

Klassische Physik 1

Johannes Blümer

WS 2014/15

V14 04.12.2014

KIT-Centrum Elementarteilchen- und Astroteilchenphysik KCETA



Zusammenfassung V13

Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ist in abgeschlossenen Systemen streng erhalten

Drehmoment: $\vec{M} = \dot{\vec{L}} \rightarrow \vec{r} \times \vec{F}$

Massenschwerpunkt: $\vec{R}_S = \sum m_i \vec{r}_i / \sum m_i \rightarrow \frac{\int \vec{r} dm}{\underbrace{\int dm}_{\text{Gesamtmasse}}}$

Trägheitsmoment: $J = m r^2 \xrightarrow{\text{f. Punktmasse}} J = \int_{(m,V)} r^2 dm \xrightarrow{\text{f. Massenverteilung}}$

↳ damit Rotationsenergie $= \rho \int_V r^2 dV$ wenn $\rho = \text{konst.}$

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$$

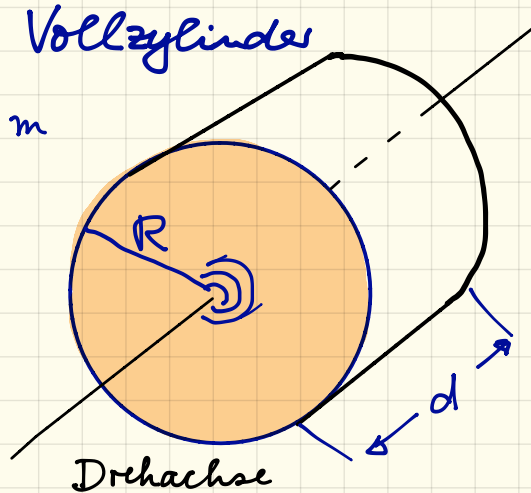
Starre Körper und Berechnung von Trägheitsmomenten

↳ braucht 6 zeitabhängige Koordinaten: Ortsvektor $\vec{r}$, Drehachse A ,
3 2

$$A: \vec{x} = r \vec{a} + \vec{b}$$

Drehwinkel φ
1

Drehachse kann durch $\vec{R}_s$ gehen oder nicht
↳ 'Umschicht'



$$J_{\text{voll}} = \int r^2 dm \quad dm = \rho dV$$
$$= 2\pi r d \cdot \rho \cdot dr$$

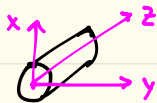
'dünne' Hohlzyl. mit Dicke dr und Radius r

$$J_{\text{voll}} = \int_{r=0}^R 2\pi r^3 \cdot d \cdot \rho \cdot dr = \frac{1}{2} \pi d \rho R^4$$

$$m = \pi R^2 \cdot d \cdot \rho$$

$$J_{\text{voll}} = \frac{1}{2} m R^2$$

alt. Weg:



$$I_{\text{rot}} = \int_m r^2 dm = \rho \int_V r^2 dV = \rho \iiint (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

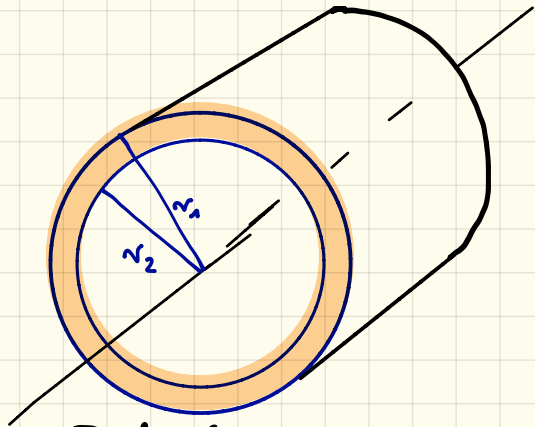
Kartes. Koord. $(x, y, z) \rightarrow$ Zylinderkoord. (r, z, φ)

$$dV = r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz$$

$$\text{damit } I_{\text{rot}} = \rho \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^d r^2 \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz$$

$$= \rho \cdot 2\pi \cdot d \cdot \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} m R^2 \quad \checkmark$$

Hohlzylinder



Drehachse

J_{Hohl} aus Subtraktion der Träg. mom.
zweier Vollzylinder

$$J_{\text{Hohl}} = J_1 - J_2 \\ = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 - \frac{1}{2} m_2 r_2^2$$

$$m_i = \rho \cdot \pi r_i^2 \cdot d \quad i = 1, 2$$

$m = m_1 - m_2$ gleiche Masse wie beim
Vollzylinder

$$J_{\text{Hohl}} = \frac{1}{2} \pi \rho d (r_1^4 - r_2^4) \\ = \frac{1}{2} \pi \rho d (r_1^2 - r_2^2) \cdot (r_1^2 + r_2^2) = \frac{1}{2} (m_1 - m_2) (r_1^2 + r_2^2) \\ = \frac{1}{2} m (r_1^2 + r_2^2)$$

vgl J_{Voll}

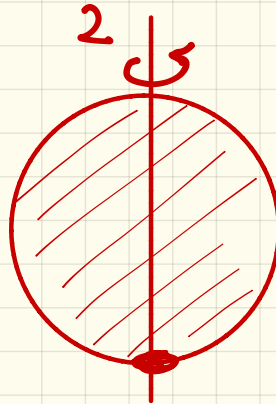
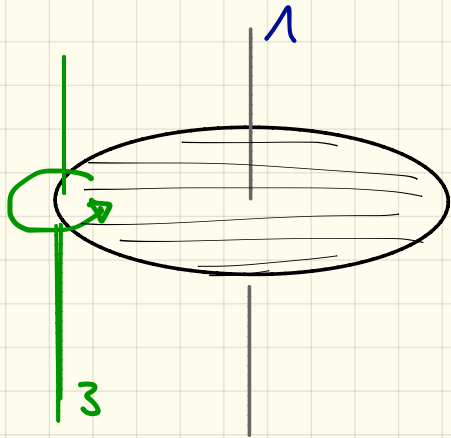
$$\frac{1}{2} m R^2 \rightarrow \frac{1}{2} m r_a^2$$

$J_{\text{Hohl}} \geq J_{\text{Voll}}$

Bewegung starrer Körper

	Translation	Rotation
Lage, Position	Ortsvektor $\vec{r}$	Drehachse, Drehwinkel
Geschwindigkeit	$\vec{v} = d\vec{r}/dt = \dot{\vec{r}}$	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \dot{\vec{\varphi}}$
Beschleunigung	$a = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$	$\vec{\dot{\omega}} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} = \ddot{\vec{\varphi}}$
Masse	m	Trägheitsmoment $J = \int r^2 dm$
kin. Energie	$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$	$E_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2$
Impuls	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
Kraft	$\vec{F}$	Drehmoment $\vec{M}$
Bewegungsgl.	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$
Arbeit	$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$	$W = \int \vec{M} d\vec{\varphi}$

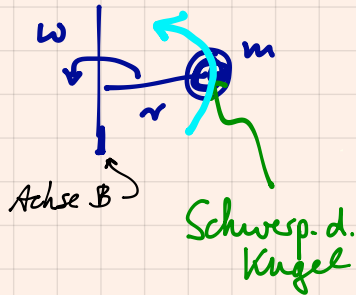
Versuch: Scheibe um 3 verschiedene Achsen rotieren lassen, T messen



<u>Achse</u>	<u>$5 \times T$</u>
1	17 ^s
2	10 ^s
3	27 ^s

größere $T \hat{=}$ größere Trägheitsmomente

Steinerscher Satz



Betr. rot. Kugel :

$$E_{\text{rot ges}} = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2} + \underbrace{\frac{1}{2} J_S \omega^2}$$

aus Bahnbewegung des im Schwerpunkt kons. Masse der Kugel

Rotation der Kugel um ihren Schwerpunkt mit gleichem ω wie bei der Bahnbewegung

$$v = \omega \cdot r \quad E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2 = \frac{1}{2} (m r^2 + J_S) \omega^2$$

Verallgemeinerung

$$J_B = J_S + m r^2$$

„Steinerscher Satz“

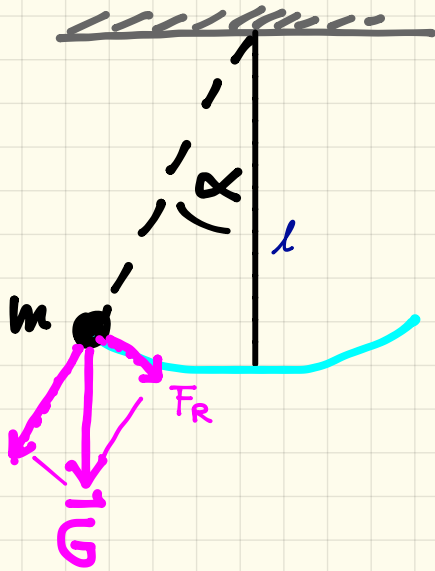
gesamtes Trägheitsmoment für die Rotation der Kugel um B und um S

Das Trägheitsmoment J_B eines Körpers bei Rotation um eine beliebige Achse B ist gleich dem Trägheitsmoment J_S um eine zu B parallele Achse durch den Schwerpunkt S plus dem Trägheitsmoment der in S vereinigten Gesamtmasse M bezüglich B.

hier m

Formulierung aus Demtröder

Math. Pendel (Punktmasse)



F_R Rückstellkraft
greift unterschiedlich
an

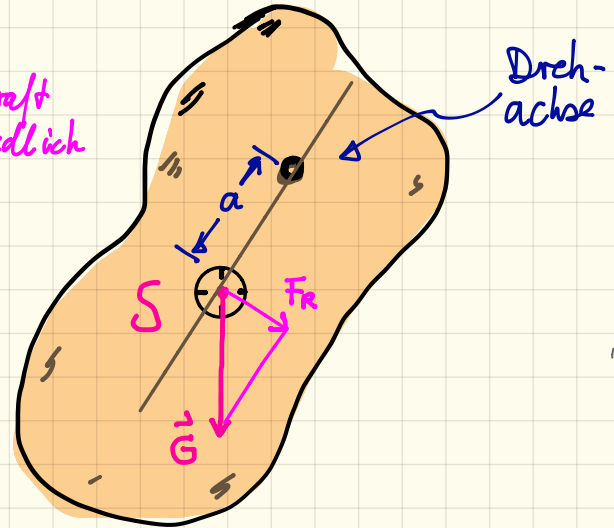
$$J\ddot{\omega} = -lmg \sin \alpha$$

$$\sin \alpha \approx \alpha$$

$$J = m l^2 \text{ f. Punktmasse}$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l} \alpha, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Physikal. Pendel (ausgedehnter Körper)



" $\vec{G}$ greift im Schwerpunkt an"

$$J = J_S + m a^2$$

$$J\ddot{\omega} = -a m g \sin \alpha$$

$$J = J_S + m a^2 \text{ Steiner!}$$

$$\ddot{\alpha} = - \frac{a m g}{J_S + m a^2} \propto$$

$$\omega = \sqrt{\frac{a m g}{J_S + m a^2}}$$

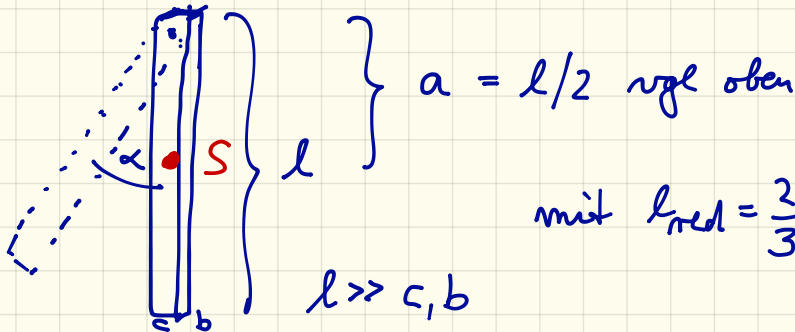
vgl. math. Pendel $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

↖ reduzierte
Pendellänge

gibt die Lage des
"Schwingungsmittelpunktes" an

$$l_{\text{red}} = \frac{J_S + m a^2}{a m}$$

Stangenpendel:



$$J_S = \frac{1}{12} m l^2$$

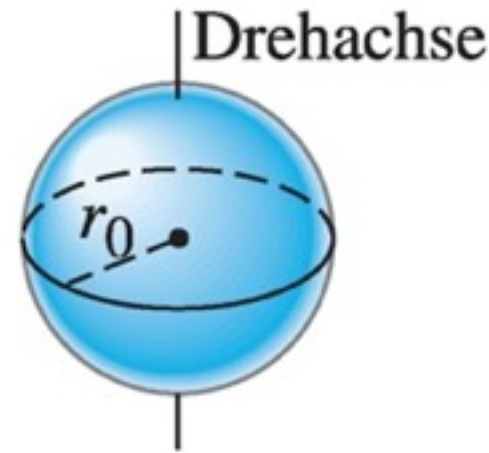
$$\omega = \sqrt{\frac{l/2 m g}{m \left(\frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{4} l^2 \right)}} = \sqrt{g / l_{\text{red}}}$$

mit $l_{\text{red}} = \frac{2}{3} l$

Körper	Ort der Drehachse	Trägheitsmoment
(a) Dünner Reifen mit Radius R_0	Durch den Mittelpunkt	MR_0^2
(b) Dünner Reifen mit Radius R_0 und Breite b	Durch zentralen Durchmesser	$\frac{1}{2}MR_0^2 + \frac{1}{12}Mb^2$
(c) Massiver Zylinder mit Radius R_0	Durch den Mittelpunkt	$\frac{1}{2}MR_0^2$
(d) Hohlzylinder mit Innenradius R_1 und Außenradius R_2	Durch den Mittelpunkt	$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$

(e) Homogene Kugel
mit Radius r_0

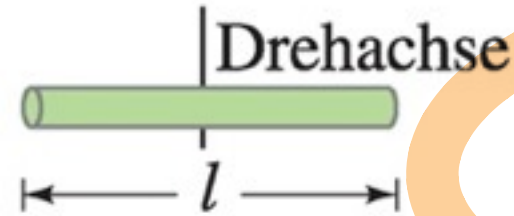
Durch den
Mittelpunkt



$$\frac{2}{5} M r_0^2$$

(f) Lange, homogene
Stange mit l Länge

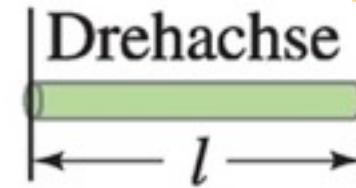
Durch den
Mittelpunkt



$$\frac{1}{12} M l^2$$

(g) Lange, homogene
Stange mit l Länge

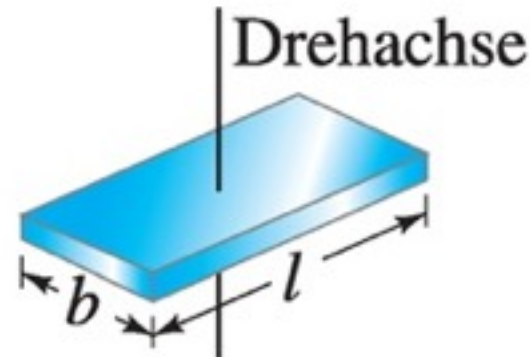
Durch ein
Ende



$$\frac{1}{3} M l^2$$

(h) Rechteckige dünne
Platte mit Länge l
und Breite b

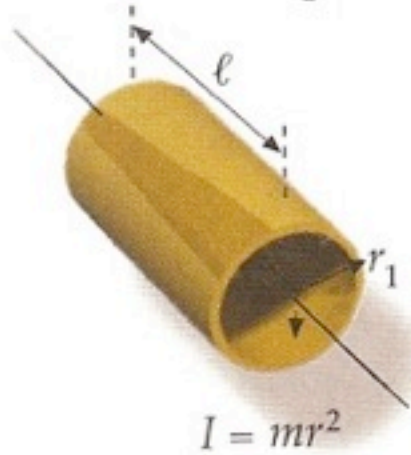
Durch den
Mittelpunkt



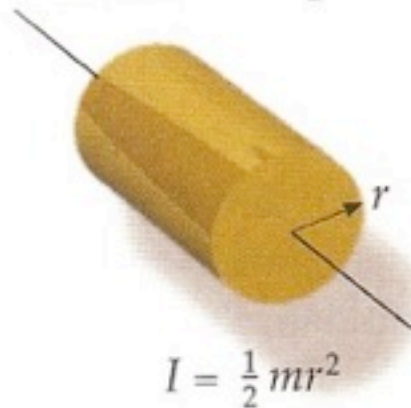
$$\frac{1}{12} M (l^2 + b^2)$$

Beisp.

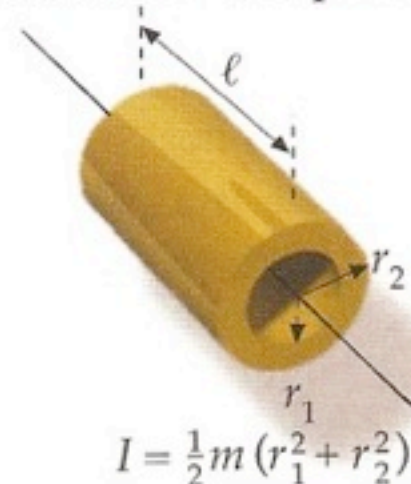
Zylinder mit dünnem Mantel
Drehachse = Körperachse



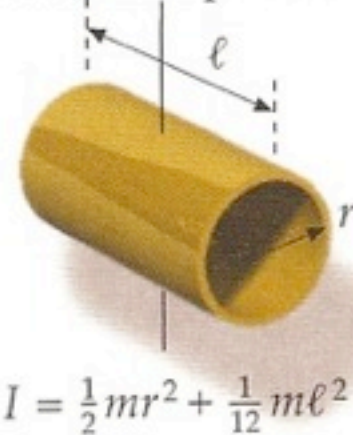
Massiver Zylinder
Drehachse = Körperachse



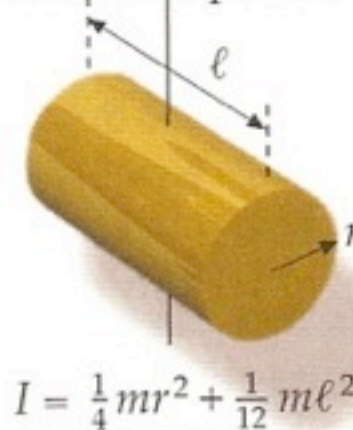
Hohlzylinder
Drehachse = Körperachse



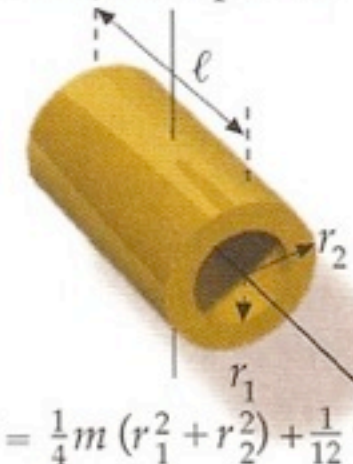
Zylindermantel
Drehachse $\perp$ Körperachse
durch Mittelpunkt



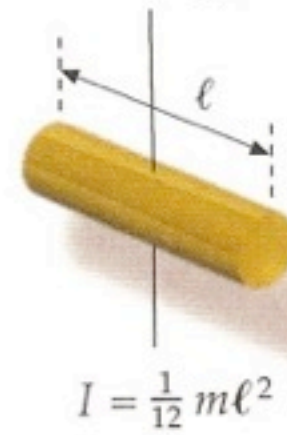
Massiver Zylinder
Drehachse $\perp$ Körperachse
durch Mittelpunkt



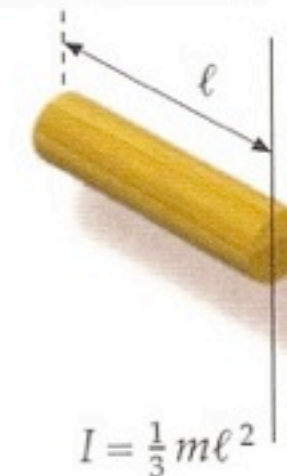
Hohlzylinder
Drehachse $\perp$ Körperachse
durch Mittelpunkt



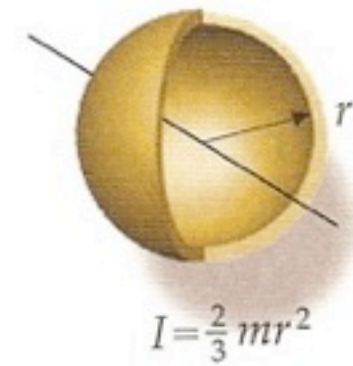
Dünner Stab
Drehachse $\perp$ Körperachse
durch Mittelpunkt



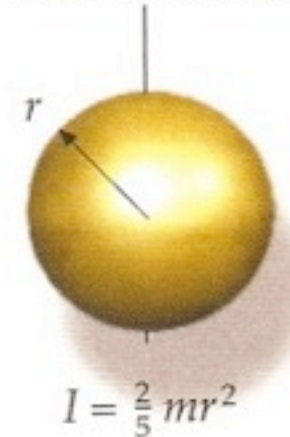
Dünner Stab
Drehachse $\perp$ Körperachse
durch ein Ende



Dünne Kugelschale
Drehachse durch Mittelpunkt



Massive Kugel
Drehachse durch Mittelpunkt



Massiver Quader
Drehachse $\perp$ Oberfläche
durch Mittelpunkt

