Karlsruher Institut für Technologie

Vorlesung Klassische Mechanik, WS 2022/2023

Integrierter Kurs: Experimentelle und Theoretische Physik

Andreas Naber, Carsten Rockstuhl, Martin Wegener

1. Einleitung

1.1. Was ist Physik? Worum geht es in der Mechanik?

- Die Physik beschreibt die Vorgänge in der Natur durch mathematisch formulierte Gesetze. In seinem Buch „Our Mathematical Universe“ spricht Max Tegmark sogar von einem Isomorphismus zwischen Natur und Mathematik.
- In der Mechanik führen die Newtonschen Gesetze zu Bewegungsgleichungen (= gewöhnliche bzw. partielle Differentialgleichungen). Diese Gesetze fassen die Erfahrung der Menschheit zur Mechanik zusammen.

> Bemerkung: In der Theorie B werden Sie lernen, dass man die Bewegungsgleichungen auch auf andere Arten erhalten kann (Lagrange- und Hamilton-Mechanik). Die Hamilton-Mechanik dient dann auch als Brücke zur Quantenmechanik.

- Als „Input“ für die Bewegungsgleichungen in der Mechanik benötigt man Anfangsbedingungen und „Kräfte“. Die Kräfte erhält man aus anderen Bereichen der Physik, nicht aus der Mechanik.
- Als „Output“ der Bewegungsgleichungen erhält man die Positionen und die Konfiguration von massebehafteten Objekten zu anderen Zeiten (z.B. Teilchen, starre Körper, elastische Körper, Gase, Flüssigkeiten, Wolken, etc.).
- Mit Hilfe der Bewegungsgleichungen kann man also Vorhersagen machen, bzw. durch Vergleich von Vorhersage und Messung die zu Grunde liegenden physikalischen Gesetze auf Konsistenz mit der beobachteten Realität überprüfen.

> Früher sprach man in der Wissenschaftsphilosophie davon, dass physikalische Gesetze nicht verifiziert, sondern nur falsifiziert werden könnten.

- Das mathematische Lösen der Bewegungsgleichungen kann sehr schwierig sein.

  Beispiel: Wie fließt Wasser durch ein zylindrisches Rohr? Wetter und Klima.

- Häufig verwendet man daher in der Praxis zum Lösen numerische Methoden.

> Wir integrieren von Anfang an numerische Methoden und das Arbeiten mit Computern in Vorlesung und Übungen.

- In der Physik spielen idealisierte Modellsysteme, die man ggf. vollständig analytisch lösen kann, eine herausgehobene Rolle.

  Beispiele: Harmonischer Oszillator, elastische Stoßprozesse, Kepler-Problem, ideale Gase, ideale Flüssigkeiten, etc.

Zur Abgrenzung sei gesagt, dass wir hier in dieser Vorlesung keine Effekte diskutieren, die zur Beschreibung die allgemeine Relativitätstheorie oder die Quantenmechanik benötigen.

Vereinheitlichung von allgemeiner Relativitätstheorie und Quantenmechanik ist Gegenstand der aktuellen Forschung.

1.2. Physikalische Größen und die SI Basiseinheiten

- Messungen sind immer ein Vergleich von physikalischen Größen mit Standards.

  Beispiele: Wiegen von Äpfeln mit einer Waage und Standard-Gewichten.
  Ermitteln einer Länge durch Vergleich mit der „Elle“ am Rathaus.

Bildquelle: [1] amazon.de, [2] wikipedia.org

Vorlesungsexperiment

- Die Angabe einer physikalischen Größe erfordert daher immer die Angabe einer Maßzahl und einer Einheit (und ggf. zudem einer Messunsicherheit).

Physikalische Größe = Maßzahl × Einheit

Unbedingt Merken

- Beispiele:
  - Zeit t = 10.0034 s $[t]$ = s
  - Länge x = 100 m $[x]$ = m
  - Masse m = 3.14 kg $[m]$ = kg

- Die Schreibweise “$[t]$ = s” bedeutet: Die Einheit der Größe Zeit ist Sekunde.

- Mathematisch können physikalische Größen auf verschiedene Art beschrieben werden.

1. Skalar: Zahlenwert (Maßzahl) + Einheit (Maßeinheit)
   z.B. Masse oder Volumen eines Körpers

2. Skalares Feld: skalare Größe in jedem Raumpunkt
   z.B. Temperatur oder Druck

3. Vektor : Betrag + Richtung, n-dimensionales mathematisches Objekt
   z.B. Geschwindigkeit oder Kraft

   $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ = Menge der n-Tupel $(x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$

4. Vektorfeld: vektorielle Größe in jedem Raumpunkt
   z.B. Ort oder Kraftfeld

Details zu Vektoren

Üblicherweise betrachten wir Probleme im 3D (kartesischen) Raum

$$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

> Allgemein soll die Typographie in der eine physikalische Größe geschrieben wird Auskunft geben über deren mathematischen Charakter. „Die Form sagt etwas über den Inhalt.“ Während skalare Größen tendenziell durchgängig kursiv geschrieben werden, gibt es (leider) unterschiedliche Notationen für Vektoren.

$$\mathbf{a} \equiv \vec{\mathrm{a}} \equiv \underline{a}$$

- Beispiel: Ortsvektor $\mathbf{r}$ beschreibt Punkte im Euklidischen Raum.
- Ortsvektor wird erst eindeutig durch die Definition eines Koordinatenursprungs.
- Jeder beliebige Punkt kann als Koordinatenursprung definiert werden mittels einer geeigneten Translation, Rotation oder „Boost“.

> Koordinatenursprung = Bezugssystem = Nullpunkt $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \mathbf{r}$

- Festlegung der Richtung benötigt eine Referenzrichtung: Koordinatensystem

- Beispiel: kartesisches Koordinatensystem
  - gebildet aus drei senkrecht aufeinander stehenden Geraden, die sich in einem Punkt, dem Koordinatenursprung, schneiden
  - Richtung der Geraden wird definiert durch Einheitsvektoren
  - Die Einheitsvektoren haben die Länge eins

Orthonormale Basis:

$$\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektor:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z$$

- Das System Internationale d‘Unites (SI Einheitensystem) legt die gesetzlich zulässigen Einheiten fest, d.h. alle anderen Einheitensysteme sind nicht zulässig.

> Diese Vereinbarung wurde von (fast) allen Staaten unterzeichnet (eine Ausnahme ist Nordkorea). Einige Staaten halten sich aber in der Praxis z.T. nicht immer an die SI Einheiten (siehe z.B. „Fuß“, „Zoll“, „Inch“, „Gallone“, „engl. Pfund“).
>
> In Deutschland ist die Physikalische Technische Bundesanstalt (PTB) für die Rückführung auf die SI Einheiten zuständig. Eichämter tragen die SI Einheiten dann hin zu Geräteherstellern und Anwendern, z.B. Metzgereien.

- Man unterscheidet zwischen

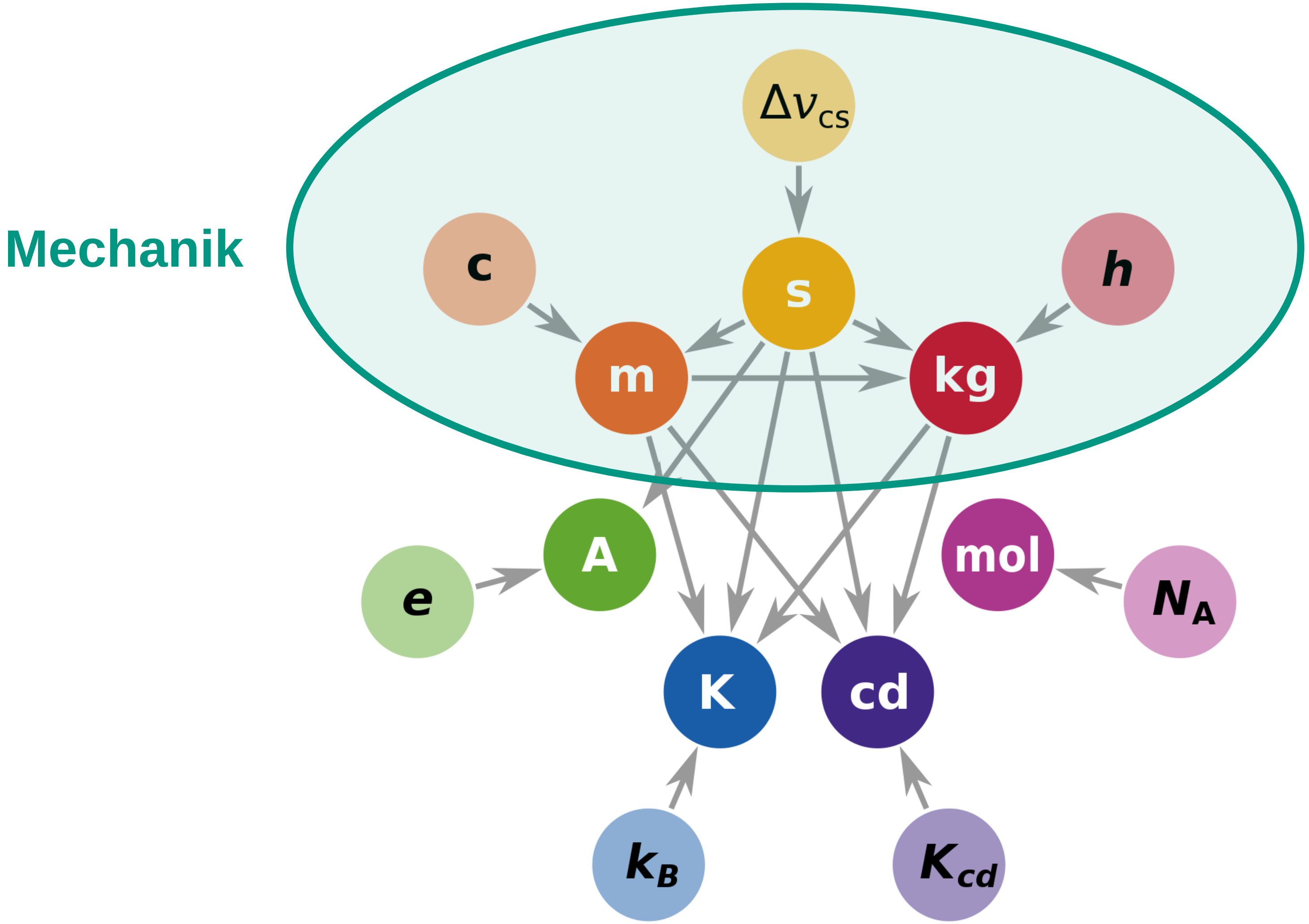
  Basiseinheiten
  Abgeleitete Einheiten

- Seit 20. Mai 2019 werden im SI Einheitensystem alle Basiseinheiten auf Naturkonstanten zurückgeführt.

> Bemerkung: Eine Ausnahme bildet in der Optik das „Candela“. Hier wird statt einer Naturkonstanten eine bestimmte (mensch-bezogene) Konstante verwendet.

- Diese Naturkonstanten kann man daher nicht mehr unabhängig messen, sie sind gleichsam *qua Gesetz* festgelegt. Man kann aber schon Konsistenztests durchführen.

Basiseinheiten und Naturkonstanten



Bildquelle: wikipedia.org

Die SI Basiseinheit Sekunde

Sekunde

Die Sekunde (Symbol s) ist die SI-Einheit der Zeit. Sie wird definiert durch die Konstante der Cäsiumfrequenz $\Delta\nu$, der Frequenz des ungestörten Hyperfeinübergangs des Grundzustands des Cäsium-Isotops ^{133}Cs. Der Zahlenwert dieser Konstante ist auf 9 192 631 770 festgelegt, wenn sie in der Einheit Hz bzw. s^{-1} angegeben wird.

Diese Definition legt $\Delta\nu$ fest zu 9 192 631 770 s^{-1}. Löst man diese Beziehung nach der Einheit s auf, so ergibt sich:

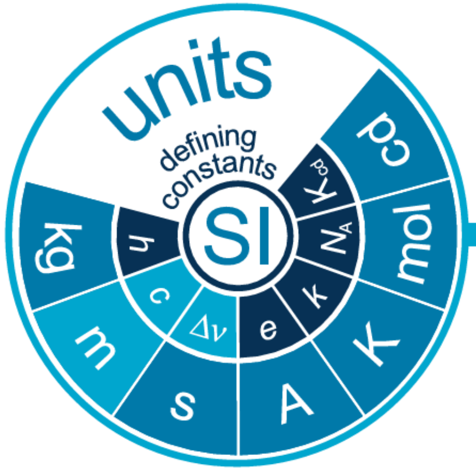
$$1\,\mathrm{s} = \frac{9\,192\,631\,770}{\Delta\nu} \quad \text{oder} \quad 1\,\mathrm{Hz} = \frac{\Delta\nu}{9\,192\,631\,770}$$

Das heißt, eine Sekunde ist gleich der Dauer von 9 192 631 770 Schwingungen der Strahlung, die der Energie des Übergangs zwischen den zwei Hyperfeinstrukturniveaus des ungestörten Grundzustands im ^{133}Cs-Atom entspricht.

Qelle: Lesezeichen_zum_neuen_SI_System_PTB.pdf

Die SI Basiseinheit Meter

Meter



Der Meter (Symbol m) ist die SI-Einheit der Länge. Er wird definiert durch die Konstante der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum *c*. Der Zahlenwert dieser Konstante ist auf 299 792 458 festgelegt, wenn sie in der Einheit m s^{-1} angegeben wird und die Sekunde durch $\Delta\nu$ definiert ist.

Diese Definition gibt *c* den Wert 299 792 458 m s^{-1}. Löst man diese Beziehung nach der Einheit m auf, so ergibt sich:

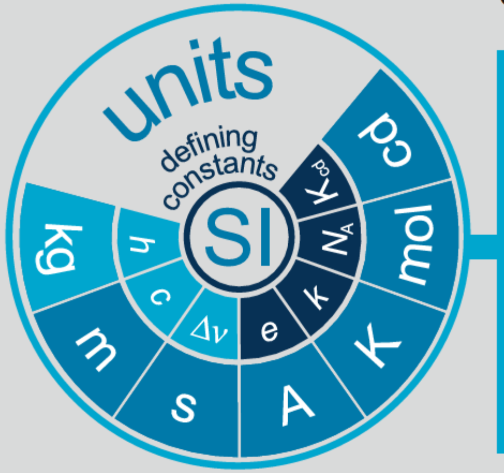
$$1\ \mathrm{m} = \left(\frac{c}{299\,792\,458}\right)\mathrm{s} = \frac{9\,192\,631\,770}{299\,792\,458}\,\frac{c}{\Delta\nu} \approx 30,663\,319\,\frac{c}{\Delta\nu}$$

Das heißt, ein Meter ist gleich der Strecke, die Licht im Vakuum innerhalb des Bruchteils von 1/299 792 458 einer Sekunde zurücklegt.

Qelle: Lesezeichen_zum_neuen_SI_System_PTB.pdf

Die SI Basiseinheit Kilogramm

Kilogramm



Das Kilogramm (Symbol kg) ist die SI-Einheit der Masse. Es wird definiert durch die Konstante des Planck'schen Wirkungsquantums h. Der Zahlenwert dieser Konstante ist auf 6,626 070 15 · 10^{-34} festgelegt, wenn sie in der Einheit J s bzw. kg m^2 s^{-1} angegeben wird und die Sekunde und der Meter durch $\Delta\nu$ und c definiert sind.

Diese Definition gibt h den Wert 6,626 070 15 · 10^{-34} kg m^2 s^{-1}. Löst man diese Beziehung nach der Einheit kg auf, so ergibt sich:

$$1\,\text{kg} = \left(\frac{h}{6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}}\right) \text{m}^{-2}\,\text{s}$$

$$= \frac{(299\,792\,458)^2}{(6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34})\,(9\,192\,631\,770)} \frac{h\,\Delta\nu}{c^2} \approx 1,475\,5214 \cdot 10^{40} \frac{h\,\Delta\nu}{c^2}$$

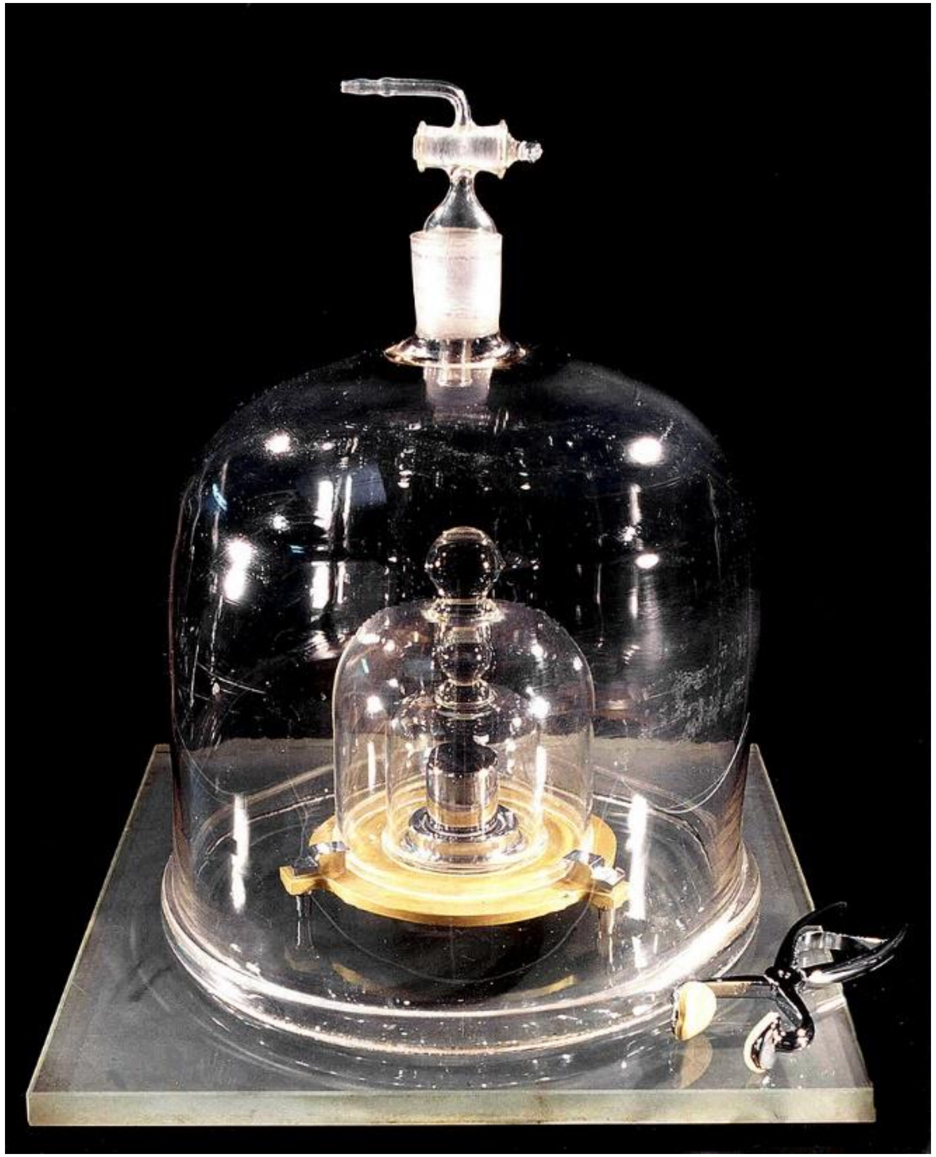
Das heißt, die Einheit kg wird mit der Wirkung (Einheit: kg m^2 s^{-1}) verknüpft, einer physikalischen Größe in der theoretischen Physik. Zusammen mit der Definition für die Sekunde und den Meter ergibt sich die Definition für das Kilogramm als Funktion des Planck'schen Wirkungsquantums h.

Qelle: Lesezeichen_zum_neuen_SI_System_PTB.pdf

Die SI Basiseinheit Kilogramm (alt)

- Der Prototyp „Urkilogramm“ in Paris war unter drei evakuierten Glasglocken geschützt.
- Er „verlor“ über die Jahre ca. 50 µg im Vergleich zu seinen Kopien in anderen Ländern.

  Dies entspricht einer relativen Änderung von fast 10^{-7}, d.h. schon die siebte Nachkommastelle war unsicher.



Bildqelle: ptb.de

Zusammenfassung SI Basiseinheiten der Mechanik

- Eine **Sekunde** (1 s) ist das 9 192 631 770-fache der Periodendauer $1/\Delta\nu$ der Strahlung, die dem Übergang zwischen den beiden Hyperfein-Niveaus des Grundzustandes von ^{133}Cs entspricht.
- Ein **Meter** (1 m) ist der Weg, den das Licht im Vakuum innerhalb von 1 / 299 792 458 Sekunde durchläuft.
- Ein **Kilogramm** (1 kg) ist so definiert, dass sich das Plancksche Wirkungsquantum h ergibt zu $h = 6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$.

> Bemerkung: Es ist etwas unglücklich, dass das Plancksche Wirkungsquantum h in der klassischen Mechanik ansonsten gar nicht auftaucht, die Masse aber schon.
>
> In der Quantenelektrodynamik und Quantenmechanik gilt: Energie = h × Frequenz. Zudem sind Energie und Masse in der Relativitätstheorie zueinander äquivalent.

Unbedingt Merken

Übersichtliche Darstellung durch Präfixe

Zehnerpotenz	Name	Abkürzung
10^{1}	Deca	da
10^{2}	Hecto	h
10^{3}	Kilo	k
10^{6}	Mega	M
10^{9}	Giga	G
10^{12}	Tera	T
10^{15}	Peta	P
10^{18}	Exa	E
10^{21}	Zetta	Z
10^{24}	Yotta	Y

Zehnerpotenz	Name	Abkürzung
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	µ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a
10^{-21}	zepto	z
10^{-24}	yocto	y

Beispiele für Nutzung von Präfixen

$$t = 10^{-15}\ \mathrm{s} = 0.000000000000001\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{fs}$$

$$x = 10^{3}\ \mathrm{m} = 1000\ \mathrm{m} = 1\ \mathrm{km}$$

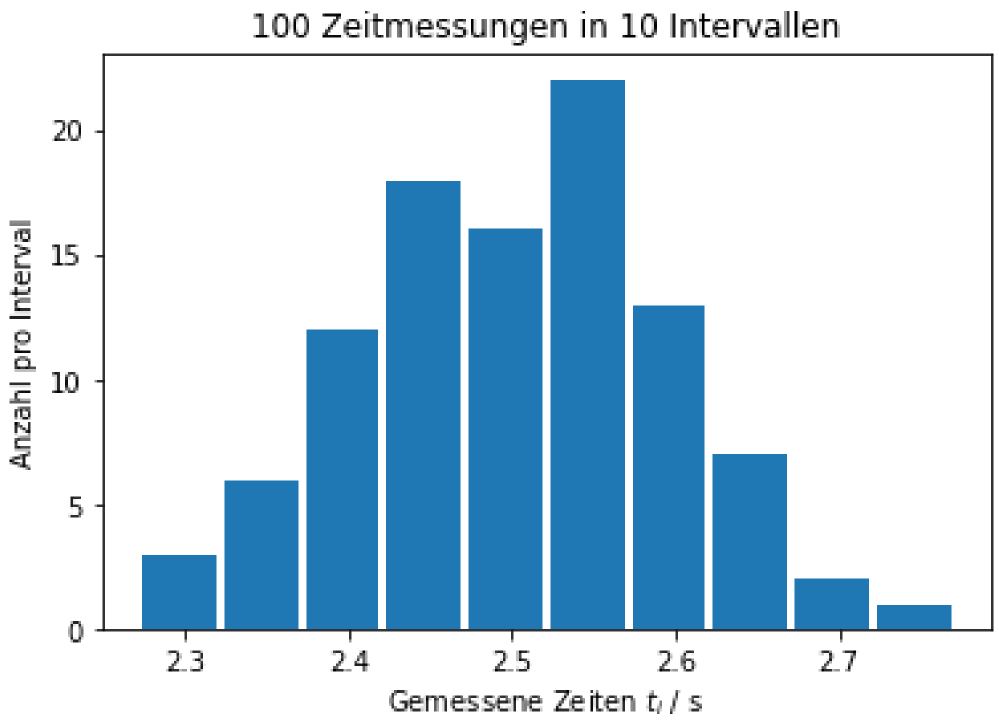
$$m = 10^{-6}\ \mathrm{kg} = 0.001\ \mathrm{g} = 1\ \mathrm{mg}$$

Bemerkung: Die physikalischen Einheiten sowie die Präfixe setzt man üblicherweise aufrecht („roman"). Physikalische sowie mathematische Größen setzt man hingegen kursiv („italic").

Diese Kombination erlaubt eine bessere Lesbarkeit der Formeln.

1.3. Messfehler

- Bei Messungen treten Messunsicherheiten bzw. Messfehler auf.
- Wir unterscheiden zwischen statistischen Fehlern und systematischen Fehlern.
- Die Grafik zeigt in Form eines Histogramms beispielhaft das Ergebnis vieler einzelner Zeitmessungen mit Index $i = 1, \ldots, N$.



Vorlesungsexperiment

- Um das Ergebnis solcher Messserien besser kommunizieren zu können, führt man zusammenfassende Größen ein.

- Wir **definieren** den Mittelwert $\langle t \rangle$ von N Einzelmessungen

$$\langle t \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{N}$$

> Für $N \to \infty$ spricht man vom Erwartungswert einer physikalischen Größe.

- Wir **definieren** die Standardabweichung σ_t der Einzelmessung

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (t_i - \langle t \rangle)^2}{N-1}}$$

Unbedingt Merken

- Die Standardabweichung ist ein Maß für die Breite der Verteilungsfunktion, also für den Messfehler bzw. die Messunsicherheit.
- Bei unabhängigen Einzelmessungen ergibt sich eine Normalverteilung bzw. Gauß-Verteilung als Wahrscheinlichkeitsdichte gemäß

$$f(t) = \frac{1}{\sigma_t\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-\langle t\rangle)^2}{\sigma_t^2}}$$

Bemerkung: Der Faktor vor der Exponentialfunktion ist hierbei so gewählt, dass für alle σ_t gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \quad \Rightarrow \quad [f] = \frac{1}{[t]} = 1/s$$

Bildquelle: wikipedia

- Die volle Halbwertsbreite FWHM („full width at half maximum“) der Verteilungsfunktion ergibt sich zu

$$\mathrm{FWHM} = 2\sqrt{2\ln(2)}\,\sigma_t \approx 2.36\,\sigma_t$$

Bemerkung: Manchmal verwendet man auch die halbe Halbwertsbreite HWHM, für die dann gilt

$$\mathrm{HWHM} = \sqrt{2\ln(2)}\,\sigma_t \approx 1.18\,\sigma_t$$

- Schließlich definieren wir noch die Standardabweichung des Mittelwerts gemäß

$$\sigma_{\langle t\rangle} = \frac{\sigma_t}{\sqrt{N}}$$

- Umso besser die Statistik ist, also je größer N ist, umso genauer kann man die Mittenposition der Gauß-Kurve bestimmen. Diese Bestimmung kann viel genauer sein als die Breite $\mathrm{FWHM} \propto \sigma_t$. Es gilt: $\lim_{N\to\infty} \sigma_{\langle t\rangle} = 0$.

> Bemerkung: In der Quantenmechanik gibt es für bestimmte Größen eine grundsätzliche untere Grenze für die Standardabweichung der Einzelmessung („Unschärferelationen“). Es gibt jedoch auch dort keine grundsätzliche untere Grenze für die Standardabweichung des Mittelwerts.

Beispiele

$$t = \langle t \rangle \pm \sigma_t = 1.02\ \mathrm{s} \pm 0.01\ \mathrm{s}$$

$$x = 7.23\ \mathrm{m}$$

Bemerkung: Nicht sinnvoll wäre beispielsweise die Angabe

$$t = 2.34567\ \mathrm{s} \pm 0.1\ s$$

Man kann die Messgenauigkeit also auch näherungsweise durch die Angabe einer sinnvollen Zahl von Nachkommastellen vermitteln.

Jupyter Notebook

- „Project Jupyter“ ist der Herausgeber von Softwareprodukten für interaktive wissenschaftliche Datenauswertung und wissenschaftliche Berechnungen [1].
- Wir werden Jupyter Skripte in dieser Vorlesung und den Übungen dazu verwenden, um Daten zu analysieren und einfache numerische Berechnungen durchzuführen.

- In diesem ersten Beispiel werden Mittelwert und Standardabweichung eines Datensatzes zur Magnetfeldmessung analysiert.

[1] wikipedia.org/wiki/Project_Jupyter

Fehlerfortpflanzung

- Zur Ermittlung einer physikalischen Größen müssen oft mehrere abhängige Größen gemessen werden. Jede davon hat i.A. ihre eigene Messunsicherheit.

- Beispiel: Geschwindigkeit = Strecke / Zeit, also

$$v = v(x,t) = \frac{x}{t} \text{ bzw. } \langle v \rangle = \frac{\langle x \rangle}{\langle t \rangle}$$

- Die Standardabweichung der Geschwindigkeitsmessung σ_v kann man mittels der Fehlerfortpflanzung aus den Standardabweichungen der Strecke σ_x und der Zeit σ_t abschätzen.

Fehlerfortpflanzung

- Für eine physikalische Größe $G = G(a, b, \dots)$ mit den physikalischen Variablen $a, b, \dots$ ergibt sich

$$\sigma_G = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \cdots}$$

- Hierbei ist $\frac{\partial G}{\partial a}$ die partielle Ableitung der Größe G nach a.
- Die partiellen Ableitungen werden beim Mittelwert evaluiert.

I. Gewöhnliche und partielle Ableitungen

- Betrachten eine gewöhnliche reelle Funktion $f = f(x)$ einer reellwertigen Variablen x.

- Die gewöhnliche Ableitung (der Differentialquotient) an der Stelle x ist definiert als der Grenzwert des Differenzenquotienten für gegen Null strebende Intervallbreite Δx

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

- Geometrisch bezeichnet man die Größe als die Steigung der Funktion an der Stelle x.

Bemerkung: Manchmal verwendet man auch die folgenden abkürzenden Schreibweisen

$$f' = f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$$ bzw. analog für die zweite Ableitung f''

$$\dot{f} = \dot{f}(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)$$ bzw. $\ddot{f}$

Beispiele

$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{2}x^2$	x
$x^a \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	ax^{a-1}
e^x	e^x
a^x	$\ln a \, a^x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	-$\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

$x \in \mathbb{R}$

Mathematischer Einschub

- Viele weitere Beispiele findet man in der Literatur oder im Internet.

Rechenregeln für Ableitungen

- Summenregel $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)$$
- Produktregel $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$
- Quotientenregel $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$
- Kettenregel $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(g(x))] = \frac{\mathrm{d}f(g)}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$$
- Reziprokenregel $$f(x) = \frac{1}{v(x)} \quad \rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{v^2(x)}\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}$$

Mathematischer Einschub

Ableitungen höherer Ordnung

- Für Funktionen die allgemein differenzierbar in der Umgebung von x sind, kann man die Ableitung dieser Funktion wieder als eine Funktion von x verstehen.

- Differentiation von dieser Ableitung $f(x)$ führt zur zweiten Ableitung von $f(x)$

$$(f')'(x) = f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x)$$

- n-faches Ableiten führt so zur n-ten Ableitung bzw. zur Ableitung n-ter Ordnung.

$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x)$$

Jupyter Notebook

- In diesem Beispiel demonstrieren wir, wie einfache Ableitungen berechnet werden können.

[1] wikipedia.org/wiki/Project_Jupyter

Partielle Ableitungen

- Wir betrachten nun eine reelle Funktion $f = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ von den N reellen Variablen $x_1, x_2, \dots, x_N$.

- Die partielle Ableitung nach der Variablen x_i an der Stelle $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots x_N$ ist wieder definiert als der Grenzwert des Differenzenquotienten für gegen Null strebende Intervallbreite Δx

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x, \dots, x_N) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N)}{\Delta x}$$

Partielle Ableitungen

Bemerkung: Auf den ersten Blick sieht die partielle Ableitung vielleicht recht kompliziert aus.

Das Rechnen ist aber in der Praxis ganz einfach.

Man betrachtet einfach alle anderen Variablen als Konstanten und leitet gemäß der Rechenregeln für die gewöhnliche Ableitung ab.

Partielle Ableitungen

- Sie können alle Rechenregeln so anwenden, wie wie sie früher diskutiert bei Funktionen, die explizit nur von einer Variablen abhängen.

- Mehrfache Ableitungen sind rekursiv definiert und lassen sich berechnen als

$$\frac{\partial^n f(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial {x_i}^n} = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^{n-1} f(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial {x_i}^{n-1}}$$

Partielle Ableitungen

- Beispiel 1

$$g(x,y) = x^2 y + y\cos(x)$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 2xy - y\sin(x)$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = x^2 + \cos(x)$$

Partielle Ableitungen

- Beispiel 2

$$f(x, y, z) = \sin(xy) + xz$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = y\cos(xy) + z$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = x\cos(xy)$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = x$$

Partielle Ableitungen

- Gemischte Ableitungen, also Ableitungen nach zwei verschiedenen Variablen, lassen sich berechnen als

$$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\ldots,x_N)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f(x_1,x_2,\ldots,x_N)}{\partial x_j}$$

- Das Vertauschen der Reihenfolge der zweiten Ableitungen ist möglich, wenn die Funkion f stetige partielle Ableitungen bis mindestens der 2. Ordnung besitzt.

$$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\ldots,x_N)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\ldots,x_N)}{\partial x_j \partial x_i}$$

Satz von Schwarz

Partielle Ableitungen

- Insbesondere wenden wir die Kettenregel in exakt der gleichen Form an wie früher.

$$f = f\big(x(t_1), y(t_2), z(t_3)\big) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f\big(x(t_1), y(t_2), z(t_3)\big)}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_1}$$

- Ist f eine Funktion mehrerer Variablen, die von der gleichen Variablen abhängen, z.B. der Zeit, berechnen wir die totale Ableitung als Summe der partiellen Ableitungen, zur Berechnung der totalen Änderung der Funktion nach dieser letztgenannten Variablen.

$$f = f(x(t), y(t), z(t), t) \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f(x(t), y(t), z(t), t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Fehlerfortpflanzung

- Für unser physikalisches Beispiel Geschwindigkeit $v = v(x,t) = x/t$, mit den Variablen x und t, ergibt sich also die

  Standardabweichung der Geschwindigkeitsmessung

$$\sigma_v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 \sigma_t^2} = \sqrt{\frac{1}{\langle t\rangle^2}\,\sigma_x^2 + \frac{\langle x\rangle^2}{\langle t\rangle^4}\,\sigma_t^2}\,.$$

  aus den Standardabweichungen der Streckenmessung und der Zeitmessung.

Fehlerfortpflanzung

- Es existieren verschiedene Rechenregeln bei der Fehlerfortpflanzung.

- Wenn die Funktion $f(x)$ proportional zu einer Potenz der Meßgröße x ist, wenn sie die Form $f(x) = ax^m$ hat, wird die Fehlerrechnung besonders einfach bei Betrachtung des relativen Fehlers

$$\left|\frac{\sigma_f}{f}\right| = \left|\frac{1}{ax^m} m \cdot a \cdot x^{m-1} \cdot \sigma_x\right| = \left|m \frac{\sigma_x}{x}\right|$$

- Beispiel: Kugelvolumen: $\frac{\sigma_V}{V} = 3\,\frac{\sigma_r}{r}$

Fehlerfortpflanzung

Der absolute Fehler einer Summe oder einer Differenz von Größen ist die Wurzel der Summe der einzelnen absoluten Fehlerquadrate, z.B.

$$f(x,y) = x + y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \quad \rightarrow \quad \sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

Der relative Fehler eines Produktes oder eines Quotienten von Größen ist die Wurzel der Summe der einzelnen relativen Fehlerquadrate, z.B.

$$f(x,y) = x \cdot y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \quad \rightarrow \quad \sigma_f = \sqrt{y^2\sigma_x^2 + x^2\sigma_y^2}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\sigma_f}{f} = \frac{1}{x \cdot y}\sqrt{y^2\sigma_x^2 + x^2\sigma_y^2} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2}}$$

Jupyter Notebook

- In diesem Beispiel wird die Standardabweichung der Geschwindigkeitsmessung direkt und indirekt über die Fehlerfortpflanzung berechnet.

Jupyter Notebook

[1] wikipedia.org/wiki/Project_Jupyter

Ableitungen

Bemerkung: Die erste und zweite gewöhnliche Ableitung nach der Zeit wird im 2. Newtonschen Gesetz eine ganz zentrale Rolle spielen (siehe Kapitel 2.1.).

Die partielle Ableitung wird beispielsweise beim Zusammenhang zwischen Kraft und potentieller Energie (siehe Kapitel 2.1.6.) oder bei Wellen (siehe Kapitel 4.2.) wieder auftauchen.

Im Kapitel 2.1.6. werden wir auch Ableitungen von Vektoren kennenlernen.