2. Mechanik von Teilchen

- Wir beginnen mit dem mathematisch einfachsten Fall von punktförmigen Teilchen oder „Massepunkten“.

  So hat beispielsweise das Elektron eine Masse von

  $$m = 9.1093837015(28)\times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$$

  und nach heutigem Kenntnisstand keine messbare räumliche Ausdehnung.

  Es kann somit gut als punktförmiges Objekt beschrieben werden.

- Die meisten anderen Objekte haben hingegen eine endliche Ausdehnung.

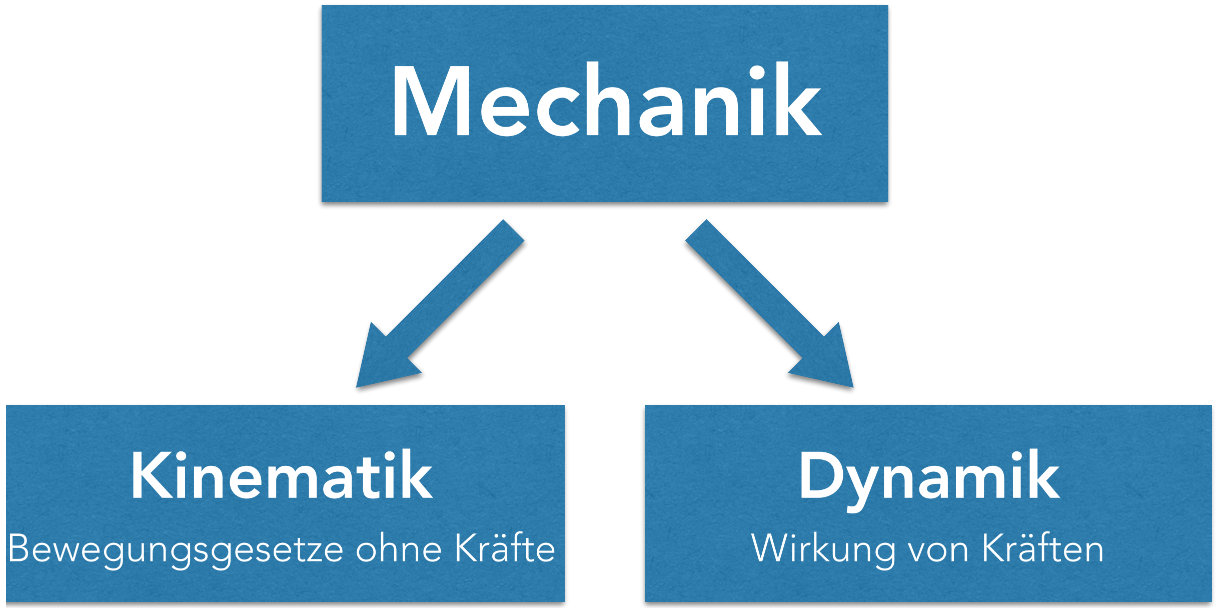
> Beispiel: Das Proton kann beispielsweise als Kugel beschrieben werden mit einem Radius $r \approx 0.9\times10^{-15}\ \mathrm{m} = 0.9\ \mathrm{fm}$.

Diese Ausdehnung wollen wir im Kapitel 2. zunächst vernachlässigen.

Im Kapitel 3. werden wir sehen, dass der Schwerpunkt eines ausgedehnten starren Objektes sich so bewegt, als wäre die gesamte Masse dieses Objekts im Schwerpunkt konzentriert.

So bleiben die folgenden Ergebnisse auch für reale Körper bedeutungsvoll.

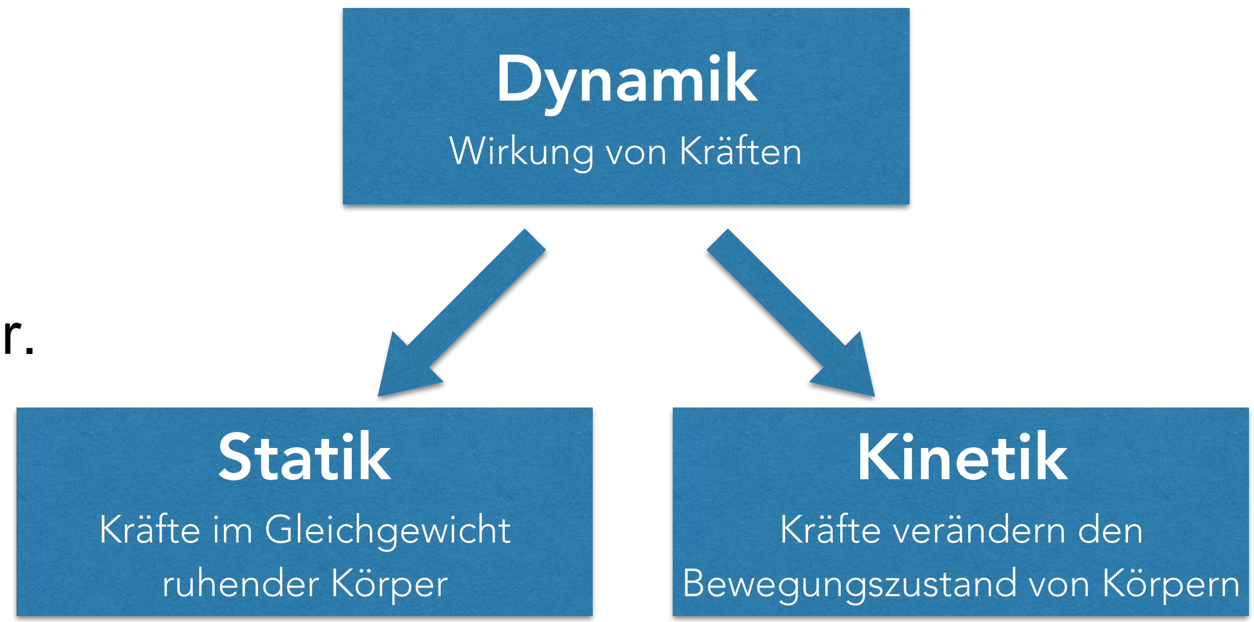
- Eine erste Klassifizierung der zu behandelnden Physik erfolgt in Kinematik und Dynamik.
- In der Kinematik diskutieren wir Bewegungen ohne die Kräfte, die die Bewegung verursachen, explizit zu betrachten.
- In der Dynamik diskutieren wir die Bewegung von Teilchen unter Berücksichtigung der Kräfte, die die Bewegung verursachen.



- In der Dynamik unterscheiden wir weiterhin zwischen Statik und Kinetik.

- In der Statik wirken Kräfte so, dass die Körper im Gleichgewicht sind, wir betrachten ruhende Teilchen bzw. Körper.

- In der Kinetik führen die Kräfte zu einer Veränderung des Bewegungszustandes eines Teilchens bzw. Körpers.



2.1. Translationsbewegungen
2.1.1. Kinematik: Ortsvektor, Geschwindigkeit, Beschleunigung

- Die Position eines Teilchens ist vollständig beschrieben durch seinen Ortsvektor.

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

- Teilchen können sich in Raum und Zeit bewegen. Das führt zu einer zeitlichen Abfolge des Aufenthaltspunktes. Die zeitliche Abfolge ist die Bahnkurve oder Trajektorie.

Einheitsvektoren

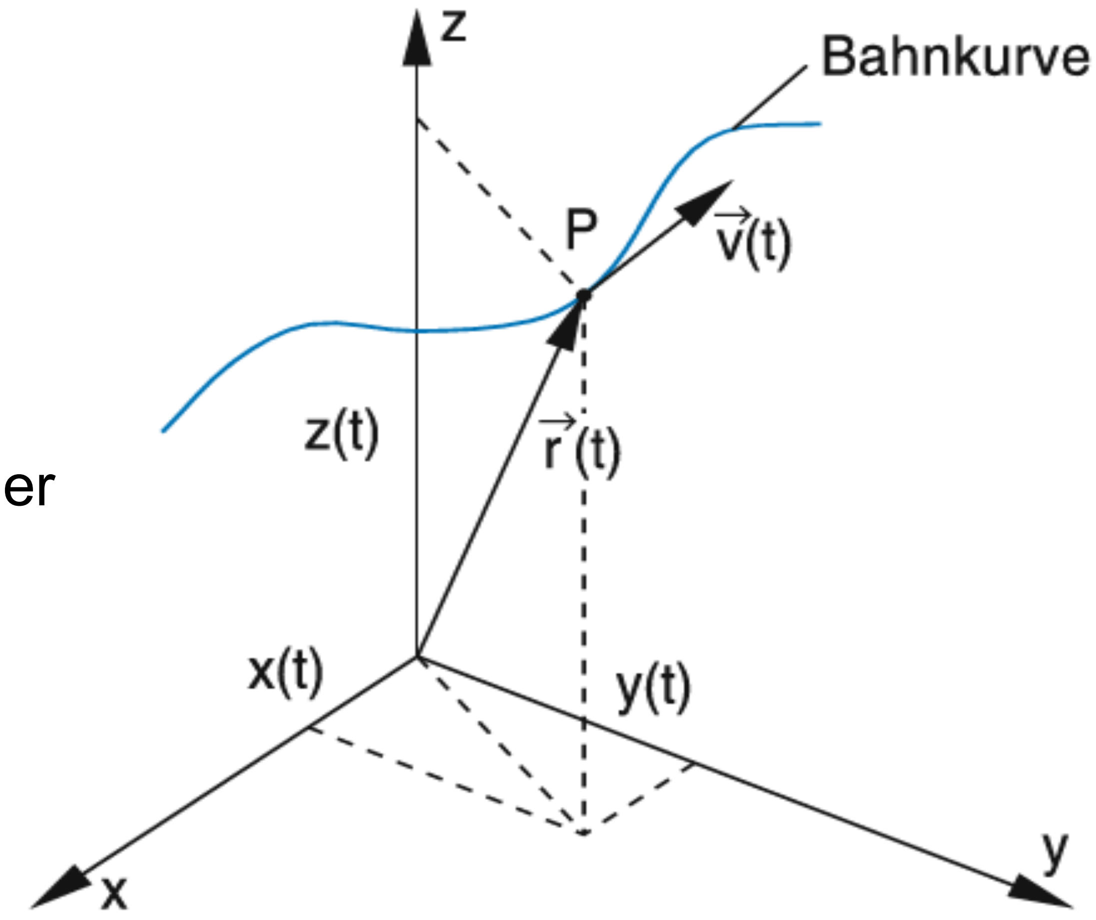
$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z$$

Komponenten

- Die Komponenten der Trajektorie sind zeitlich veränderliche Größen. Die Einheitsvektoren sind zeitlich konstant. Sie beschreiben das Koordinatensystem, aus dem heraus die Bewegung beschrieben wird.

- Bei dieser Bahnkurve wird ein eindimensionaler Raum (die Zeit) auf einen dreidimensionalen Raum (der Ortsvektor) abgebildet.

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$



Bildquelle: Wolfgang Demtröder, „Experimentalphysik I: Mechanik und Wärme“

- Im Rahmen der Kinematik nehmen wir an, dass die Trajektorie bekannt ist. Wir betrachten also nicht die Ursache der Trajektorien.

- Die Geschwindigkeit eines Teilchens ist definiert als die differentielle zeitliche Änderung des Ortes des Teilchens.

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

- Der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(t)$ ist immer tangential zur Bahnkurve.

- In dreidimensionalen kartesischen Koordinaten schreiben wir:

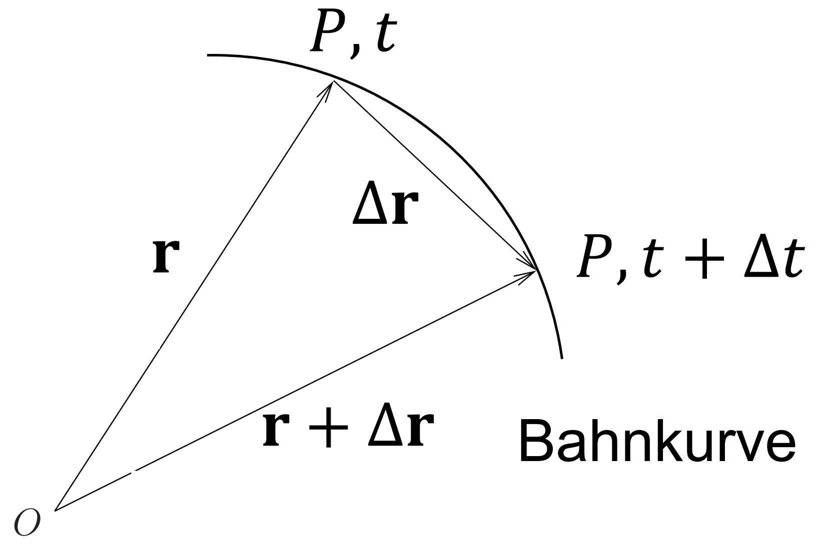
$$\dot{\mathbf{r}}\,(t) = \dot{x}(t)\mathbf{e}_x + \dot{y}(t)\mathbf{e}_y + \dot{z}(t)\mathbf{e}_z$$

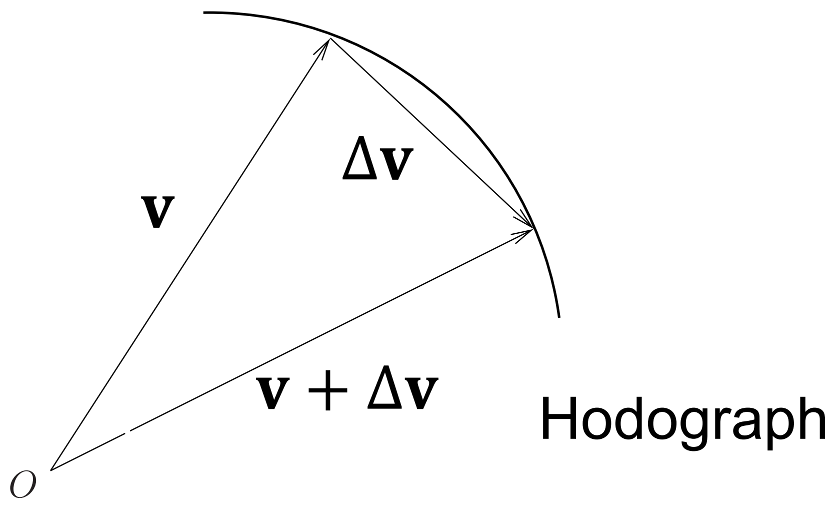
Unbedingt Merken

- Die Beschleunigung des Teilchens ist definiert als die differentielle zeitliche Änderung der Geschwindigkeit des Teilchens.

- Die Beschleunigung ist die zweite Ableitung der Bahnkurve nach der Zeit.

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$$





Unbedingt Merken

- Der Beschleunigungsvektor $\mathbf{a}(t)$ ist tangential zum Hodographen. Der Hodograph der Bewegung eines Teilchens ist die Abbildung des Geschwindigkeitsvektors als Funktion der Zeit.

- In dreidimensionalen kartesischen Koordinaten schreiben wir:

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{x}(t)\mathbf{e}_x + \ddot{y}(t)\mathbf{e}_y + \ddot{z}(t)\mathbf{e}_z$$

- Höhere Ableitungen der Bahnkurve können zwar berechnet werden, spielen aber physikalisch keine Rolle und werden üblicherweise nicht diskutiert.

Koordinatensysteme

- Bisher betrachteten wir kartesische Koordinaten. Die Koordinatenlinien sind
    - Geraden,
    - definiert durch feste Basisvektoren und
    - zeitlich nicht veränderlich.

- Andere Koordinatensysteme können die Bewegung eines Teilchens manchmal besser beschreiben, z.B. krummlinige Koordinatensysteme (Kugel-, Zylinder-, Polarkoordinaten). Wir besprechen diese Koordinatensysteme, wenn wir sie das erste Mal in der Vorlesung benötigen.

> Allgemein können wir auch beliebige krummliniger Koordinatensysteme verwenden. Diese spielen vor allem in der relativistischen Mechanik eine Rolle, wo Massen den Raum krümmen und diese Krümmung korrekt ausgedrückt werden soll.

Natürliche Koordinaten

- Wir betrachten hier ein Koordinatensystem, welches angepasst ist an die Bahnkurve.

Natürliche Koordinaten

- Natürliche Koordinaten stellen ein lokales Koordinatensystem dar.

- Natürliche Koordinaten werden ebenfalls durch drei Einheitsvektoren beschrieben:

  - Tangenteneinheitsvektor $\mathbf{t}$,
  - Hauptnormaleneinheitsvektor $\mathbf{n}$ und
  - Binormaleneinheitsvektor $\mathbf{b}$.

Tangenteneinheitsvektor

- Wir sahen, dass der Geschwindigkeitsvektor immer tangential zur Bahnkurve steht.

- Der Geschwindigkeitsvektor zeigt in die Richtung des Tangenteneinheitsvektors $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{v} = v\mathbf{t}$$

- Der Tangenteneinheitsvektor hat per Definition eine Länge von Eins

$$|\,\mathbf{t}\,|^2 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$$

2. Vektorrechnung: Skalarprodukt oder auch inneres Produkt

- Eigenschaft der Orthonormalität der Einheitsvektoren lässt sich mathematisch einfach fassen mit Hilfe des Skalarproduktes.

- Wir gehen von zwei Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aus($\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$). Skalarprodukt ist definiert als

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_i b_i$$

- Im letzten Schritt wenden wir die Einsteinsche Summennotation an: über doppelt auftretende Indizes wird immer summiert.

- Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist ein Skalar.

Mathematischer Einschub

- Einfache Ausdrücke erhält man wenn wir die Berechnung mittels der euklidischen Norm durchführen. Dies ist eine Möglichkeit die Länge eines Vektors zu messen.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{\mathbf{a}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = a$$

- Das Skalarprodukt ist dann definiert als

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$$

- Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren verschwindet, wenn der Winkel zwischen beiden Vektoren $\frac{\pi}{2}$ ist oder die Länge einer der beiden Vektoren verschwindet.

Mathematischer Einschub

- Das Skalarprodukt ist eine Maßzahl dafür, wie groß die Projektion eines der beiden Vektoren auf den anderen ist.

- Die Orthonormalität von Einheitsvektoren, lässt sich dann z.B. mit Hilfe des Skalarproduktes einfach aufschreiben als:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

- Hier haben wir das Kronecker-Delta-Symbol verwendet, welches definiert ist als

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \; i = j \\ 0 & \text{falls } \; i \neq j \end{cases}$$

2. Vektorrechnung: Kreuzprodukt oder auch äußeres Produkt

- Zwei Vektoren lassen sich durch das Kreuzprodukt so verbinden, dass man als Ergebnis wieder einen Vektor erhält.

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

- Dies lässt sich kompakt aufschreiben mit dem Levi-Civita-Pseudotensor unter Ausnutzung der Einsteinschen Summenkonvention

$$c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{bei mindestens zwei identischen Indizes} \\ 1 & \text{wenn } i,j,k \text{ eine geradzahlige Anzahl von Permutationen von 1,2,3 ist} \\ -1 & \text{wenn } i,j,k \text{ eine ungeradzahlige Anzahl von Permutationen von 1,2,3 ist} \end{cases}$$

- Rechnungen mit dem Levi-Cevita Pseudotensor sind besonders dann hilfreich, wenn doppelte Kreuzprodukte auftauchen.

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \det\begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

- Das Kreuzprodukt $\mathbf{c}$ ist ein Vektor, der senkrecht auf der durch $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ definierten Fläche steht. Der Betrag entspricht der durch die beiden Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ definierten Fläche.

Länge des Kreuzproduktes: $c = ab\sin(\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}))$

Orientierung: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$

$(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$

Mathematischer Einschub

Bogenlänge s

- Bogenlänge einer Bahnkurve: Länge der Bahnkurve zwischen dem Punkt P zum Zeitpunkt t und einem Punkt P_0 zu einem geeignet gewählten Anfangszeitpunkt t_0. Die Bogenlänge entspricht dem zurückgelegten Weg.

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} |\mathrm{d}\mathbf{r}|$$

- Die Umkehroperation gibt uns die Zeit als Funktion der Bogenlänge $t = t(s)$.

- Die infinitesimale Bogenlänge beträgt $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$.

Unbedingt Merken

3. Integralrechnung

- Die Integralrechnung wird als Umkehroperation zur Differentialrechnung verstanden.
- Gegeben ist z.B. eine Funktion $f(x)$. Wir suchen die Funktion $F(x)$ für die gilt

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

- Diese kann über folgendes Integral berechnet werden

$$F(x) = \int^{x} f(x')\mathrm{d}x'$$

- Diese unbestimmte Integration ohne feste Integrationsgrenzen entspricht der Suche nach der Stammfunktion $F(x)$.

Beispiele

$$f(x) = \sin(x) \quad \rightarrow \quad F(x) = -\cos(x)$$

$$f(x) = e^{ax} \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$f(x) = 3x^3 - 2x \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{3}{4} x^4 - x^2$$

Mathematischer Einschub

- Im Gegensatz zur unbestimmten Integration erfolgt die bestimmte Integration mit festgelegten Integrationsgrenzen.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- Rechenregel 1: partielle Integration

$$\int_a^b f(x)\mathrm{g}'(\mathrm{x})\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(\mathrm{x})\mathrm{d}x$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(\mathrm{x})\mathrm{d}x$$

- Rechenregel 2: Substitutionsregel

$$\int_{x_1}^{x_2} f(g(x))g'(\mathrm{x})\mathrm{d}x = \int_{g_1}^{g_2} f(g)\mathrm{d}g$$

Mathematischer Einschub

Beispiel

- Wir wollen das folgende Integral berechnen

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x \cos x^2 \, dx$$

- Wir ersetzen die Variable $g = x^2$ und so ist $\mathrm{d}g = 2x\mathrm{d}x$. Da $g'(x) = 2x$ ist, brauchen wir nur noch die Integrationsgrenzen ersetzen zu $g_1 = x_1^2 = \pi$ und $g_2 = x_2^2 = 4\pi$.

- Das Integral berechnet sich zu

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x \cos x^2 \, \mathrm{d}x \; = \int_{\pi}^{4\pi} \cos g \, \mathrm{d}g = \sin g \Big|_{\pi}^{4\pi} = \sin 4\pi - \sin \pi = 0 - 0 = 0$$

Mathematischer Einschub

Jupyter Notebook

- In diesem Beispiel demonstrieren wir, wie einfache Integrale berechnet werden können.

Zurück zum Tangenteneinheitsvektor

- Die Ortskoordinate kann als Funktion der Bogenlänge geschrieben werden, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s(t))$. Dann können wir die Geschwindigkeit ausdrücken nach Anwendung der Kettenregel als

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(s)}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{t}v$$

- Der erste Term entspricht gerade dem Tangenteneinheitsvektor $\mathbf{t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(s)}{\mathrm{d}s}$.

- Der zweite Term entspricht gerade dem Betrag der Geschwindigkeit $v = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$.

Beschleunigung

- Die Beschleunigung rechnen wir nach Anwenden der Produktregel aus:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathbf{t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}t}v$$

- Wir betrachten die zeitliche Ableitung des Tangenteneinheitsvektors genauer. Wir wissen:

$$|\mathbf{t}|^2 = \mathbf{1} \quad \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{t}\cdot\mathbf{t}) = \frac{\mathrm{d}1}{\mathrm{d}t} = 0 = 2\mathbf{t}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \mathbf{t} \perp \frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}t}$$

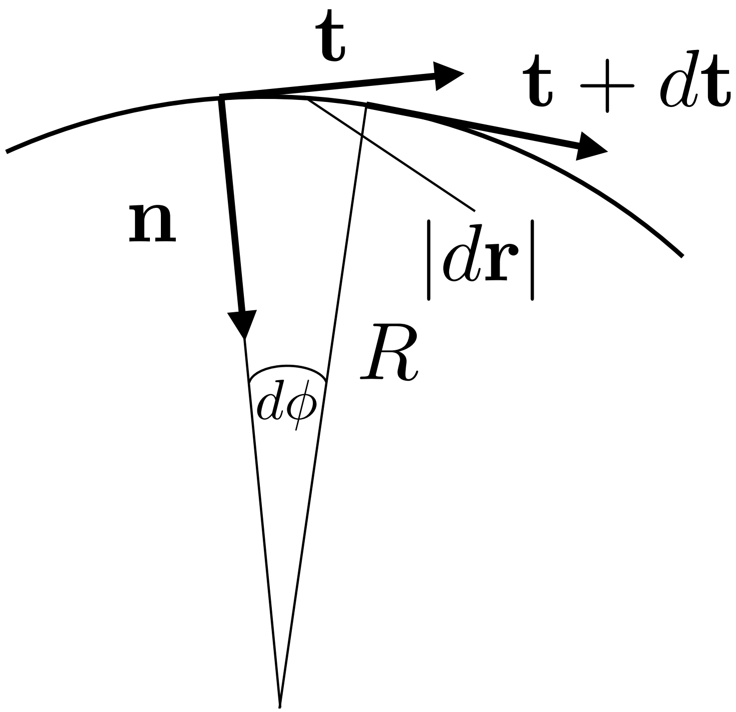
- Allgemein: die Ableitung eines Einheitsvektors steht immer senkrecht zum Einheitsvektor.

Hauptnormaleneinheitsvektor

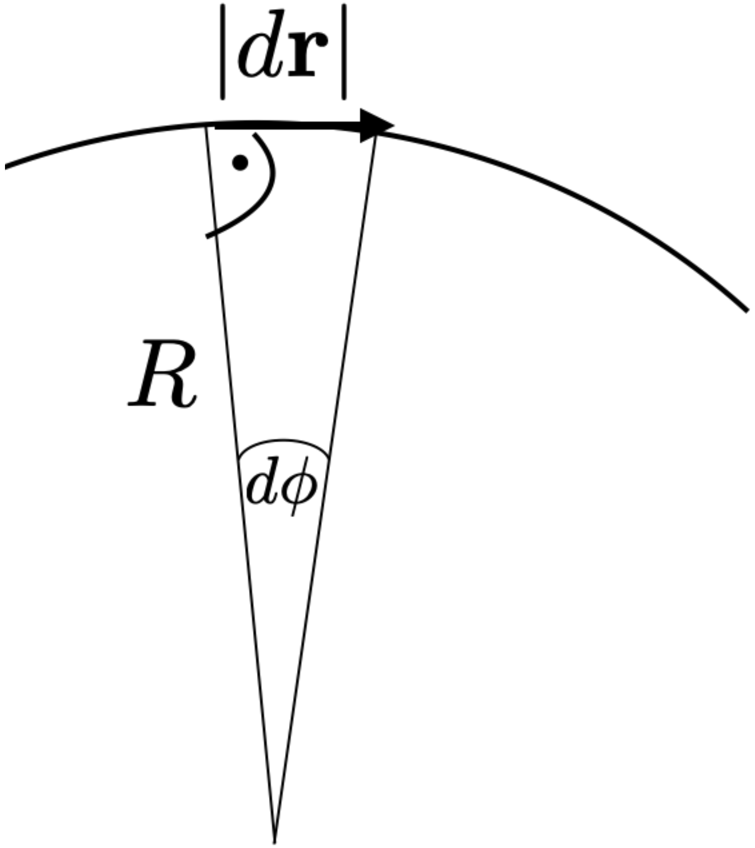
- Wir definieren die Richtung der zeitlichen Ableitung des Tangenteneinheitsvektors als den Hauptnormaleneinheitsvektor $\mathbf{n}$ und $\mathbf{n} \parallel \frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}t}$.
- Der Hauptnormaleneinheitsvektor ist ebenfalls normiert und es soll gelten

$$|\,\mathbf{n}\,|^2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$$

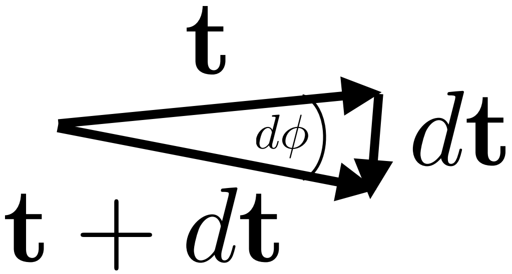
- Es gilt aber allgemein, dass $\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}(t)}{\mathrm{d}t} = c(t)\mathbf{n}(t)$ ist.
- Wie berechnen wir jetzt diese skalare Größe $c(t) = \frac{|\mathrm{d}\mathbf{t}(t)|}{\mathrm{d}t}$ die den Vektor normiert?



gesamte Bahnkurve

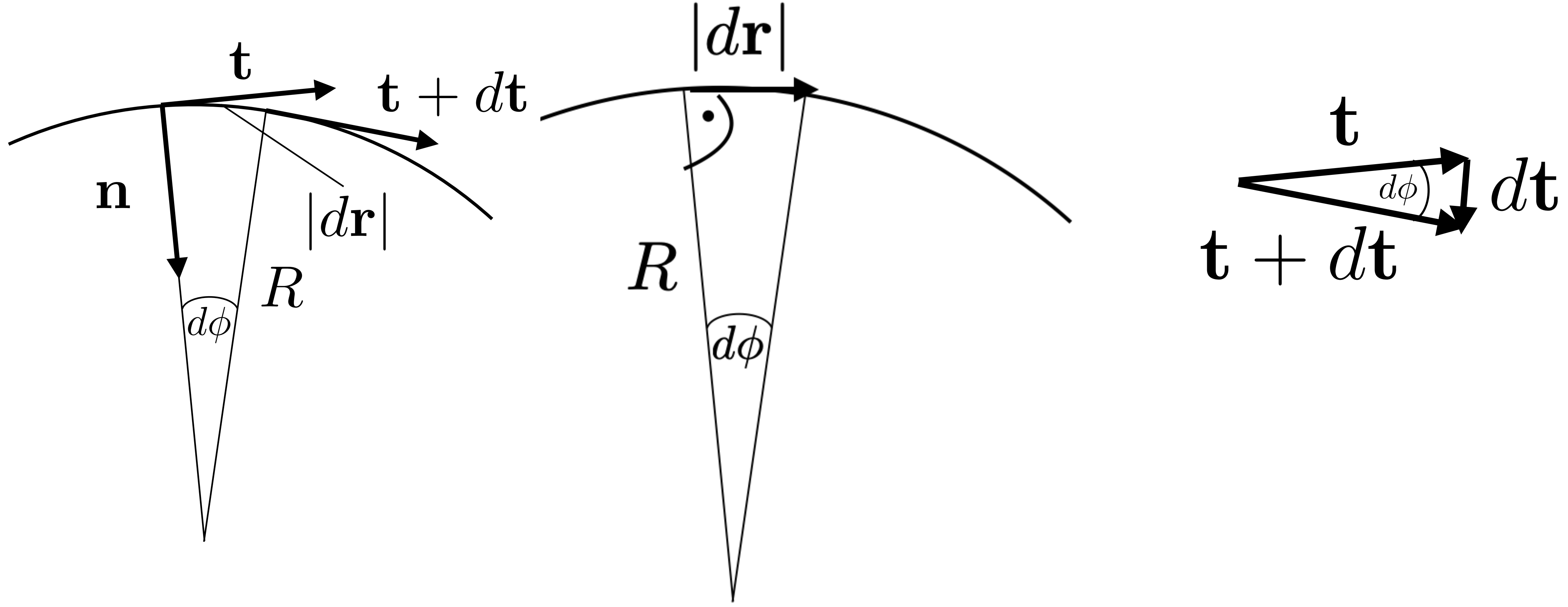


Bahnkurve mit Fokus auf die Ortskoordinate



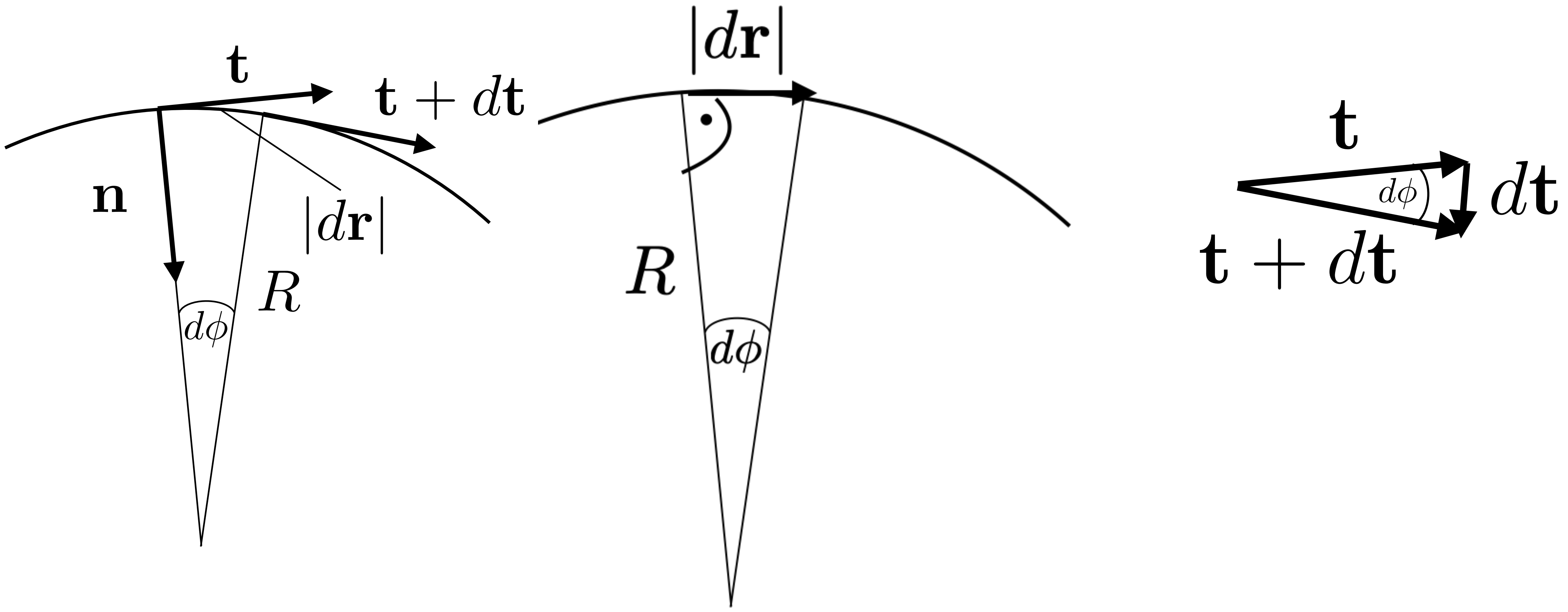
Tangentenvektor

- $R(t)$ ist der Krümmungsradius der Kurve. Er entspricht dem Radius eines Kreises, der in der Nähe des betrachteten Punktes die Bahnkurve annähert.



- Aus der Definition des Tangens für kleine Argumente ($\tan x \approx x$) schließen wir, dass

$$\mathrm{d}\phi(t) = \frac{|\mathrm{d}\mathbf{r}(t)|}{R(t)} = \frac{|\mathrm{d}\mathbf{t}(t)|}{|\mathbf{t}(t)|} = |\mathrm{d}\mathbf{t}(t)|$$



- Wir berechnen dann die Länge der Ableitung des Tangenteneinheitsvektors zu

$$c(t) = \frac{|\mathrm{d}\mathbf{t}(t)|}{\mathrm{d}t} = \frac{|\mathrm{d}\mathbf{r}(t)|}{R(t)\mathrm{d}t} = \frac{|\mathbf{v}(t)|}{R(t)} = \frac{v(t)}{R(t)} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{v(t)}{R(t)}\mathbf{n}(t)}$$

Beschleunigung

- Die Beschleunigung berechnen wir mit Hilfe des Tangenteneinheitsvektor und des Hauptnormaleneinheitsvektors zu

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathbf{t} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n}$$

- Der erste Term beschreibt eine tangentiale Beschleunigung.
- Der zweite Term beschreibt eine radiale Beschleunigung.
- Für eine geradlinige Bewegung ist der Krümmungsradius unendlich, sodass die radiale Beschleunigung gleich Null ist.

- Die durch $\mathbf{t}(t)$ und $\mathbf{n}(t)$ aufgespannte Ebene ist die Schmiegungsebene der Bahnkurve.

- Der Beschleunigungsvektor liegt immer in der Schmiegungsebene und zeigt nach der konkaven Seite der Bahnkurve.

- Als dritter Vektor wird der Binormaleneinheitsvektor $\mathbf{b}(t)$ eingeführt. Er steht senkrecht auf der Schmiegungsebene und ist definiert als

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad \text{mit} \quad |\,\mathbf{b}\,|^2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1$$

- Beschreibt Bewegungen aus der Ebene heraus. Wird in der Mechanik meist nicht weiter benötigt, da Beschleunigungen höherer Ordnung kaum eine Rolle spielen.

Grundaufgaben der Kinematik

- Grundaufgabe 1: Bei bekannter Bahnkurve sollen Geschwindigkeit und Beschleunigung berechnet werden.

$$\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{v}(t) \rightarrow \mathbf{a}(t)$$

- Lösung durch einfaches Differenzieren.

Beispiel

- Bewegung eines Teilchens auf einer Kreisbahn mit Radius R und Winkelgeschwindigkeit ω. Vernachlässigen z-Koordinate und betrachten Bewegung in einer Ebene.

$$x(t) = R\cos\omega t \quad \text{und} \quad y(t) = R\sin\omega t$$

- Details des Geschwindigkeitsvektors

$$\dot{x}(t) = -\omega R\sin\omega t \;\; \text{und} \;\; \dot{y}(t) = \omega R\cos\omega t \;\; \text{und}\; v(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = R\omega$$

- Details des Beschleunigungsvektors

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 R\cos\omega t \;\; \text{und} \;\; \ddot{y}(t) = -\omega^2 R\sin\omega t \;\text{und}\; a(t) = \sqrt{\ddot{x}^2(t) + \ddot{y}^2(t)} = R\omega^2$$

- Das Teilchen wird auf einer Kreisbahn in negativer radialer Richtung beschleunigt

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2\mathbf{r}(t)$$

Jupyter Notebook

- In diesem Beispiel diskutieren wir Details zum numerischen Differenzieren.
- Wir betrachten das gerade diskutierte Beispiel einer kreisförmigen Bewegung.

[1] wikipedia.org/wiki/Project_Jupyter

Grundaufgaben der Kinematik

- Grundaufgabe 2: Bei bekannter Geschwindigkeit soll die Bahnkurve berechnet werden.

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t) \rightarrow \mathbf{r}(t)$$

- Dies führt zu drei gekoppelten Differenzialgleichung erster Ordnung:

$$\dot{x}(t) = v_x(x, y, z, t), \qquad \dot{y}(t) = v_y(x, y, z, t), \qquad \dot{z}(t) = v_z(x, y, z, t)$$

- Eindeutige Lösung bei drei gegeben Anfangsbedingungen

$$\mathbf{r}(t = 0) = \mathbf{r}_0(\rightarrow x_0, y_0, z_0)$$

Beispiel

- Als Beispiel betrachten wir eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}_0$$

- Einmalige Integration ergibt als Bahnkurve

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{f}$$

- Mit bekannten Anfangsbedingungen $\mathbf{r}(t=0) = \mathbf{r}_0$ erhalten wir als Lösung

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0$$

Grundaufgaben der Kinematik

- Grundaufgabe 3: Bei bekannter Beschleunigung soll die Bahnkurve berechnet werden.

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rightarrow \mathbf{r}(t)$$

- Dies führt zu drei gekoppelten Differenzialgleichung zweiter Ordnung:

$$\ddot{x}(t) = a_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \qquad \ddot{y}(t) = a_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \qquad \ddot{z}(t) = a_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

- Eindeutige Lösung bei sechs gegeben Anfangsbedingungen:

$$\mathbf{r}(t = 0) = \mathbf{r}_0 \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{r}}(t = 0) = \mathbf{v}(t = 0) = \mathbf{v}_0$$

Beispiel

- Als Beispiel betrachten wir eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung
$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{b}$$
- Einmalige Integration ergibt die Geschwindigkeit
$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{b}t + \mathbf{c}$$
- Zweimalige Integration ergibt die Bahnkurve
$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{b}}{2}t^2 + \mathbf{c}t + \mathbf{f}$$
- Mit bekannten Anfangsbedingungen $\mathbf{r}(t=0) = \mathbf{r}_0$ und $\mathbf{v}(t=0) = \mathbf{v}_0$ erhalten wir
$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{b}}{2}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0$$

- Die Bewegungsgleichungen sind Differentialgleichungen 2.Ordnung in der Zeit. Zur vollständigen Lösung benötigen wir die zwei Integrationskonstanten. Wir benötigen daher immer 2 Anfangsbedingungen, die diese Integrationskonstanten fixieren.

- Gewöhnliche Differentialgleichungen n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(x) = f\left[x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right]$$

benötigen dann genau n Anfangsbedingungen für eine eindeutige Lösung.

Dies ist hier stark vereinfach formuliert.

Mathematisch fordert man, dass die Differentialgleichung nur dann eine eindeutige Lösung in genügend kleiner Umgebung eines Punktes x_0 hat, wenn n Anfangsbedingungen gegeben sind.

Diese Anfangsbedingungen entsprechen dem Funktionswert $y(x_0)$ an der Stelle x_0 und den $n - 1$ Ableitungen von $y(x)$ an der Stelle x_0.

Weiterhin muss die Funktion f stetig sein und f und $y^{(i)}$ für $i = 0, 1, \ldots, n - 1$ müssen beschränkt sein und der Lipschitz-Bedingung genügen. Diese kontrolliert die Abweichung der Funktion $f(x)$ von $f(x_0)$ in näherer Umgebung von x_0.

Mathematischer Einschub