Karlsruher Institut für Technologie

Klassische Physik 1 WS 2014/15

Johannes Blümer

V11 25.11.2014

KIT-Centrum Elementarteilchen- und Astroteilchenphysik KCETA

Zusammenfassung V10

- **Fall mit viskoser Reibung** $\dot{\vec{p}} = m\vec{g} - \gamma_s \vec{v}$

$$v(t) = \frac{mg}{\gamma_s}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{mit } \tau = m/\gamma_s$$

$\frac{mg}{\gamma_s}$: stationäre Geschwindigkeit

- **Reihenentwicklungen** $f(x_0+h) \approx f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$

"(in h) lineare Näherung"

- **Harmonische Schwingungen**

Fadenpendel $\ddot{x} + g/\ell \cdot x = 0 \qquad \omega^2 = g/\ell \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t)$$

Federschwingung $\ddot{x} + k/m \cdot x = 0 \qquad \omega^2 = k/m \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} = \text{const} \qquad \propto$ Quadrat der Amplitude

Einschub: Komplexe Zahlen [→ Anwendung auf Bew.gln.]

$x^2+1=0$ hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung → $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ ist definiert durch Axiome u. Operationen

$z_1, z_2 \in \mathbb{C} \rightarrow z_1+z_2 \in \mathbb{C}$; $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$

Addition $\quad z_1+z_2 = z_2+z_1$; $z_1+(z_2+z_3) = (z_1+z_2)+z_3$

$\quad z+0 = z$; $z+(-z)=0$

analog Multiplikation! [$z \cdot 1 = z$; $z \cdot z^{-1} = 1$]

Es gibt eine Zahl $i \in \mathbb{C}$ mit $\boxed{i^2=-1}$

Jede $z \in \mathbb{C}$ lässt schreiben als $z = a + i \cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

Realteil ... $\quad$ Imaginärteil ... von z

$\mathrm{Re}(z)$ $\quad$ $\mathrm{Im}(z)$

Rechenregeln: $z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)$

$$= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) =$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_1 a_2 + a_1 b_2)$$

konjugiert komplexe Zahl: $z = a + ib$

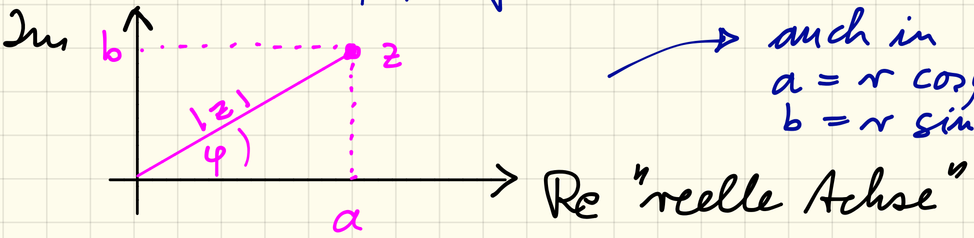
$$z^* = a - ib$$

$\hookrightarrow \quad z \cdot z^* = a^2 + b^2 \geq 0$

Betrag von z: $|z| = \sqrt{z \cdot z^*}$ $\qquad |z| = 0 \rightarrow z = 0$

d.h. $a = b = 0$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



auch in Polarkoordinaten

$a = r \cos\varphi$

$b = r \sin\varphi \qquad r = |z|$

$z = r\cos\varphi + i \cdot r \cdot \sin\varphi \;\hat{=}\; a + ib$

"Erinn." an Def e^x mit $x \in \mathbb{R}$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ → fortsetzen als e^z, $z \in \mathbb{C}$

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$

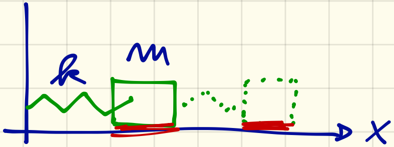
verwende $z \to i\varphi$ $\;\Rightarrow\; e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{i^2\varphi^2}{2!} + \frac{i^3\varphi^3}{3!} + \frac{i^4\varphi^4}{4!} + \dots$

$$e^{i\varphi} = \dots = \underbrace{\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - + \dots\right)}_{= \cos\varphi} + i \cdot \underbrace{\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - + \dots\right)}_{\sin\varphi}$$

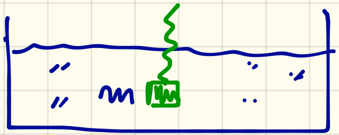
d.h. $e^z = e^{(a+ib)} = e^a \cdot e^{ib} = e^a \cdot (\cos b + i \sin b)$

Anwendung auf gedämpfte Schwingungen

Beisp.



Federschwingung mit Reibung $F_R \hat{=}$ const



Stokes-Reibung $F \propto v$

Energie: $E_{pot} + E_{kin} + W_{Reibung} =$ konst.

Bewegungsgl. aufstellen: $\oplus$ Reibungsterm → Ansatz allgemeiner fassen

'als Kraftsumme': $F = m\ddot{x} = -kx - \rho\dot{x}$

als Bew.gl./Dgl: $m\ddot{x} + \rho\dot{x} + kx = 0$

versuche Lösung mit Ansatz $x(t) = x_0 \cdot e^{\lambda t}$

dürfen komplex sein!

$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + kx = 0$

Ansatz $x(t) = x_0 \cdot e^{\lambda t}$

Ansatz in Dgl einsetzen
↳ wiederholt differenzieren! → Faktoren λ
$e^{\lambda t}$ reproduziert sich und kann gekürzt werden

↳ $\boxed{m\lambda^2 + \rho\lambda + k = 0}$

charakt. Gleichung (die zur Dgl oben gehört) = quadr. Gl. für λ

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\rho}{2m} \pm \sqrt{\frac{\rho^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

also $x(t) = x_0 \exp\left\{\left(-\frac{\rho}{2m} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{\rho^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}}_{\text{kann kompl. Zahl ergeben}}\right)\cdot t\right\}$

2 Lösungen!

Unterscheide 3 Fälle:

1) "schwache Dämpfung": $\frac{\rho^2}{4m^2} < \frac{k}{m}$ → $\sqrt{\ }$ imaginär → $e^{\lambda t} \in \mathbb{C}$

$e^{\lambda t}$ beschreibt eine Schwingung: $x_1(t) = x_0 e^{\lambda_1 t}$

$$= x_0 e^{\left(-\frac{\rho}{2m} + i\sqrt{\frac{k}{m} - \rho^2/4m^2}\right)}$$

$$x_1(t) = x_0\, e^{-\rho/2m\, t} \cdot e^{i\sqrt{\frac{k}{m} - \rho^2/4m^2}\cdot t}$$

$$= x_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot e^{i\omega t} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \delta = \rho/2m \\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \rho^2/4m^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2} \end{cases}$$

$\exists$ 2. Lösung $x_2(t) = \tilde{x}_0\, e^{-\delta t}\, e^{-i\omega t}$

mit Hilfe von Anfangs- und Randbedingungen zus. bauen

x_0 Anfangsamplitude (bei $t=0$)

$e^{-\delta t}$ expon. Dämpfung

Frequenz der Schwingung $\underbrace{\omega^2 = \frac{k}{m}}$ $- \delta^2 = \omega_0^2 - \delta^2 < \omega_0^2$

wie bei ungedämpfter Schwingung
" $\omega_0^2 = k/m$ "

Erinn. $\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$; $\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$

$x(t)$ muss reell sein z.B. $x = e^{-\delta t}\left(x_1 \cos\omega t + x_2 \sin \omega t\right)$

z.B. $x(t=0) = 0$
$\hookrightarrow x_2 = 0$

$$\hookrightarrow \boxed{x(t) = x_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos\omega t}$$

Wichtig: allg. Lösung der Dgl. muss beide Lösungen der char. Gl. berücksichtigen!

$$x_{allg.}(t) = e^{-\delta t}\left(x_1 \cos \omega t + x_2 \sin \omega t\right)$$

2) "mittlere Dämpfung" $\frac{\varrho^2}{4m^2} = \frac{k}{m} \longrightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{\varrho}{2m} \pm 0$

Theorem: wenn $e^{\lambda_{1,2}t}$ Lösungen der Dgl sind, dann auch

$$\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$\Leftarrow$ Ableitung von $e^{\lambda t}$ nach λ an der Stelle λ_1

d.h. auch $t\, e^{\lambda_1 t}$ ist eine Lösung der Dgl.

$\hookrightarrow$ vollständige Lösung für den "aperiodischen Grenzfall":

$$x(t) = x_1 e^{-\varrho/2m\, t} + x_2 t\, e^{-\varrho/2m\, t}$$

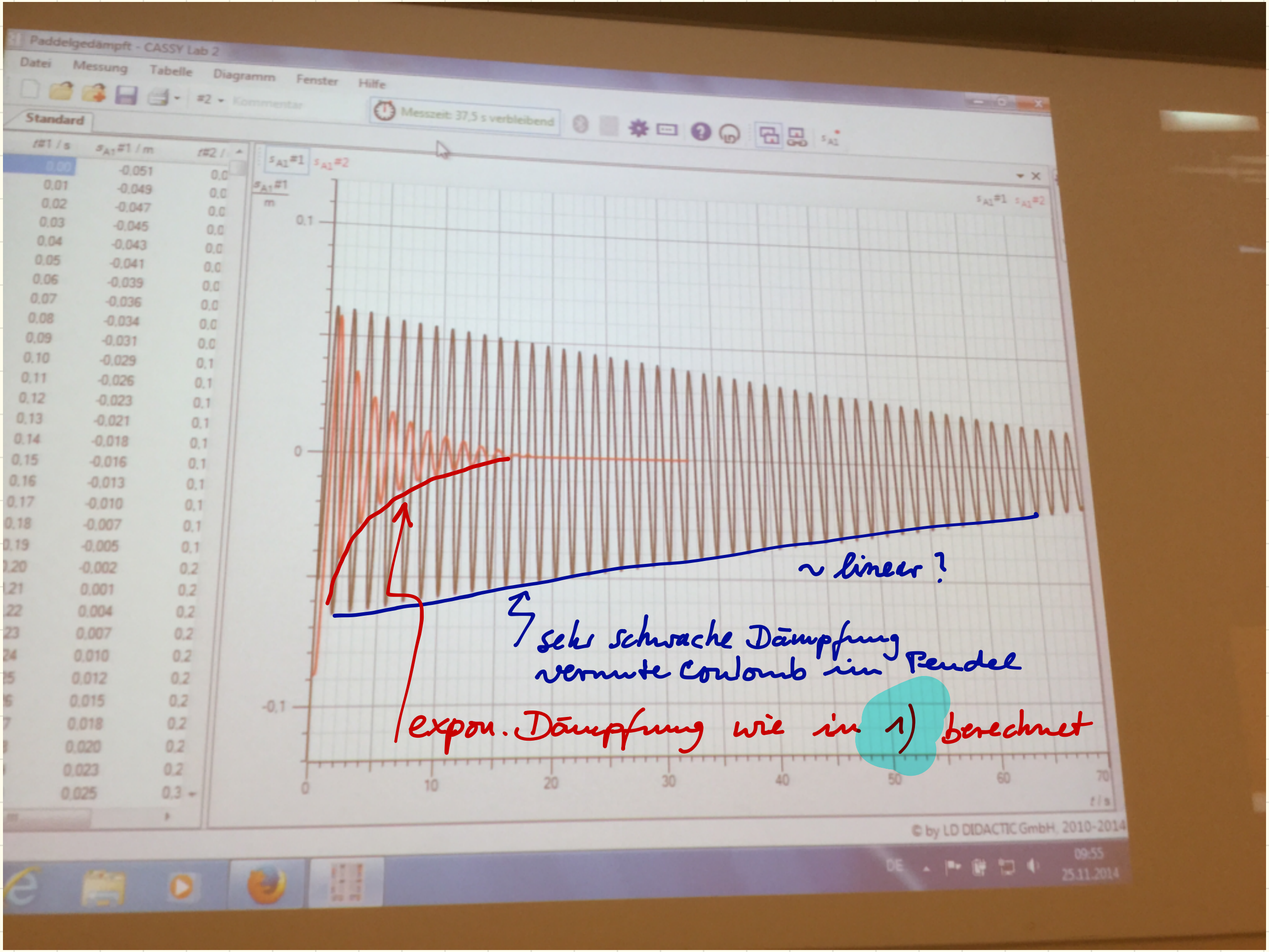
$$= x_1 e^{-\delta t} + x_2 t\, e^{-\delta t}$$

$\leftarrow$ x_1, x_2 durch Anf. bed. festlegen

3) "Starke Dämpfung" $\quad \frac{\rho^2}{4m^2} > \frac{k}{m}$

$\sqrt{}$ geht reell, $\lambda_{1,2} \rightarrow$ einsetzen...

$$x(t) = \left[x_1 e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\, t} + x_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\, t} \right] \cdot e^{-\delta t}$$


Paddelgedämpft - CASSY Lab 2
Datei Messung Tabelle Diagramm Fenster Hilfe
Messzeit: 37,5 s verbleibend
Standard
0.1
0
-0.1
0 10 20 30 40 50 60 70
t / s
© by LD DIDACTIC GmbH, 2010-2014
09:55
25.11.2014
~ linear ?
sehr schwache Dämpfung
vermute Coulomb im Pendel
expon. Dämpfung wie in 1) berechnet

Gedämpfte Schwingung

$$x(t) = e^{-d\,t} cos(\omega t) \qquad \omega = \sqrt{100^2 + d^2} \qquad (\omega_0 = 100)$$