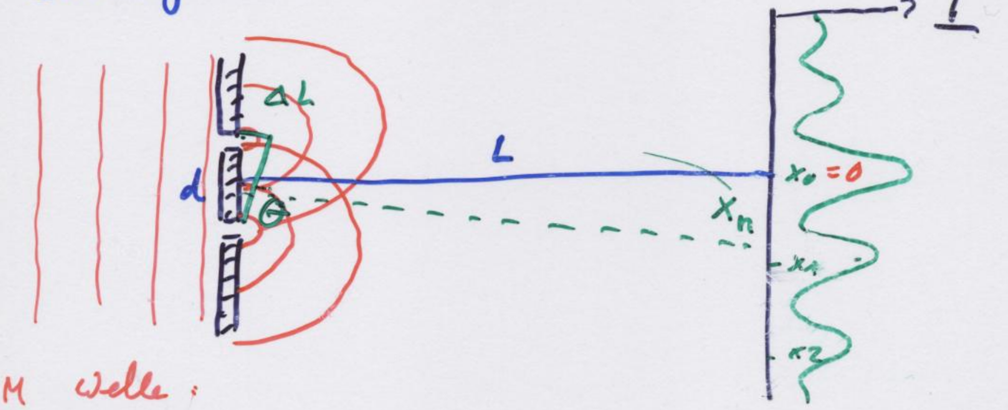
Addition der Amplituden

Anwendung: Bestimmung von λ

6.3 Licht und Materie – Korpuskel und Welle

1] Licht als EM Welle

Wellennatur des Lichtes gezeigt durch Interferenz:



EM Welle:
Monochromatisch

Interferenzmaxima für $\pm \sin \theta_n = \frac{n \cdot \lambda}{d}$; $n = 0, 1, 2 \dots$

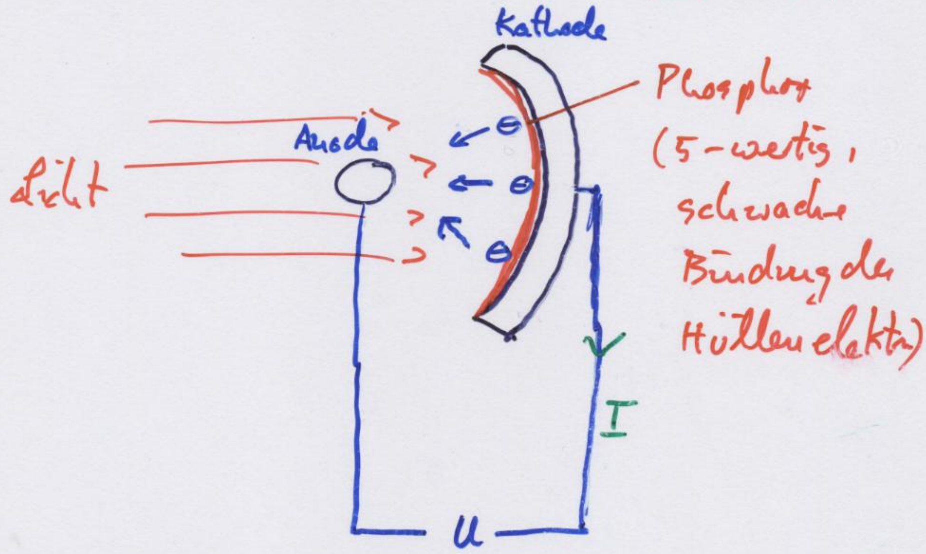
" minima $\pm \sin \theta_n = \frac{(2n+1)\lambda}{2d}$

Bestimmung der Wellenlänge:

$$\lambda \approx \frac{x_n \cdot d}{L \cdot n}$$

2] Licht als Korpuskel (Quantum)

Beobachtung durch Photoeffekt
(H. Hertz 1887, später Hallwachs, Lenard)

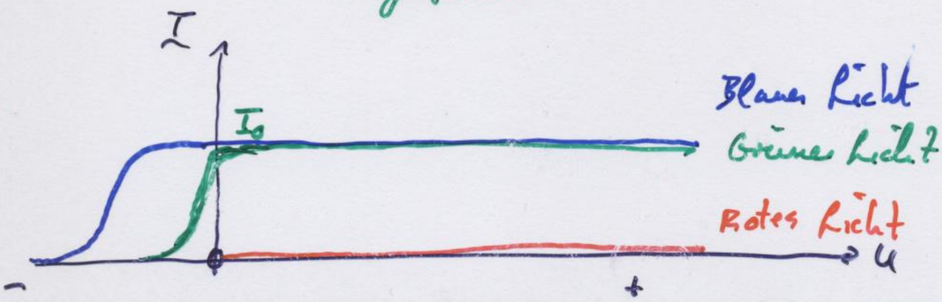


Beobachtung:

a) Strom I durch freigesetzte e^-

$I \propto$ Int. des Lichtes

b) Es fließt auch Strom, wenn Spannung umgekehrt



Schlussfolgerung:

Je kleiner Wellenlänge, desto größer Energie der freigesetzten Elektronen

=> Licht überträgt Energie, Impuls

Planck 1900, Einstein 1905

$$E_{ph} \propto \nu$$
$$\propto \frac{1}{\lambda}$$
$$= h \cdot \nu$$
$$= \hbar\,\omega$$

h Planck'sches Wirkungsquantum
$6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Js

Energie pro Photon

Konsequenz: Photonen haben „Masse"

$$m = \frac{h \cdot \nu}{c^2} \quad (E = mc^2)$$

Bem.: $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$