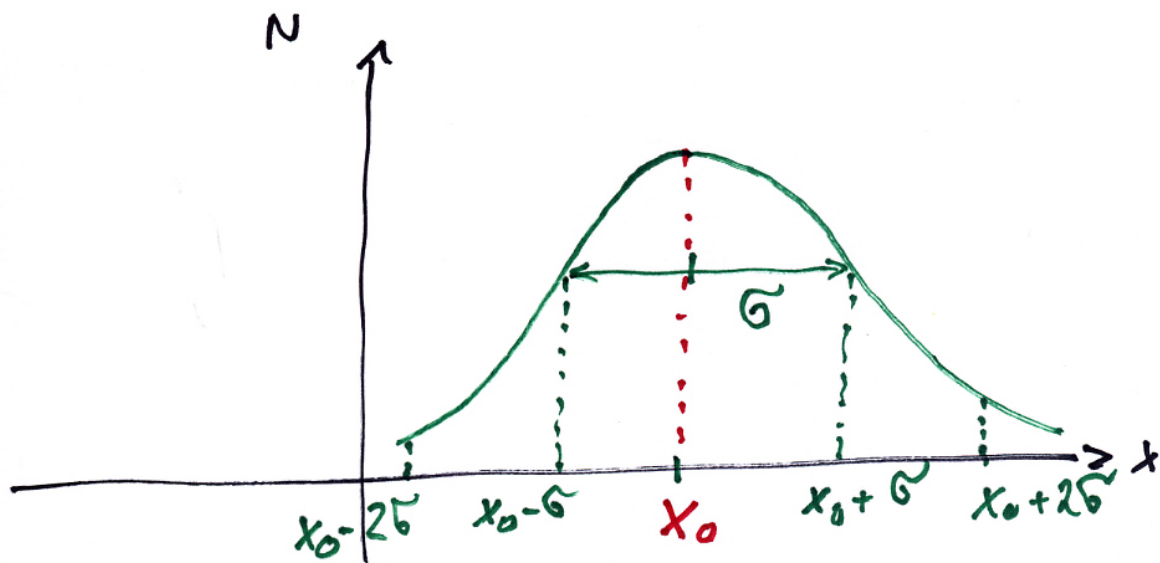


c) Zentraler Grenzwertsatz

Häufigkeit von Messergebnissen bei sehr großer Zahl von Messungen ist eine Gaußverteilung

$$N(x, x_0, \sigma_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$



Zur Intervall

$x_0 \pm \sigma$	:	68,3 %
$x_0 \pm 2\sigma$	:	95,4 %
$x_0 \pm 3\sigma$	:	99,7 %

1.3 Mathematischer Ein Schub

A] Partielle Ableitung

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Betrachte alle anderen Variablen als konstant

$$\text{Bs: } v(x, t) = \frac{x}{t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{t} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{x}{t^2}$$

B] Kettenregel

$$f = f(g(x)) : \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial g} \cdot \frac{dg}{dx}$$

c] Fehlerfortpflanzung

Meßgröße von mehreren Variablen abhängig :

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial G}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma_{x_i}^2}$$

$$G = G(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Bs: Bestimme v , miss x und t

$$v = \frac{x}{t}$$

$$\sigma_v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \cdot \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \cdot \sigma_t^2}$$

$$\text{Für } x = 100 \text{ m, } \sigma_x = 10 \text{ cm}$$

$$t = 15 \text{ s, } \sigma_t = 0,4 \text{ s}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sigma_v &= \sqrt{\frac{1}{t^2} \sigma_x^2 + \frac{x^2}{t^4} \cdot \sigma_t^2} \\ &= 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

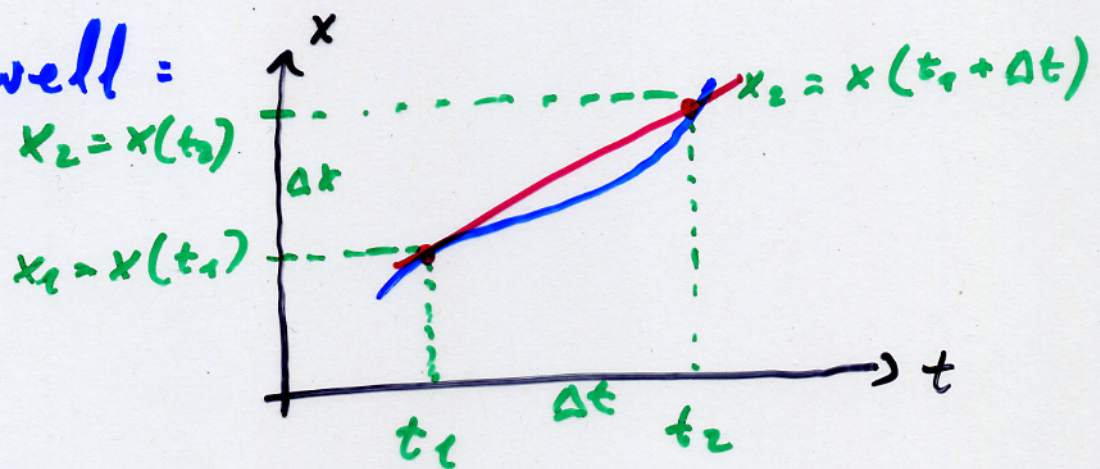
$$\Rightarrow v = 6,6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \pm 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2. Klassische Mechanik

2.1. Mechanik von Massepunkten

2.1.1. Bewegung in 1D

a] Generell:



• Geschwindigkeit: $\left(\frac{m}{s}\right)$

$$\langle v \rangle = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

umgekehrt

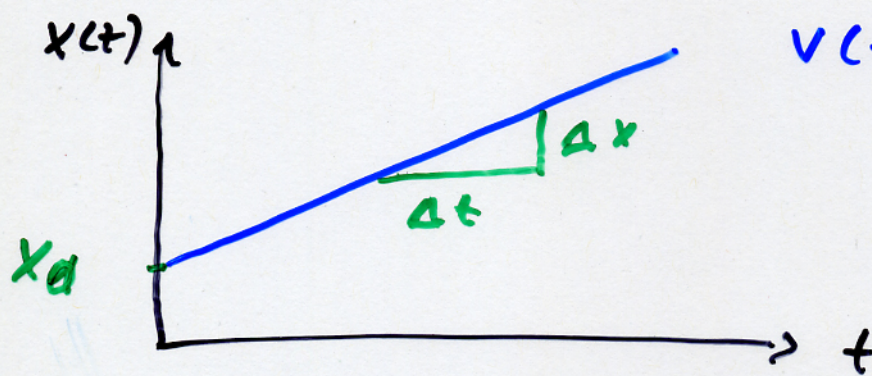
$$x_2 = x_1 + \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

• Beschleunigung $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$

$$\langle a \rangle = \frac{-v(t) + v(t + \Delta t)}{\Delta t}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

b] Spezialfall: $a(t) = 0$



$$v(t) = v_0 = \text{const.}$$

$$a(t) = 0$$

$$v(t) = v_0$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t$$

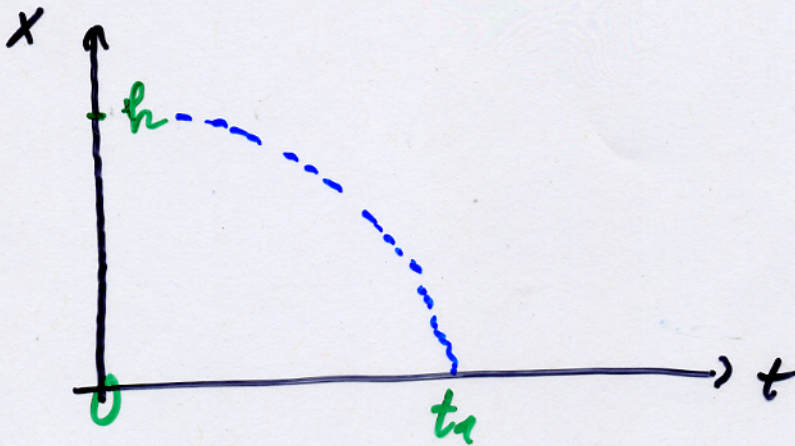
c] Spezialfall: konst. Beschleunigung

$$a(t) = a_0 = \text{const.}$$

$$v(t) = a_0 t + v_0$$

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

Bs: Fallender Stein



$$a(t) = -g$$

$$v(t) = -g \cdot t \quad (v_0 = 0)$$

$$x(t) = -\frac{g}{2} t^2 + h$$

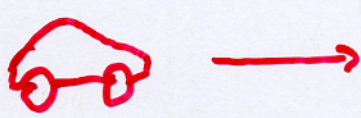
• Fallzeit:

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = -\frac{g}{2} t^2 + h \\ x(t_1) = 0 \end{array} \right\} t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

• Bestimmung von g :

$$\text{Messe } t_1, h \quad \Rightarrow \quad g = \frac{2h}{t_1^2}$$

- Zahlenbeispiel : Unfall in der Stadt



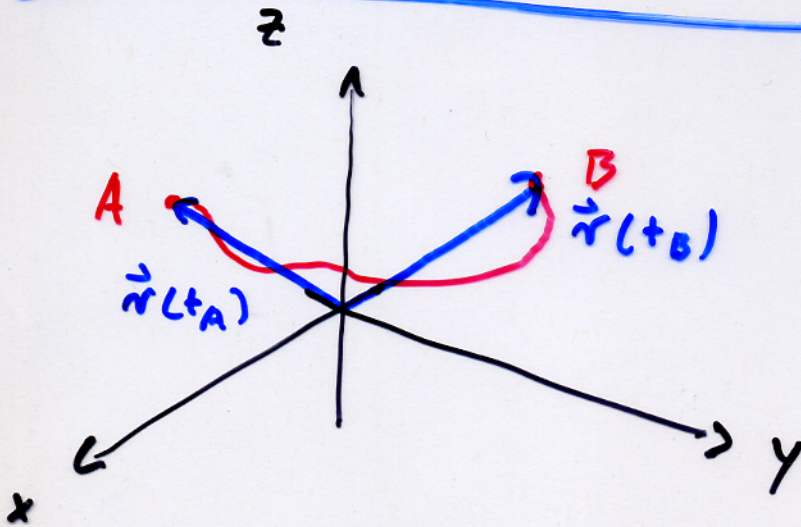
$$v = 50 \text{ km/std}$$

$$= 13,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$\hat{=}$ nach Fall aus Höhe $h = 9,9 \text{ m}$

$$\left(\text{aus } t = \frac{v}{g} \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} \right)$$

2.1.2 2- und 3-D Bewegung

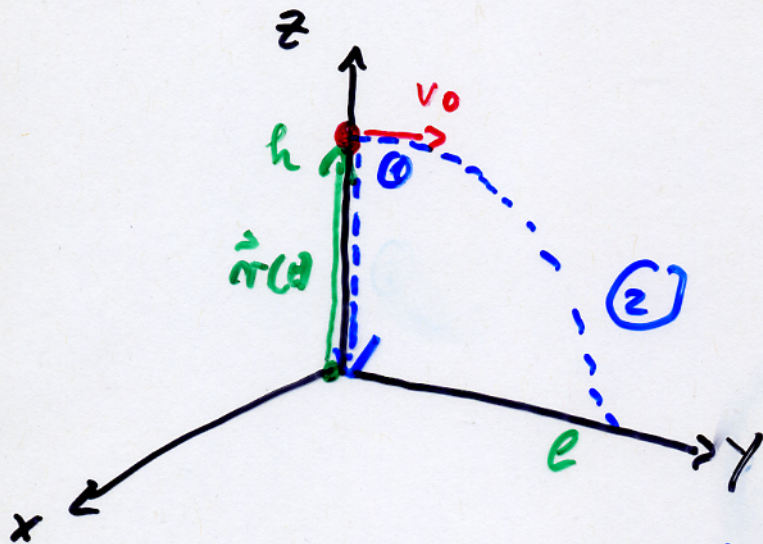


$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \equiv x(t) \cdot \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y + z(t) \vec{e}_z$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Bs: Fall mit und ohne horizontale Bewegung



①: Kugel fällt senkrecht

$$\vec{r}(t) = -\frac{g}{2}t^2 \vec{e}_z + h \cdot \vec{e}_z$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h - \frac{g}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

Fallzeit: $\vec{r}(t_f) \stackrel{!}{=} \vec{0}$

$$\Rightarrow z(t_f) = h - \frac{g}{2}t^2 = 0$$

$$\Rightarrow t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

② Kugel hat horizontale Geschw.,
fällt:

$$\vec{r}(t) = -\frac{g}{2} t^2 \vec{e}_z + h \cdot \vec{e}_z + v_0 t \vec{e}_y$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 t \\ -\frac{g}{2} t^2 + h \end{pmatrix}$$

Fallzeit: $\vec{r}(t_f) \stackrel{!}{=} \ell \cdot \vec{e}_y$

z-Komponente $z(t_f) = -\frac{g}{2} t_f^2 + h$

$$\Rightarrow t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Entfernung in y-Richtung beim Auftreffen:

y-Komponente $y(t_f) = \ell$

$$= v_0 \cdot t_f$$

$$= \ell = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$