

2.2.2. Das Federpendel

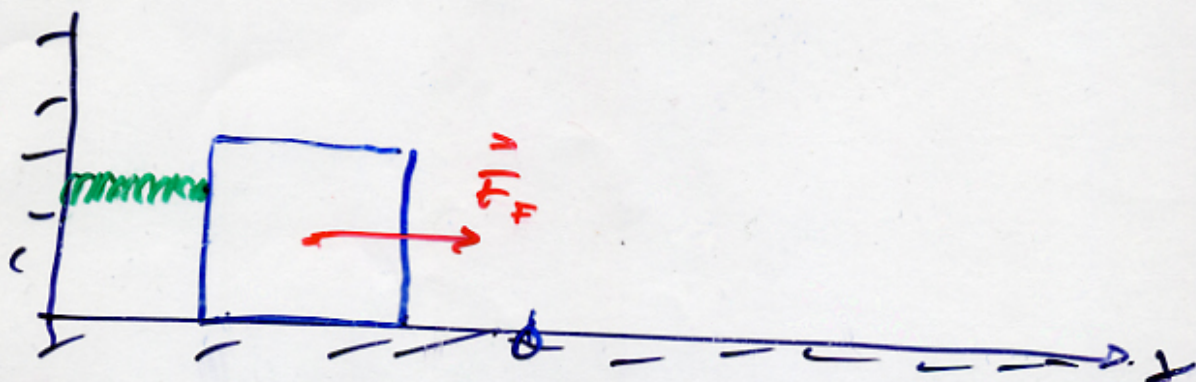
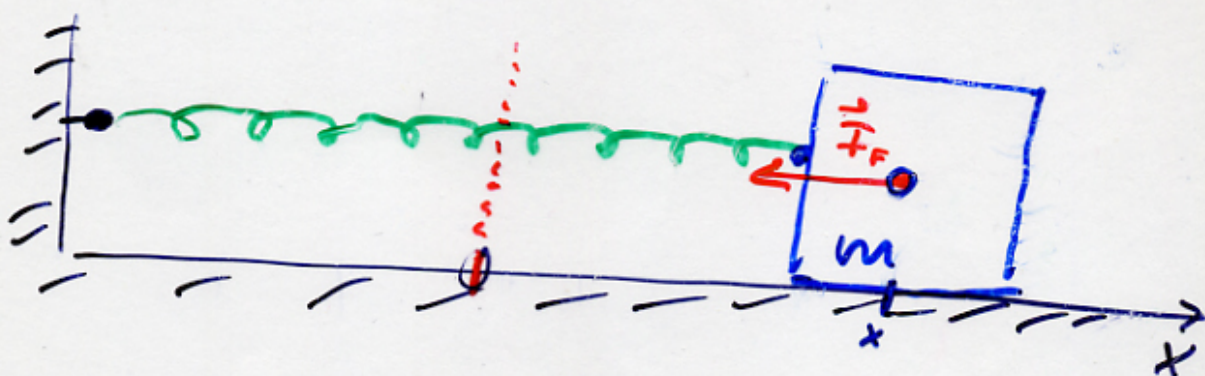
Kräfte, die Sie kennen:

- | | | |
|---------------|-----------------------|-------------------------------------|
| - Gravitation | $\vec{F} = m\vec{g}$ | } zeitlich,
räumlich
konstant |
| - Normalkraft | $\vec{F} = \vec{F}_N$ | |
| - Zugkraft | $\vec{F} = \vec{F}_Z$ | |
| - Schubkraft | $\vec{F} = \vec{F}_D$ | |

Für konstante Kräfte: $\frac{\vec{F}}{m} = \vec{a} = \text{konst}$

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichung: $\vec{s}(t) = \frac{\vec{a}}{2} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{s}_0$

Neu: Federkraft



$$\vec{F}_F = -k \cdot \vec{x} \quad \text{Hookesches Gesetz}$$

k Federkonstante

$$\begin{aligned} \text{Beschleunigung: } a_F &= \frac{F_F}{m} \\ &= - \frac{k x}{m} \end{aligned}$$

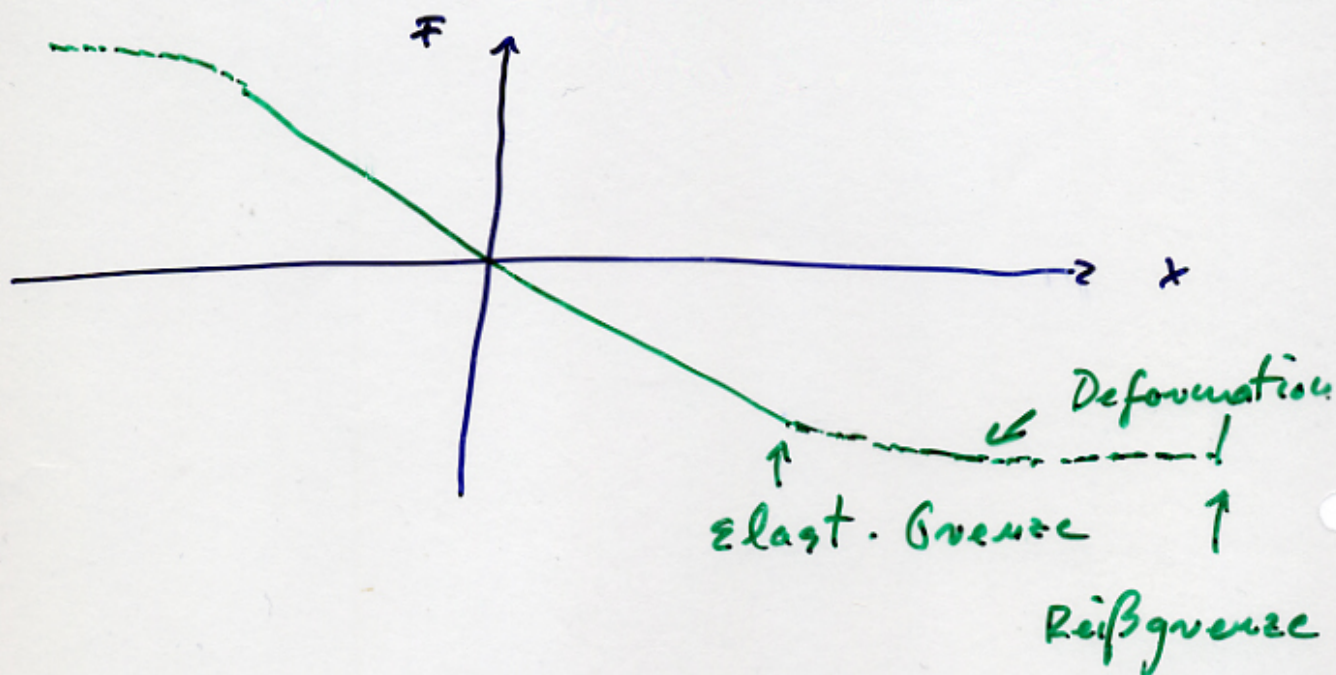
Bewegungsgleichung:

$$a(t) \equiv \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = - \frac{k}{m} \cdot x(t)$$

Differentialgleichung 2. Ordnung

Zum Hookeschen Gesetz

$$T = - \ln x$$

Bewegungsgleichung (1d)

$$a(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = - \frac{k}{m} \cdot x(t)$$

Ansatz: $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \theta_0)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x_0 \omega^2 \cos(\omega t + \theta_0)$$

Eingesetzt:

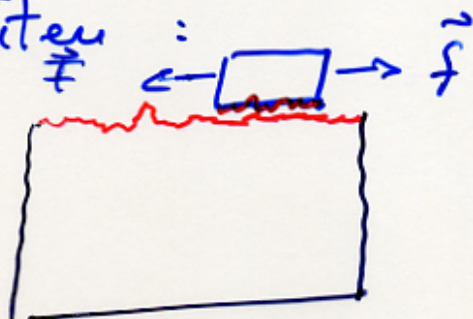
$$-x_0 \omega^2 \cos(\omega t) = -\frac{h}{m} x_0 \cos(\omega t)$$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ergebnis: $x(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Randbedingungen}}}{x_0} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \underset{\uparrow}{\theta_0}\right)$

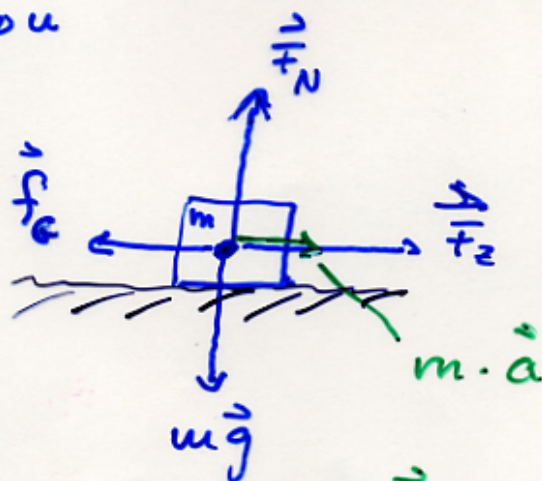
2.2.3 Reibung

Mikroskopische Unebenheiten verursachen Reibung beim Gleiten:



- Statische Reibung (Haftreibung): $\vec{f}_H$
- Kinetische Reibung (Gleitreibung): $\vec{f}_G$
- Reibung in Flüssigkeiten, Gasen (Viskosität) $\rightarrow$ später

a) Illustration



Reibung $\approx$ prop zu $|\vec{F}_N|$, $\vec{f} \perp \vec{F}_N$

- $f_H = \mu_H \cdot F_N$
 - $f_G = \mu_G \cdot F_N$
- } $\mu_H > \mu_G$
Reibungskoeffizient

Kraftgleichungen:

$$\vec{F} + \vec{f}_G + \vec{F}_N + m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a} \quad (|\vec{F}| > |\vec{f}_G|)$$

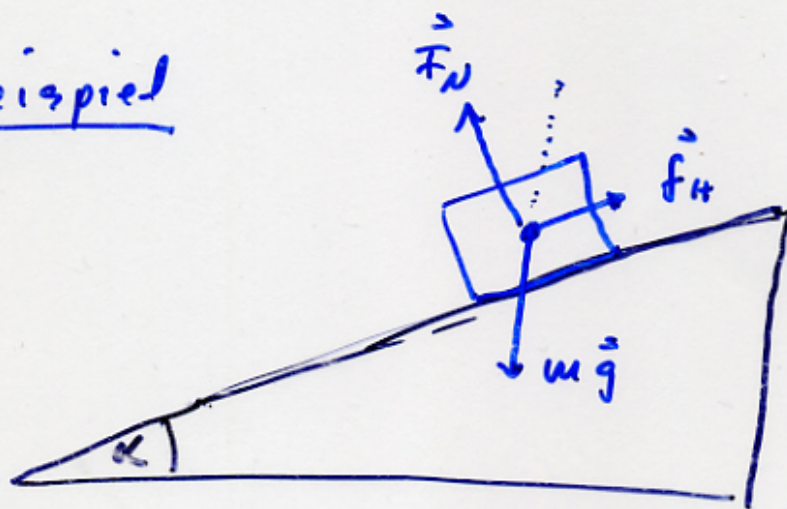
$$\vec{F} + \vec{f}_H + \vec{F}_N + m \vec{g} = 0 \quad (|\vec{F}| \leq |\vec{f}_H|)$$

Sonderfall:

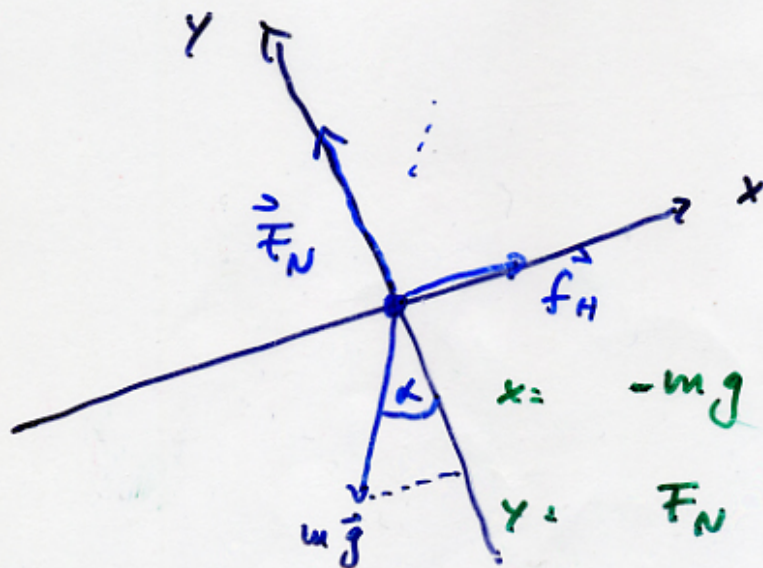
$$\vec{F} + \vec{f}_G + \vec{F}_N + m \vec{g} = 0 \quad \text{für } \vec{F} = -\vec{f}_G$$

Gleiten mit konstanter Geschw.

b) Beispiel



Klotz haftet: $\vec{F}_N + m\vec{g} + \vec{f}_H = 0$



$$x: -mg \sin \alpha + f_H = 0$$

$$y: F_N - mg \cos \alpha = 0$$

$$f_H = mg \sin \alpha$$

$$F_N = mg \cos \alpha$$

mit $f_H = F_N \cdot \mu_H$

$$\Rightarrow mg \sin \alpha = mg \cos \alpha \cdot \mu_H$$

$$\Rightarrow \underline{\mu_H = \tan \alpha} \quad (\alpha \text{ maximal mögl. Winkel ohne Gleiten})$$

b) Demo: 1. Holz auf Holz: $\alpha' = 77^\circ$

$$\kappa = 90^\circ - 77^\circ = 13^\circ$$

$$\underline{\mu_H = \tan 13^\circ = 0,23}$$

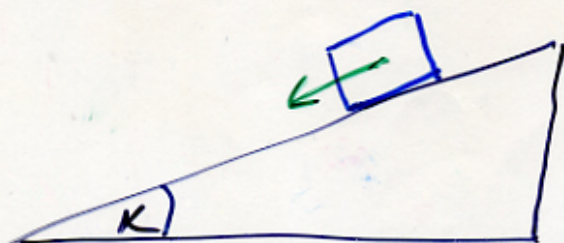
2. Holz mit Schmirgelpapier auf Holz:

$$\alpha' = 60^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\underline{\mu_H = \tan 30^\circ = 0,58}$$

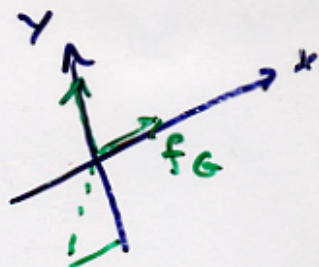
c) Allgemeiner Fall



Klotz gleitet

Bewegungsgleichung:

$$\vec{F}_N + \vec{f}_G + m\vec{g} = m\vec{a}$$



$$x: f_G - mg \sin \alpha = ma$$

$$y: F_N - mg \cos \alpha = 0$$

$$f_G = F_N \cdot \mu_0$$

$$\Rightarrow \mu_0 \cdot mg \cos \alpha - mg \sin \alpha = ma$$

$$\Rightarrow a = -g (\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \mu_0)$$

$$a = 0$$

$$\text{wenn } \mu_0 = \tan \alpha \quad \checkmark$$

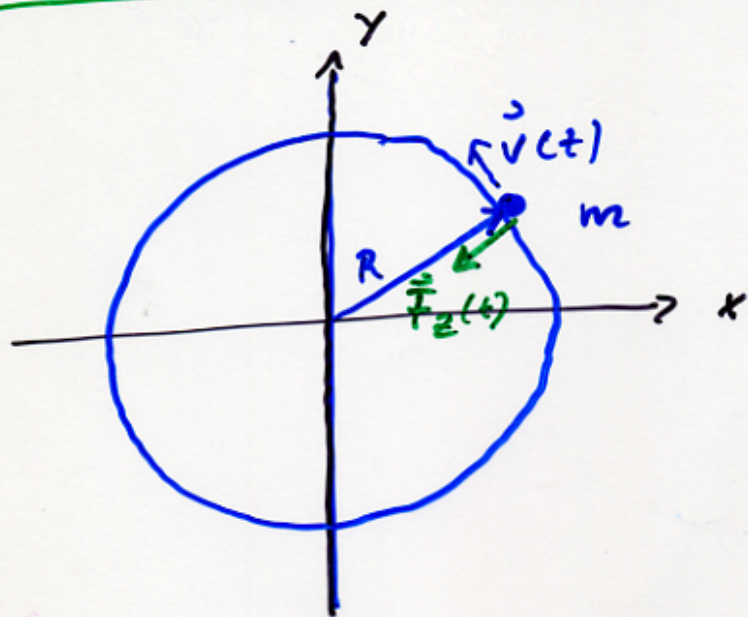
$$a \geq 0$$

$$\mu_0 \geq \tan \alpha$$

$$a \leq 0$$

$$\mu_0 \leq \tan \alpha \quad \checkmark$$

2.2.4 Drehbewegungen - Rotationsdynamik



$$\vec{F}_z = m \vec{a}_z$$

$$\Rightarrow \vec{a}_z = \frac{\vec{F}_z}{m}$$

Gleichförmige Kreisbewegung:

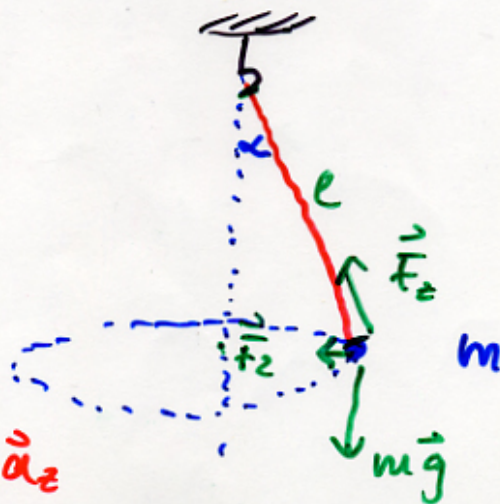
$$\vec{a}_z(t) = -\omega^2 R \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \phi_0) \\ \sin(\omega t + \phi_0) \end{pmatrix}$$

$$= -\omega^2 R \vec{u}_n(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

$$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{F_z}{mR}} t + \phi_0\right) \\ \sin\left(\sqrt{\frac{F_z}{mR}} t + \phi_0\right) \end{pmatrix}$$

Beispiele

a) Drehpendel



$$m\vec{g} + \vec{F}_z = m \cdot \vec{a}_z$$

$$\begin{aligned}
 y &: F \cdot \cos \alpha = mg \\
 x &: F \cdot \sin \alpha = m a_z
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} y &: F \cdot \cos \alpha = mg \\ x &: F \cdot \sin \alpha = m a_z \end{aligned}} \right\}
 \begin{aligned}
 a_z &= g \cdot \tan \alpha \\
 &= \omega^2 \cdot R \\
 &= \omega^2 \cdot l \cdot \sin \alpha
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l \cdot \cos \alpha}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}$$

Diskussion:

$$\text{für } \alpha \rightarrow 90^\circ \Rightarrow T \rightarrow 0$$

$$\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow T \rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Periode eines klass.
Pendels.