

Klassische Physik 1

Johannes Bümer

WS 2014/15

V10 20. November

KIT-Centrum Elementarteilchen- und Astroteilchenphysik KCETA



Zusammenfassung v09

- Elastizität $e = \frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1}$ **völlig inelastisch** $0 \leq e \leq 1$ **völlig elastisch**

- Nichtzentraler elastischer Stoß im Raum

- Reduktion auf **2-dimensionales** Inertialsystem in dem $\vec{v}_2 = 0$ (mitbewegtes System)
- **4 Unbekannte**, Impuls- und Energieerhaltung liefern 3 Bestimmungsgleichungen
- Form der Körper und Stoßparameter **b** liefert vierte Bestimmungsgleichung

- Haft- und Gleitreibung

Immer entgegen der treibenden Kraft/Bewegung

$\vec{F}_N$ Normalkraft, wirkt senkrecht zur Auflagefläche auf Körper

material-abhängig

$$F_H = \mu_H F_N$$

$$F_G = \mu_G F_N$$

$$\mu_H > \mu_G$$

- Stokes'sche (viskose) Reibung $\vec{F}_R = -6\pi \eta r \vec{v}$
"Für nicht zu große Körper, die sich nicht zu schnell bewegen"

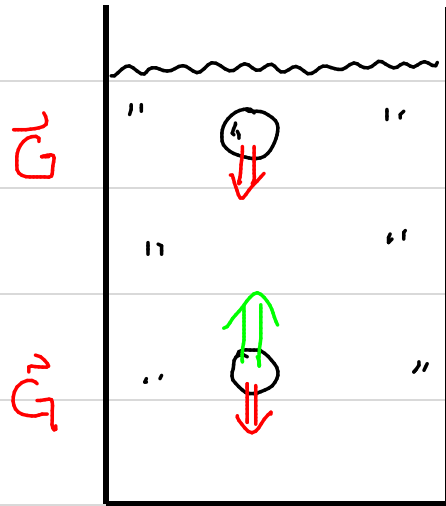
- Newton'sche Reibung $\vec{F}_R = -\frac{1}{2} c_w \rho A v \vec{v}$
"Für schnelle Bewegung großer Körper"

2. Klassische Mechanik

2.1 Dynamik der Massenpunkte

- Newton'sche Axiome
- Impuls
- Energie
- Stoßgesetze
- Reibung
- • Schwingungen (1)
- Drehbewegungen (2)
- Rotierende Bezugssysteme

Beispiel: Fall im Schwerfeld der Erde mit viskoser Reibung



$t=0 : v_0 = 0$ nur Gewichtskraft $\vec{G}$

$$\vec{F}_R = -\gamma_s \cdot \vec{v}, \quad \gamma_s = 6\pi\eta r$$

r Kugelradius
 η Öl-Viskosität
 γ_s Stokes-Zahl

Bew.gl. aufstellen: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{G} + \vec{F}_R$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \vec{g} - \gamma_s \cdot \vec{v}$$

1-dim. Betrachtung: $\frac{d}{dt}(m \cdot v) = mg - \gamma_s \cdot v \quad \times \frac{1}{m}$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\gamma_s}{m} v = g \quad \text{inhomogene lineare Dgl. für } v$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\gamma_s}{m} v = 0 \quad \text{hom.} \quad -||-$$

$$\hookrightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{\gamma_s}{m} \cdot dt \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \ln v = -\frac{\gamma_s}{m} \cdot t + C$$

$$\Rightarrow \underline{v = c' \cdot e^{-\frac{\gamma_s}{m} \cdot t}} \quad (1) \quad c' = e^C$$

Spez. Lösung der inh. Dgl: $v = v_g = \text{konst}$

einsetzen: $\ddot{v}_g + \frac{\gamma_s}{m} v_g = g \Rightarrow \underline{v_g = \frac{mg}{\gamma_s}} \quad (2)$

allg. Lösung der inh. Dgl.: (1) + (2), und dann c' festlegen

$$v = c' \cdot e^{-\frac{\gamma_s}{m} t} + \frac{mg}{\gamma_s}$$

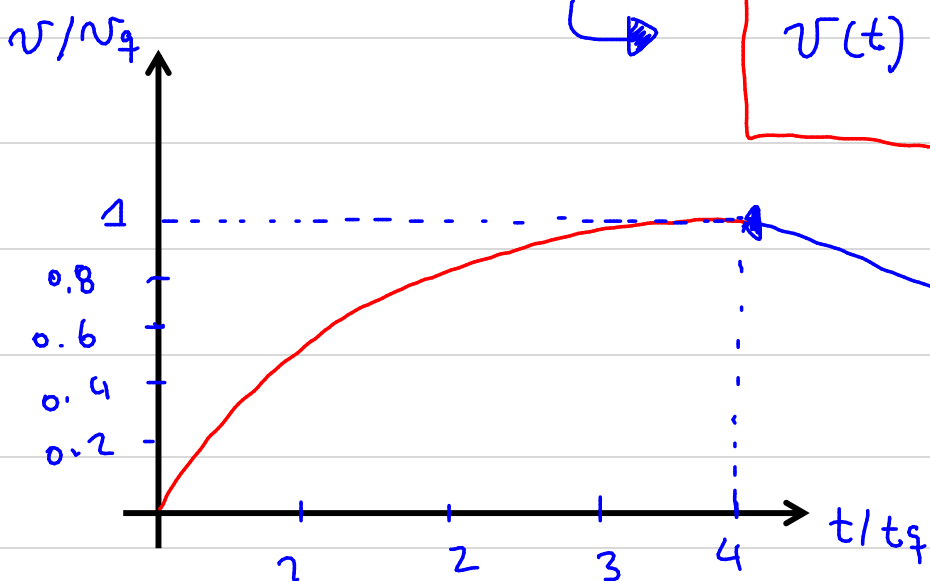
$$v(t=0) = v_0 = 0; \quad c' + \frac{mg}{\gamma_s} = 0 \Rightarrow c' = -\frac{mg}{\gamma_s}$$

$$\hookrightarrow \boxed{v(t) = \frac{mg}{\gamma_s} \left(1 - e^{-\frac{\gamma_s}{m} t} \right)}$$

[f.s. Zeit]

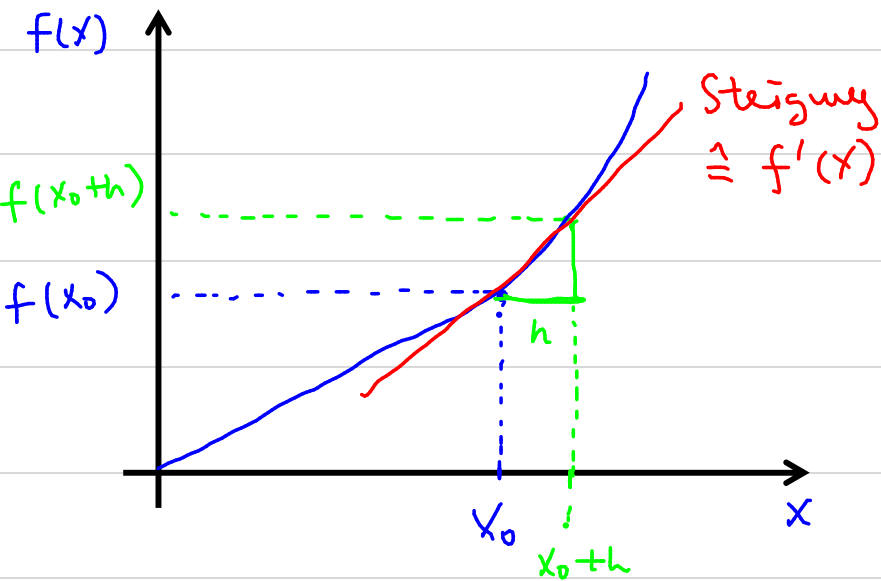
$$\rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty, \quad t_g = \frac{m}{\gamma_s}$$

$$v_g = \frac{mg}{\gamma_s} \text{ "quasi-stationäre Geschw."}$$



kann sofort "geraten" werden, weil dieser Geschw. die Reibungskraft gleich der Gewichtskraft wird.

Einschub: Näherung durch Reihenentwicklung von Funktionen



für kleine h =

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \underbrace{h \cdot f'(x_0)}$$

$x_0 \rightarrow a$
 $h \rightarrow x$ } „Entwicklung um a “
 $x \ll a$

$$1) \quad f(x) = \sqrt{a^2 + x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (a^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2a}$$

$$\hookrightarrow f(x) = \sqrt{a^2 + x} \approx \underbrace{a}_{= f(a)} + x \cdot \frac{1}{2a}$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{4+1} \approx 2 + \frac{1}{4} \approx 2.25$$

$$\underbrace{\hspace{10em}} = 2.236$$

$$\sqrt{181} = \sqrt{169 + 12}$$

$$\begin{aligned} 13,45'' &= 13 + \frac{12}{26} \\ &\approx 13,5 \end{aligned}$$

$$\left[e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots \right]$$

$$2) f(x) = e^x ; f'(x) = e^x \rightarrow e^x \approx 1 + x \cdot e^0$$

Stokes-Reibung für kleine Zeiten t :

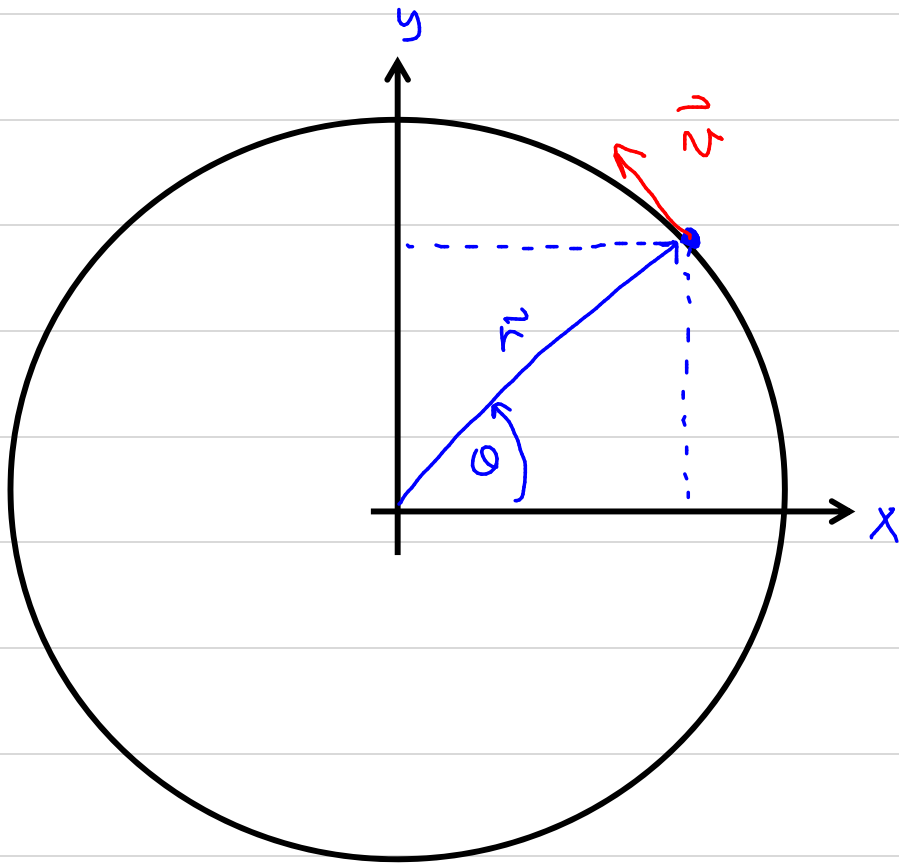
$$\underbrace{e^{-\frac{\gamma_s}{m} \cdot t}} \rightarrow 1 - \frac{\gamma_s}{m} \cdot t ; \text{ einsetzen :}$$

$$v(t \text{ klein}) \approx \frac{mg}{\gamma_s} \left(1 - 1 + \frac{\gamma_s}{m} \cdot t \right) = g \cdot t$$

wie
freier
Fall

Harmonische Schwingungen

- Erinnerung → Projektion von Kreisbewegung
- Kraftgesetze, Bewegungs.Gl., Dgl.-Lösungen
- Gedämpfte Schwingungen
- Erzwungene Schwingungen, Resonanz



$$\vec{r}(t) = r \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}$$
$$\omega = \dot{\theta}$$

$$\vec{v}(t) = \omega r \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 r \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

$\vec{a}(t)$ immer entgegengesetzt $\vec{r}(t)$

$$\angle(\vec{v}, \vec{a}) : \quad \vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = a v \cos(\angle \vec{v}, \vec{a})$$

$$\swarrow -\omega^2 r \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} \cdot \omega r \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix}$$

$$= -\omega^3 r^2 (-\cos \omega t \cdot \sin \omega t + \sin \omega t \cdot \cos \omega t)$$

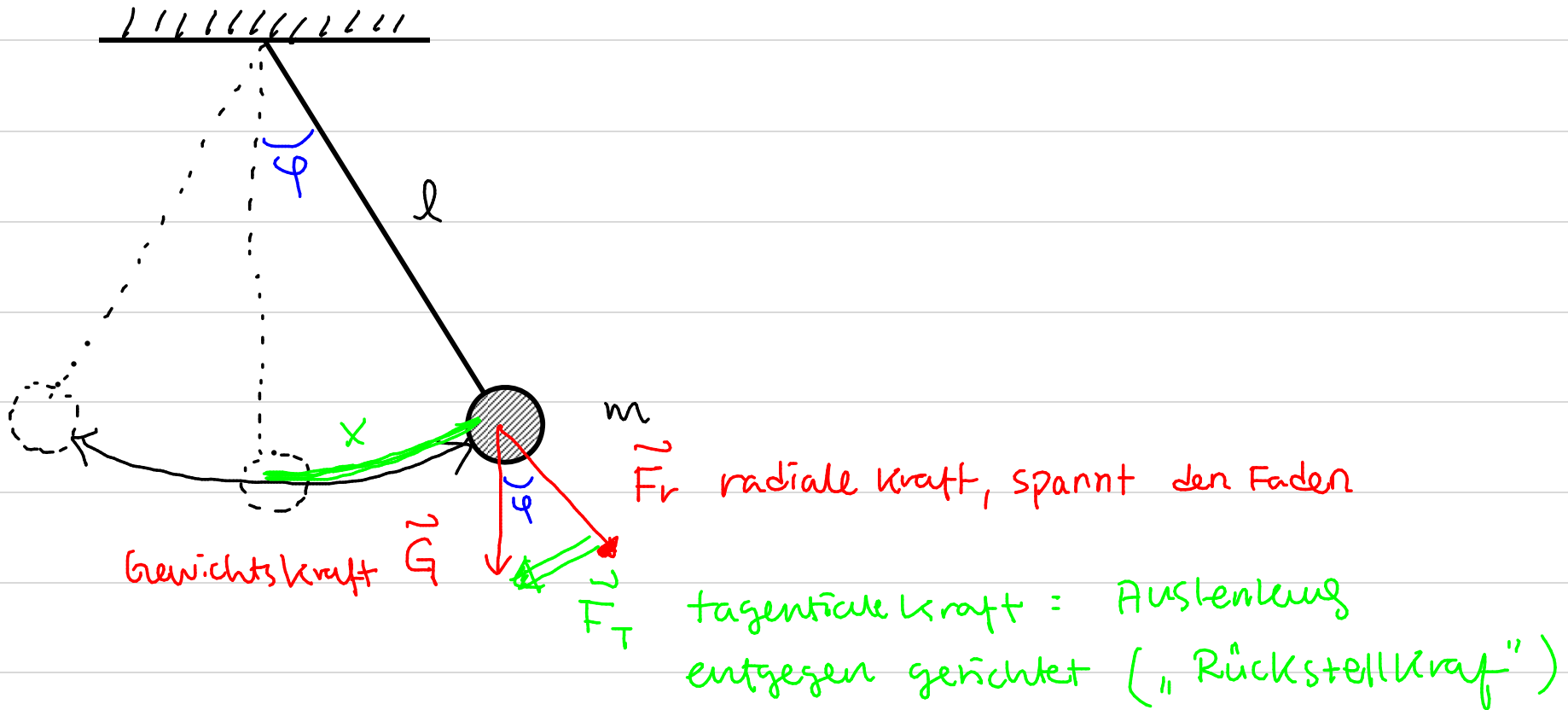
$$= 0, \quad \text{Winkel} = 90^\circ$$

$$y(t) = r_y(t) = \underbrace{r \cdot \sin \omega t}_{\omega = \frac{2\pi}{T}} \quad \text{"periodische Bewegung"}$$

„harmonisch“ : Bewegungsgesetz ist eine
reine Sinus- (Cosinus-) Funktion

■ Schwingung eines Fadenpendels

(„math. Pendel“ , „phys. Pendel“ )



$$\varphi = \frac{x}{l}$$

[$t=0$: $x=x_0$ Anfangsbed.]

$$|\vec{F}_T| / |\vec{G}| = \sin \varphi \approx \varphi = \frac{x}{l}$$

$$\hookrightarrow |\vec{F}_T| = -mg \cdot \frac{x}{l} = \boxed{ma = m\ddot{x}} \text{ Newton II}$$

$$\hookrightarrow \text{Dgl.} : m \ddot{x} + mg \frac{x}{l} = 0$$

$$\rightarrow \ddot{x} + \frac{g}{l} \cdot x = 0 \quad \text{lin. homog. Dgl. 2. Ord.}$$

$$\text{Ansatz : } x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

A Amplitude

ω Kreisfreq.

δ phase

aus Dgl. und Anfangsbedingungen bestimmen.

Ansatz 2x ableiten:

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \delta)$$

in Dgl. einsetzen:

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \delta) + \frac{g}{l} A \cdot \cos(\omega t + \delta) = 0$$

$$A \left(\frac{g}{l} - \omega^2 \right) \cos(\omega t + \delta) = 0 \quad \text{für alle } t$$

$$\hookrightarrow \underbrace{\left(\frac{g}{l} - \omega^2 \right)}_{\equiv 0} \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{g}{l}}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Anfangsbedingung ausnutzen:

$$\begin{aligned} X(t=0) &= X_0 = A \cdot \cos(\omega t + \delta) \\ &= A \cdot \cos \delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(t=\frac{T}{4}) &= 0 = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} + \delta\right) \\ &= A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} A = X_0 \\ \delta = 0 \end{array} \right\}$$

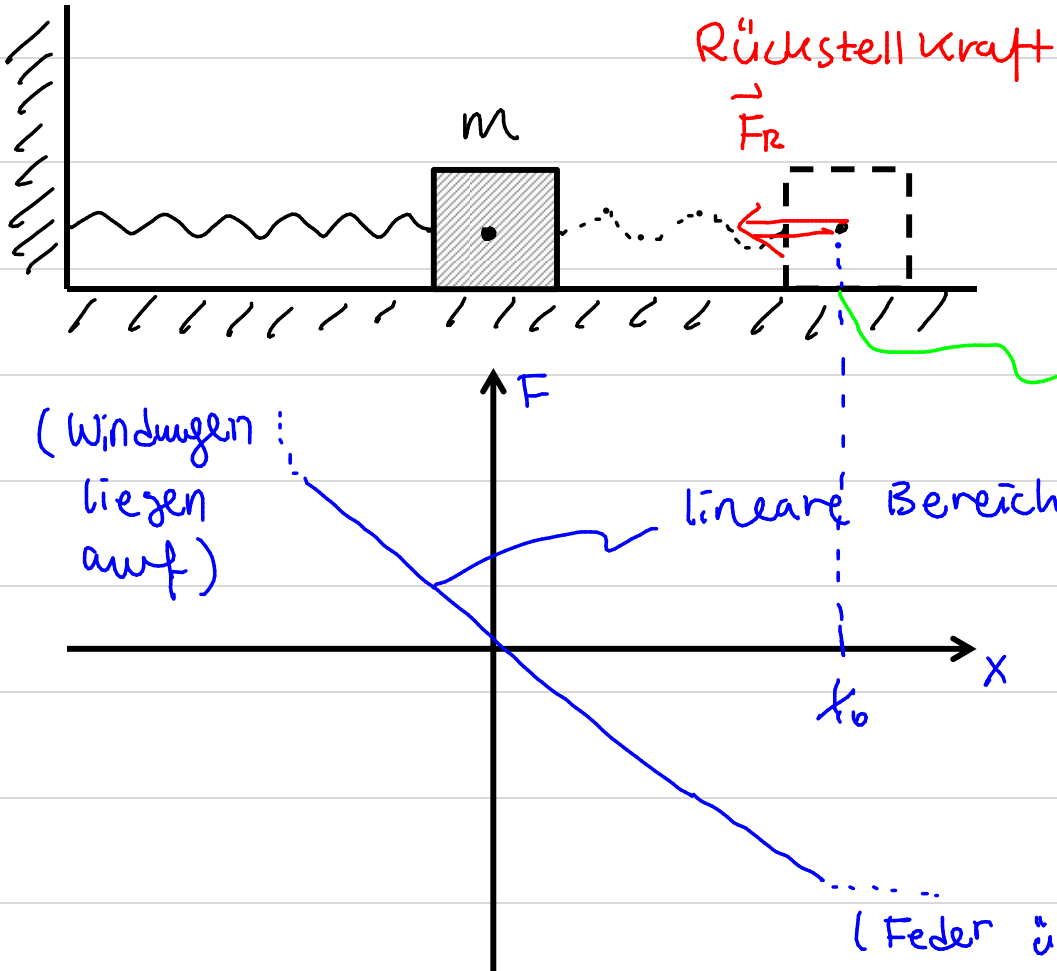
Also Bewegungsgl. der Pendels:

$$X(t) = X_0 \cdot \cos(\omega t), \quad \omega^2 = \frac{g}{l}$$

Bem.: Ansatz $X(t) = A \sin(\omega t + \delta)$ ebenso möglich,
hätte dann $\delta = -\frac{\pi}{2}$ ergeben

Lineare Kraftgesetze (Rückstellkraft $\propto$ Auslenkung)
ergibt "harmonische" Schwingung!

■ Federschwingungen



Körper der Masse m
auslenken und loslassen:

$$x(t=0) = x_0$$

↳ Schwingung um Ruhelage

zunächst ohne Reibung

$$\vec{F}_R = -k \cdot x \quad \text{Hookesches Gesetz}$$

k = Federkonstante

Bew. Gl. : $F = ma = -k \cdot x \Rightarrow$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

math. Form identisch zu Fadenpendel:

$$\hookrightarrow x(t) = x_0 \cos \omega t, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Bei einer harmo.
Schwingung hängen
Frequenz, Schwing-
dauer nicht von der AmP.
ab!

■ Energiebilanz bei harm. Schwingungen

Beispiel. Federschwingung : $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k [X(t)]^2$
 $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m [v(t)]^2$

zu jeder Zeit : $E_{\text{ges.}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \text{konst} \quad (*)$
 $= \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2$

max. Auslenkung $x = x_0$; $v = 0$

$$\Rightarrow E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} k \underbrace{x_0^2}_{\text{Amplitude}}$$

Die Gesamtenergie einer harmonischen Schwingung ist proportional zum Quadrat der Amplitude !

$(*) E_{\text{ges.}} = \text{konst} : \text{verifizieren durch } E_{\text{pot}}(t) + E_{\text{kin}}(t)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} m x_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) \\ &= \frac{1}{2} k x_0^2 \left[\underbrace{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)}_1 \right] \\ &= \frac{1}{2} k x_0^2 \end{aligned}$$

$\omega^2 = \frac{k}{m}$
↓

Einschub: komplexe Zahlen

