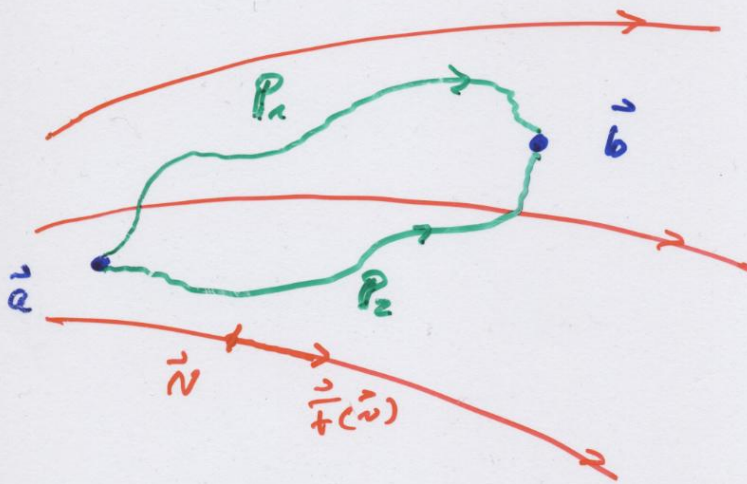


(7)

3. Arbeit in konservativen und nicht-konservativen Kraftfeldern

Def.: konservatives Kraftfeld:

$$A = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{P_1}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} \\ = - \int_{\vec{b}}^{\vec{a}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$

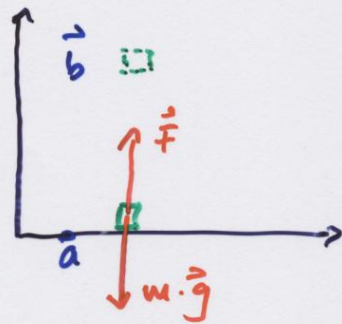


$$A_{\vec{a} \rightarrow \vec{a}} = \oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0$$

Beispiele

a) Homogenes Gravitationsfeld

$$A = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} -m\vec{g} d\vec{r}$$



$$\vec{F} = -m \cdot \vec{g}$$

$$A_{ab} = \underbrace{|-m\vec{g}|}_{1} \underbrace{|\vec{b} - \vec{a}|}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\cos(\vec{F}, \vec{b} - \vec{a})}_{\neq 0}$$

$$= \underline{mg(b-a)}$$

$$A_{ba} = \int_{\vec{b}}^{\vec{a}} \vec{F} d\vec{r} = \vec{F}(\vec{a} - \vec{b})$$

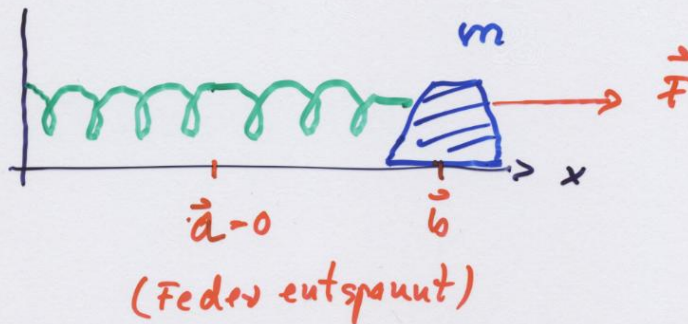
$$= \underbrace{|-m \cdot \vec{g}|}_{1} \underbrace{|\vec{a} - \vec{b}|}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\cos(\vec{F}, \vec{a} - \vec{b})}_{-1}$$

$$= -mg|\vec{a} - \vec{b}|$$

$$= \underline{-mg(b-a)}$$

$$\Rightarrow A_{ab} + A_{ba} = 0$$

b) Federkraft

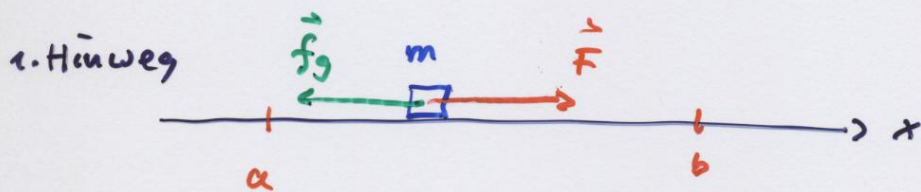


$$A_{ab} = \int_a^b kx \, dx$$
$$= \frac{1}{2} k (b^2 - a^2)$$

$$A_{ba} = \int_b^a kx \, dx$$
$$= \frac{1}{2} k (a^2 - b^2) = -A_{ab}$$

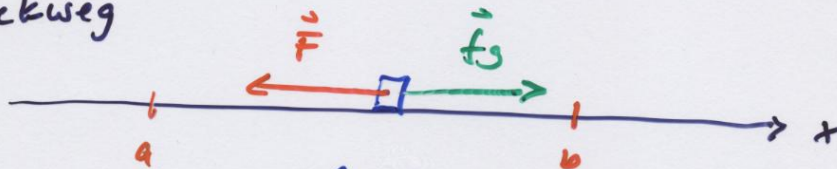
$\Rightarrow$ Federkraft „konservativ“

c) Reibung



$$\begin{aligned}
 A_{ab} &= \int_a^b \vec{F} d\vec{s} = - \int_a^b \vec{f}_g d\vec{s} \\
 &= - \int_a^b (-f_g) dx \\
 &= f_g (b-a) > 0
 \end{aligned}$$

2. Rückweg



$$\begin{aligned}
 A_{ba} &= - \int_b^a \vec{f}_g d\vec{s} = - f_g (a-b) \\
 &= f_g (b-a) = A_{ab}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow A_{ab} + A_{ba} \neq 0 \quad \hat{=}$ nicht konserv.

Allgemeine Definition für K. Kräfte

$\vec{F}$ konservativ, wenn $\exists$ skalare Funktion V , so daß:

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \nabla V(\vec{r})$$

$\uparrow$
Gradient („Nabla“)

$$\vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

Beweis: $A_{\vec{a} \rightarrow \vec{a}} = \oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{s}$

$$= \oint - \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} V(\vec{r}) \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$= - \int_{a_x}^{a_x} \frac{\partial}{\partial x} V(\vec{r}) dx - \int_{a_y}^{a_y} \frac{\partial}{\partial y} V(\vec{r}) dy - \int_{a_z}^{a_z} \frac{\partial}{\partial z} V(\vec{r}) dz$$

$$= -V(\vec{r}) \Big|_{a_x}^{a_x} - V(\vec{r}) \Big|_{a_y}^{a_y} - V(\vec{r}) \Big|_{a_z}^{a_z}$$

$$= 0 \quad (\text{Natürlich})$$

Äquivalente Aussage:

$\vec{F}$ ist konservativ, wenn $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$
(Satz von Stokes) "Rotation"

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

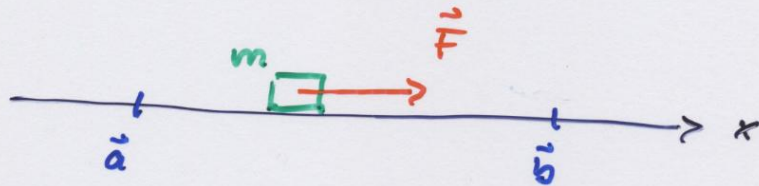
Beweis: mit $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$:

$$\vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} V(\vec{r})) = 0$$

(denn $\vec{c} \times \vec{c} = 0$)

4 Kinetische Energie

Führt eine Kraft auf eine Masse zu einer beschleunigten Bewegung, bekommt diese Masse kinetische Energie.



$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \neq 0$$

$$A = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} d\vec{s} = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} m \cdot \vec{a} d\vec{s}$$
$$= \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s}$$

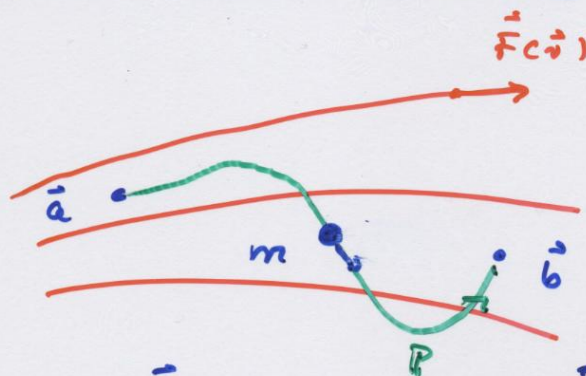
$= \vec{v}$

$$= \int_{\vec{v}(\vec{a})}^{\vec{v}(\vec{b})} m \vec{v} d\vec{v}$$

$$= \frac{1}{2} m (v_b^2 - v_a^2)$$

$$A = \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2 \equiv \underline{E_k(\vec{b}) - E_k(\vec{a})}$$

5. Potentielle Energie



$$A = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = E_p(\vec{b}) - E_p(\vec{a})$$

Für unbeschleunigte
Bewegung

6. Energiesatz der Mechanik

Im konservativen Kraftfeld:

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= E_k(\vec{a}) + E_p(\vec{a}) \\ &= E_k(\vec{b}) + E_p(\vec{b}) = \text{const} \end{aligned}$$

$$\hat{=} \Delta E_{\text{tot}} = \Delta E_k + \Delta E_p = 0$$

Allgemein: In einem geschlossenen System ist die Summe aller Energieformen konstant $\hat{=}$ Energie ist erhalten.