Karlsruher Institut für Technologie

letzte Stunde im

Klassische Physik 1

WS 2014/15 !

Johannes Blümer

v29 12. Februar 2015

KIT-Centrum Elementarteilchen- und Astroteilchenphysik KCETA

Zusammenfassung von v28

harmonische Wellen : $y = y_0 \sin(kx - \omega t)$ $\qquad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

(Saite $\rightarrow$) Wellengleichung : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ $\qquad (v^2 = \mu / F)$

$$\omega^2 = v^2 k^2$$

Demonstrationen!

Superposition $\rightarrow$ Interferenz von Wellen

Math. Einschub: Additionstheoreme

Erinnerung komplexe Zahlen:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

$$e^{-i\alpha} = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha) \quad \text{Argument-VZW}$$

$$= \cos\alpha - i\sin\alpha$$

$$e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos\alpha \quad \text{durch Addition}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}} \leftarrow \text{Symmetrie } \cos\alpha = \cos(-\alpha)\,!$$

$$e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i\sin\alpha \quad \text{durch Subtraktion}$$

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}} \leftarrow \text{Antisymmetrie } \sin\alpha = -\sin(-\alpha)\,!$$

Additionstheorem für $\boxed{\sin\alpha + \sin\beta}$ gesucht! Versuche Ausdrücke als Funktion von $\boxed{\alpha+\beta}$ und $\boxed{\alpha-\beta}$ zu finden... was sonst?

$$\sin\alpha + \sin\beta =$$

$$\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i} + \frac{e^{i\beta}-e^{-i\beta}}{2i} = \frac{e^{i\alpha}+e^{i\beta}-e^{-i\alpha}-e^{-i\beta}}{2i}$$

$$= \frac{1}{2i}\Big[e^{\frac{i}{2}(\alpha-\beta+\alpha+\beta)} + e^{\frac{i}{2}(\alpha+\beta+\beta-\alpha)} - e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\beta+\alpha+\beta)} - e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\beta+\beta-\alpha)}\Big]$$

$$= \frac{1}{2i}\Big[\underbrace{e^{\frac{i}{2}(\alpha-\beta)}e^{\frac{i}{2}(\alpha+\beta)}}_{1} + \underbrace{e^{\frac{i}{2}(\alpha+\beta)}e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\beta)}}_{2} - \underbrace{e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\beta)}e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\beta)}}_{3} - \underbrace{e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\beta)}e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\beta)}}_{4}\Big]$$

$$= \frac{1}{2i}\Big[\underbrace{e^{\frac{i}{2}(\alpha-\beta)}}_{1,4} + \underbrace{e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\beta)}}_{2,3}\Big]\Big[\underbrace{e^{\frac{i}{2}(\alpha+\beta)}}_{1,2} - \underbrace{e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\beta)}}_{4,3}\Big]$$

$$= 2\cdot\frac{e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}}{2}\cdot\frac{e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}-e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}}{2i}$$

$$= 2\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad \checkmark \text{ q.e.d.}$$

$$= \sin\alpha \boxed{+} \sin\beta$$

Superposition/Interferenz von Wellen

V28 letzte Seite

Betr. harm. Welle: $y_1 = \underset{\text{Amp.}}{A} \cdot \underset{\text{harm.}}{\sin} \underbrace{(kx - \omega t)}_{\text{" phase "}}$

2. Welle: $y_2 = A \cdot \sin(kx - \omega t + \underbrace{\delta}_{\text{Phasenverschiebung}})$ $\quad \delta > 0$

Phasendifferenz der Wellen an best. Ort x als Funk. der Zeit:

$$(kx - \omega t_1) - (kx - \omega t_2 + \delta) = \omega(\underbrace{t_2 - t_1}) - \delta$$

$$= \omega \cdot \Delta t - \delta$$

gleiche Phase: $\omega \cdot \Delta t - \delta \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \Delta t = \delta / \omega > 0, \quad t_2 > t_1$$

" 2. Welle geht um δ/ω nach "

Jetzt Phasendifferenz bei gleichen Zeiten:

$$(kx_1 - \omega t) - (kx_2 - \omega t - \delta) = k(x_1 - x_2) - \delta = k\,\Delta x - \delta$$

gleiche Phase $k\,\Delta x - \delta \overset{!}{=} 0 \longrightarrow \Delta x = \delta/k = \lambda \frac{\delta}{2\pi}$ „Ganguntershied"

$$x_2 = x_1 + \lambda \frac{\delta}{2\pi}$$

Überlagerung $y_1 + y_2$ ausführen und als Fkt. von δ untersuchen:

$$y_1 + y_2 = \underline{\underline{A}} \cdot \sin(\underbrace{kx - \omega t}_{\alpha}) + \underline{\underline{A}} \sin(\underbrace{kx - \omega t + \delta}_{\beta})$$

$$= A\left[\sin\alpha + \sin\beta\right] = A \cdot 2 \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$= \underbrace{2A\cos\frac{\delta}{2}}_{\text{neue Amplitude}} \cdot \underbrace{\sin\left(kx - \omega t + \delta/2\right)}_{\text{harmon. Anteil mit gleicher Wellenzahl, Freq, neue Phase}}$$

$\delta = 0$ $\quad \cos\frac{\delta}{2} = 1$ $\quad \rightarrow$ doppelte Amplitude

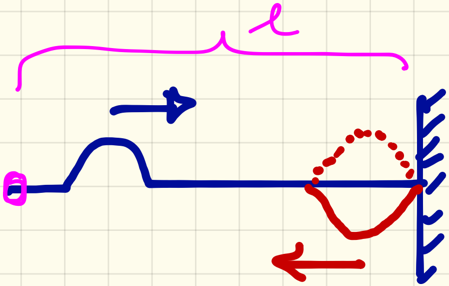
1-dim Demo mit Wellenwanne! ?

$\delta = \pi$ $\quad 180°$ $\quad$ Wellen sind gegenläufig

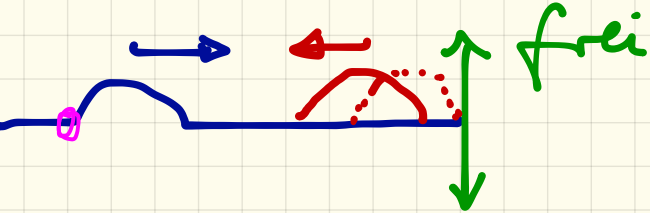
$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ Auslöschung "destruktive Interferenz"

gegenläufige Wellen

"Reflexion am Ende"



Reflexion am festen Ende : $\delta = \pi$



Reflexion am offenen Ende $\delta = 0$

Wellenfunktion für stehende Wellen aus Überlag. von links- und rechtsläufigen Wellen

$$y_R = A \sin(kx - \omega t)$$

$$y_L = A \sin(kx + \omega t) \qquad k = 2\pi/\lambda \qquad \omega = 2\pi f.$$

$$y = y_R + y_L = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t)$$

$$= 2A \cos \omega t \cdot \sin kx$$ "Faktorisierung von Orts- und Zeitabhängigkeit"

Randbedingungen:

"fest - fest" $\quad x = 0, \; x = l \; : \; y(0) = 0 = y(l) \longrightarrow \sin(kl) = 0$

$$k_n l = n \pi , \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

"fest - offen" $\quad y(l) = \max! \quad \sin(kl) = 1$

$$k_m l = n \cdot \frac{\pi}{2} , \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$

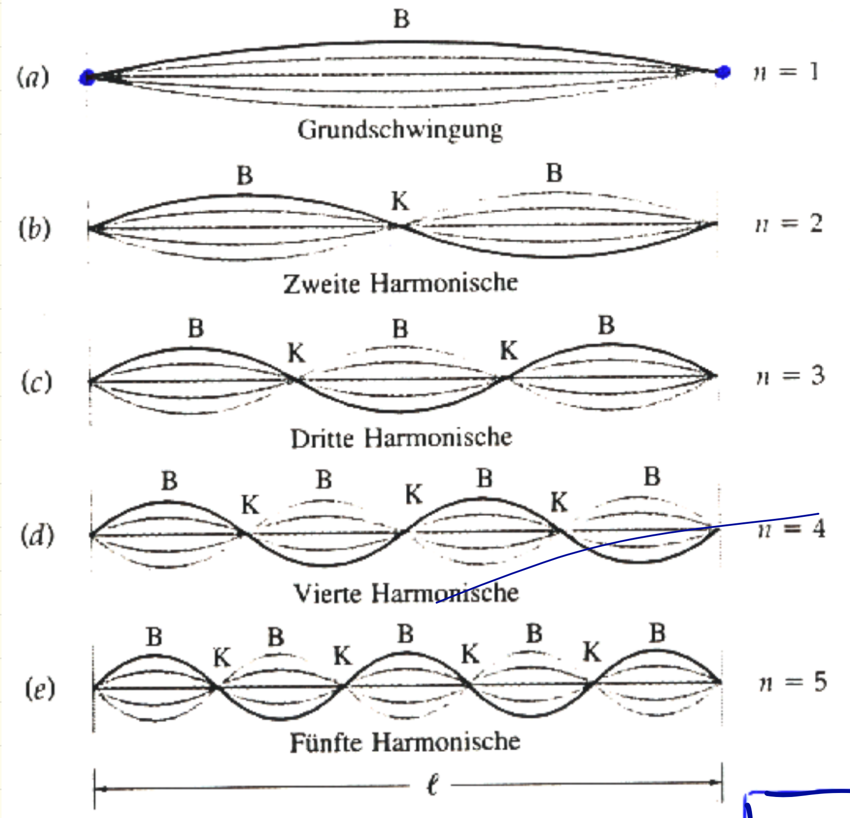
$$k_m l = (2m - 1)\frac{\pi}{2} , \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Allg. für die "n-te Eigenschwingung"

$$y_n(x,t) = A_n \cos(\omega_n t) \cdot \sin(k_n x)$$

Stehende Wellen

beide Enden fest



$\ell = \lambda/2$

λ

$\frac{3}{2}\lambda$

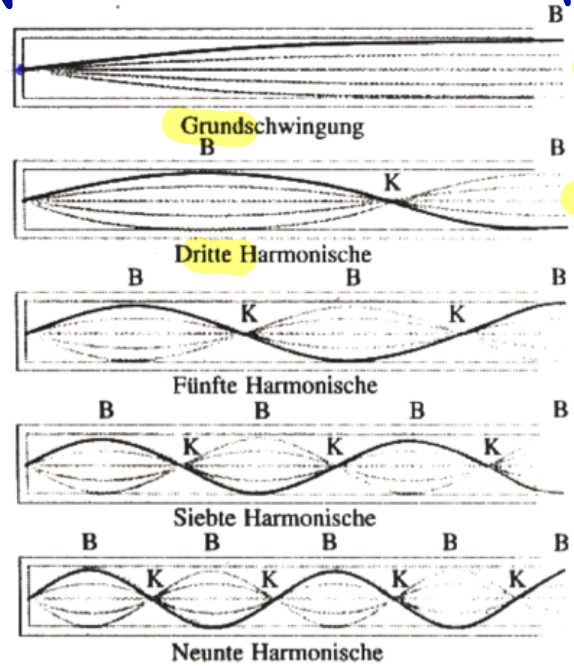
2λ

$\frac{5}{2}\lambda$

$\lambda_n f_n = v$

fest, $f_n = n \frac{v}{2\ell}$ $\quad v = 2\ell \frac{f_n}{n}$ $\quad \boxed{\ell = n\frac{\lambda}{2}}$

fest offen



m=1

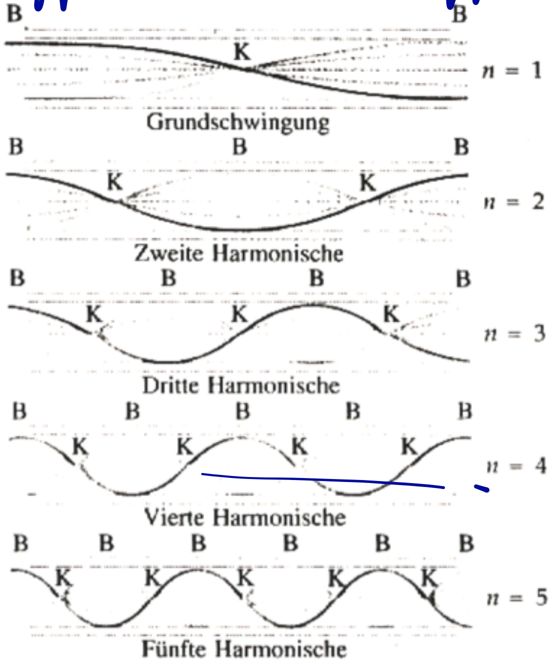
m=2

3

4

5

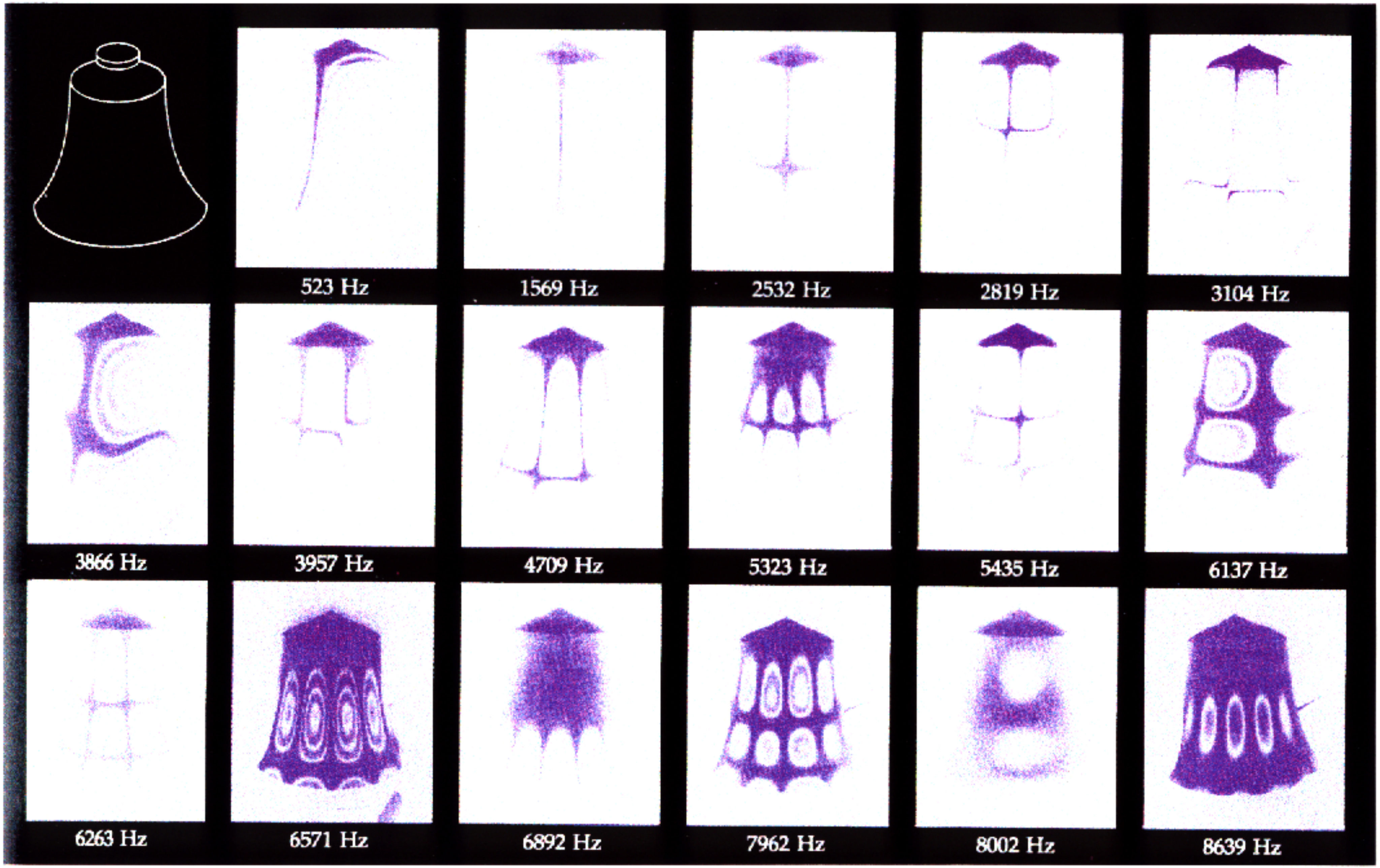
offen offen



ℓ

$$\ell = n\frac{\lambda}{4} = \frac{2m-1}{4}\lambda$$

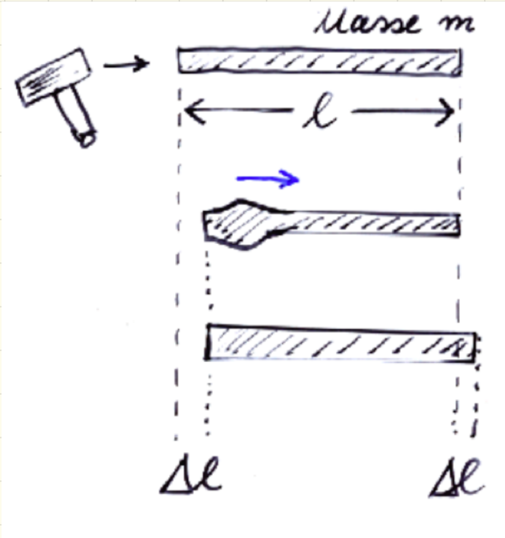
$$\ell = n\frac{\lambda}{2}$$ wie bei "fest-fest"


523 Hz
1569 Hz
2532 Hz
2819 Hz
3104 Hz
3866 Hz
3957 Hz
4709 Hz
5323 Hz
5435 Hz
6137 Hz
6263 Hz
6571 Hz
6892 Hz
7962 Hz
8002 Hz
8639 Hz

Schall

wellenförmige Ausbreitung v. Druck- und Dichteschwankungen in elastischen Medien

Longitudinalwellen



Querschnitt A
Dichte ρ

$t = 0$

Elastizitätsmodul

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F/A}{\Delta\ell/\ell}$$

Ausbreitung

$$t = \Delta t \; ; \quad v = \frac{\Delta\ell}{\Delta t}$$

Aus E-Modul $\quad F_\sigma = \dfrac{\Delta\ell \cdot E \cdot A}{\ell}$

$$F_a = m\,a = (\rho \ell A)\frac{\Delta v}{\Delta t}$$
$$= \rho \ell A \, \Delta\ell / \Delta t^2$$

$$F_E = F_a$$

$F_E = F_a$: $\frac{\Delta \ell \, E A}{\ell} = \varrho \, \ell \, A \frac{\Delta \ell}{\Delta t^2}$

$\frac{E}{\varrho} = \frac{\ell^2}{\Delta t^2} = \left(\frac{\ell}{\Delta t}\right)^2 = v_s^{\,2}$

also $v_s = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$

ähnlich für Flüssigkeiten: $v_s = \sqrt{\frac{K}{\varrho}}$

K Kompressionsmodul $= -\Delta P / \Delta V/V$

v_s "hoch"

Gase: $K \propto P \propto \varrho T \Rightarrow \frac{K}{\varrho} \propto T$

T abs. Temperatur in Kelvin

$v_s = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$

γ Adiabaten-Koeff. ≈ 1.4 für 2-atomige Gase

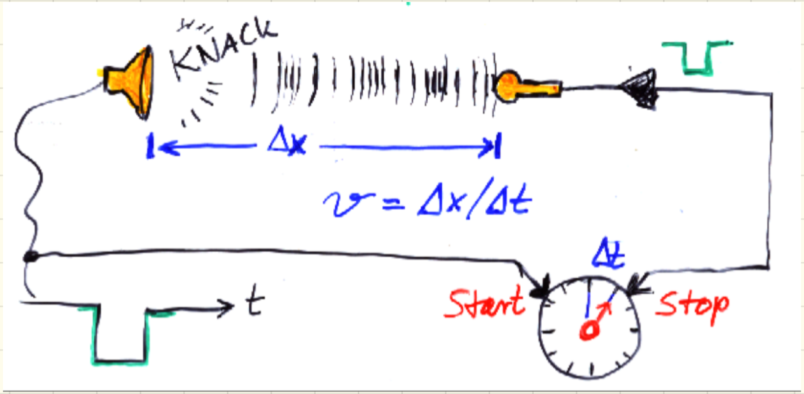
$R = 8.3 \; J/(\text{mol}\, K)$

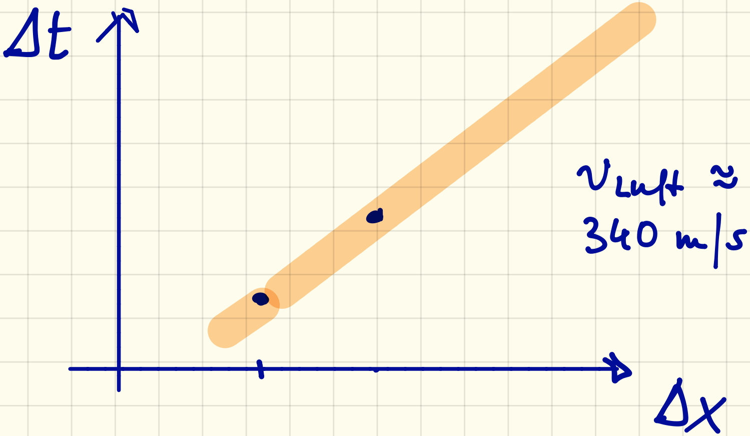
M molare Masse

$1 \text{ Mol} = 6 \cdot 10^{23}$ Teilchen

Luft: 29 gr/mol

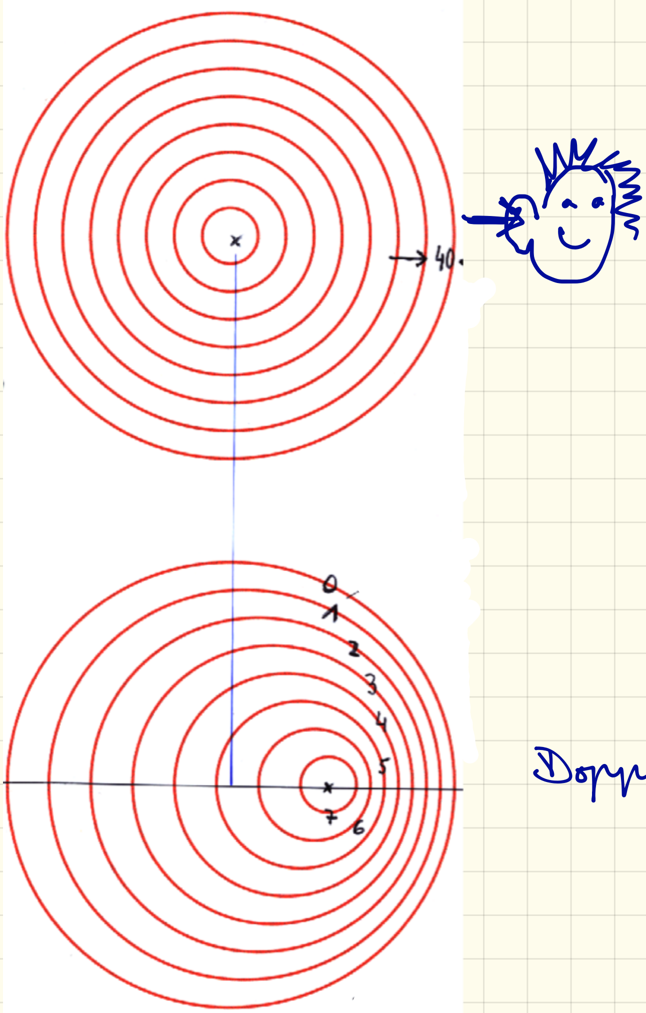
Messung der Schallgeschwindigkeit





Δx [cm]	Δt [μs]
330	971
400	1174
450	1316
500	1467
550	1612
600	1753
650	1901
700	2046
750	2191
800	2319

$\sigma_x < 1\,\mathrm{cm}$ $\sigma_t = ?$



Dopplereffekt!

kleine Geschwindigk.:

$$\Delta f / f \approx \pm \frac{v_s}{v}$$