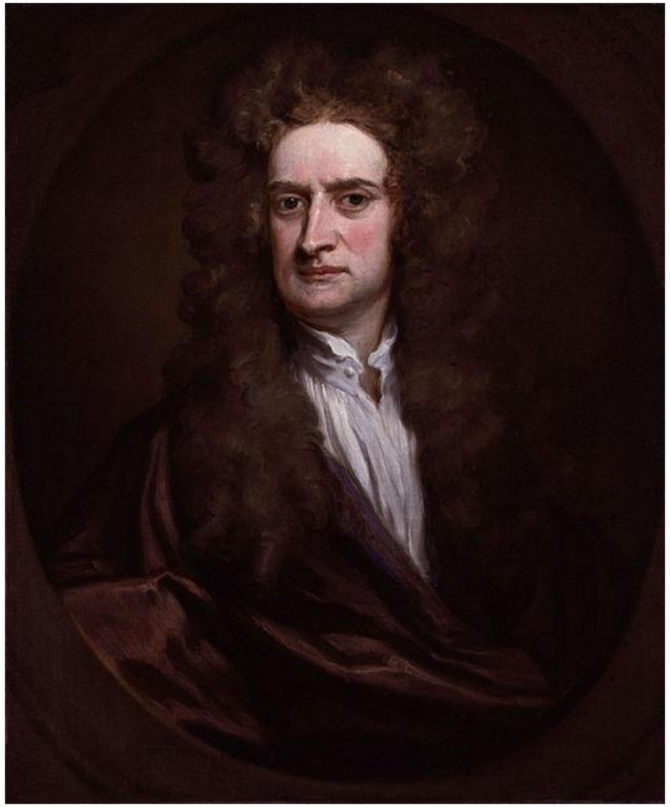
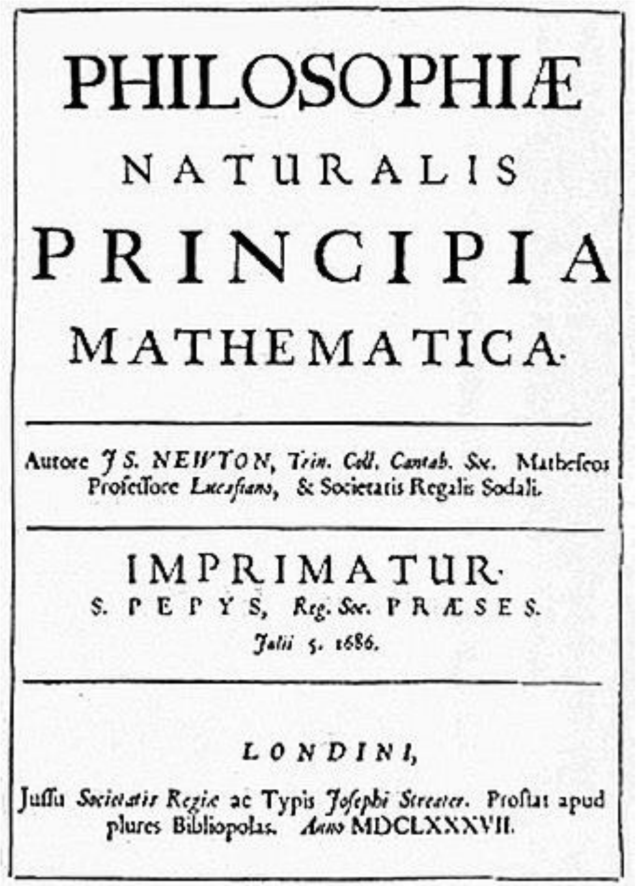
2.1.2. Die vier Newtonschen Gesetze



Sir Isaac Newton

1643 - 1727



PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

Autore JS. NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.

S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.

Julii 5. 1686.

LONDINI,

Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater*. Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica

1687

Bildquellen: wikipedia

Grundlegend für die Darstellung der Mechanik sind eine Reihe fundamentaler Begriffe, von denen einige im Folgenden dargestellt oder definiert werden.

Bezugssystem

> Ein Bezugssystem ist ein gedachtes raum-zeitliches Gebilde, mit dem Lage und Bewegung physikalischer Körper (Massepunkte, Teilchen, etc.) in Abhängigkeit von der Zeit angegeben werden kann.

Beispiele:

- Das kartesische Koordinatensystem mit den Ortskoordinaten x, y, z sowie der Zeit t.
- Laborsystem, Schwerpunktsystem, fallende oder rotierende Bezugsysteme, etc.

Voraussetzungen

- Es gibt eine absolute Zeit, die in allen Koordinatensystemen gleich ist.

$$t' = t$$

- Die Signalgeschwindigkeit mit der sich Signale und Informationen ausbreiten, ist unendlich groß. Man spricht von einer instantanen Kraftwirkung.

$$v_{\text{Signal}} = \infty$$

- Es gibt einen absoluten Raum, der vom Beobachtenden, den darin enthaltenen Objekten sowie den darin stattfindenden physikalischen Vorgängen unabhängig ist.
- Die Masse ist keine Funktion der Geschwindigkeit.

> All das wird sich im Rahmen der Relativitätstheorie von Einstein ändern.

Inertialsystem

Es gibt Bezugssysteme, in denen die kräftefreie Bewegung von Teilchen geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt. Diese heißen Inertialsysteme.

- Als Erster hat Galileo Galilei in ähnlicher Fassung dieses Trägheitsgesetz postuliert. Das wird manchmal als Beginn der modernen Wissenschaft bezeichnet.

  Hervorzuheben ist, dass er das Gesetz erfasste, obwohl er experimentell keine Inertialsysteme realisieren konnte.

- Allgemein gilt, dass in Inertialsystemen die physikalischen Gesetze die einfachste Form annehmen.

1. Newtonsches Gesetz

Newtons erstes Gesetz basiert auf dem Galileischen Trägheitsgesetz:

> Jeder Körper, auf den keine Kräfte wirken, verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung (d.h. $\mathbf{v} = \mathrm{const}$).

$$\mathbf{F} = 0 \;\rightarrow\; \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t) = \mathrm{const.} \rightarrow\; \ddot{\mathbf{r}}(t) = 0$$

2. Newtonsches Gesetz

(Aktionsgesetz, Bewegungsgesetz)

Zunächst hat Newton mittels träger Masse m und Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ eine neue Bewegungsgröße Impuls definiert

$$\boxed{\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}} \qquad [\mathbf{p}] = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$$

Er postulierte dann

> Die Änderung des Impulses ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht in Richtung der Kraft.

- Wichtig: Dieses Gesetz ist ausschließlich für Inertialsysteme formuliert.

Als Formel lautet das Gesetz

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}}$$

$$[\mathbf{F}] = \mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{N}\ (\text{Newton})$$

Falls die Masse m zeitlich konstant ist, erhält man mit der Beschleunigung $\mathbf{a} = \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$ die bekannte Gestalt

$$\boxed{m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}}$$

> Die Beschleunigung ist darin eine wohldefinierte, messbare Größe und bestimmt das Verhältnis von Kraft und Masse. Sie kann auch als Definition von Kraft und Masse gelesen werden, genügt dazu aber alleine nicht.

Allgemein ist $m = m(t)$, z.B. stößt eine Rakete den verbrannten Treibstoff aus. Also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m(t)\,\mathbf{v}(t)) = \dot{m}(t)\,\mathbf{v}(t) + m(t)\,\mathbf{a}(t)$$

Folgerung: Wirkt keine Kraft auf ein Teilchen konstanter Masse m, $\mathbf{F} = 0$, dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{p} = \mathrm{const}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{v} = \mathrm{const}}$$

In Übereinstimmung mit dem Trägheitsgesetz.

- Der hier verwendete Begriff der trägen Masse bezeichnet den Widerstand des Teilchens zur Änderung des Bewegungszustands.
- Wird dynamisch bestimmt durch Vergleichsmessung (siehe 3. Newtonsches Gesetz)

3. Newtonsches Gesetz

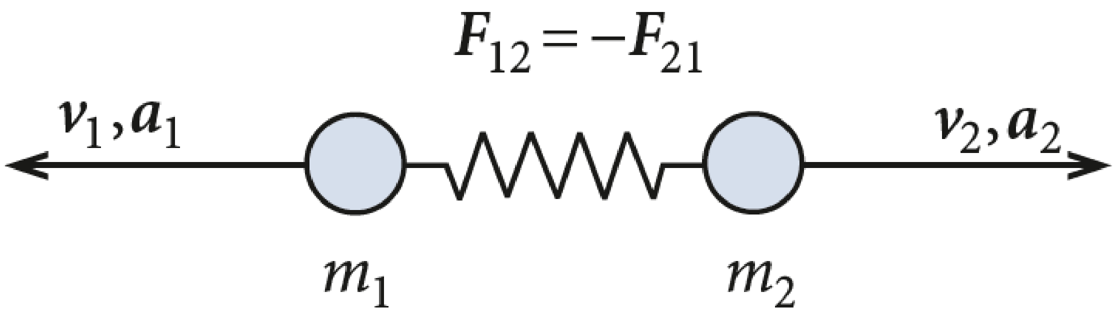
(Actio = Reactio)

Wirkt eine Kraft $\mathbf{F}_{21}$ von Körper 1 auf einen Körper 2, so wirkt umgekehrt eine Kraft $\mathbf{F}_{12}$ von Körper 2 auf Körper 1 vom gleichen Betrag, aber mit umgekehrtem Vorzeichen.

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$$

Dieses Gesetz ist insbesondere wichtig für die Diskussion von Systemen, die aus mehreren Teilchen bestehen.

Beispiel: Mit dem 3. Gesetz ist eine Definition der trägen Masse m_t möglich.



Nolting, Klassische Mechanik

Auf zwei Massenpunkte wirken zwei entgegengesetzt gerichtete, gleich große Kräfte, realisiert durch eine gespannte Feder. Diese wird durchtrennt. Das Verhältnis der resultierenden Geschwindigkeiten ist unabhängig von der wirkenden Kraft,

$$\frac{v_2}{v_1} = -\frac{m_1}{m_2}$$

Mit Hilfe einen Massennormals lassen sich so andere Massen bestimmen.

- Als Referenzmasse wurde lange Zeit das Pariser Ur- oder Normalkilogramm verwendet.
- Alternativer Zugang: Statische Kraftmessung.
- Mit einer Waage bringt man zwei unterschiedliche Teilchen in einen Gleichgewichtszustand. Die Gewichtskraft des zu vermessenden Teilchens wird kompensiert durch ein bekanntes Gewicht (Referenzgewicht).
- Hier spielt die Trägheit des Teilchens keine Rolle, es befindet sich in Ruhe.
- Man unterscheidet in der Messung zwischen träger Masse m_t und schwerer Masse m_s.

In vielen Experimenten überprüft und immer bestätigt:

$$\boxed{m_\mathrm{t} = m_\mathrm{s}}$$

4. Newtonsches Gesetz

(Superpositionsprinzip)

Wirken auf ein Teilchen (Massepunkt) mehrere Kräfte $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$, so addieren sich diese vektoriell.

oder

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$$

Galilei-Transformation

- Mit den Newtonschen Gesetzen ist die Bewegung physischer Körper nur als Bewegung relativ zu einem Bezugssystem definiert.
- Beispiel: Bei einer starren Verschiebung des Bezugssystems verbleibt die Art der Bewegung gleichwertig.
- Gegenbeispiel: Ein sich geradlinig und gleichförmig bewegendes Teilchen in einem Bezugssystem erfährt eine Beschleunigung in einem rotierenden System. In diesen Bezugssystemen sind die Newtonschen Gesetze nicht direkt anwendbar! Meist werden in solchen Systemen Scheinkräfte eingeführt (z.B. rotierende Erde!).
- Die Newtonschen Gesetze sind nur dann sinnvoll, wenn sie sich auf eine Klasse von Bezugssystemen beziehen, die wir als Inertialsysteme bereits kennenlernten.

- Wichtige Erkenntnis:
  - Nicht alle Koordinatensysteme sind Inertialsysteme.
  - Es gibt mindestens ein Inertialsystem. Daher gibt es Koordinatensysteme, in denen die Newtonschen Gesetze gelten.

- Wie groß ist die Gesamtheit aller Inertialsysteme? Welche Koordinatentransformation überführen ein Inertialsystem Σ in ein anderes Inertialsystem Σ'?

- Forderung: Bei der Transformation darf keine Kraft auf das Teilchen ausgeübt werden

$$m\ddot{\mathbf{r}} = 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{\mathbf{r}}' = 0$$

- Rotation scheidet aus. Richtungsänderung der Geschwindigkeit = Beschleunigung.

Mathematischer Einschub

- Mögliche Transformationen zwischen Inertialsystemen:
  - Translation
  - geradlinig-gleichförmige Bewegung
  - Verdrehung um festen Winkel in Raum oder Zeit

- Mathematisch:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}'(t)$$

beschreibt Transformation vollständig

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}_0(t) + \ddot{\mathbf{r}}'(t) \;\rightarrow\; \ddot{\mathbf{r}}_0(t) = 0 \;\rightarrow\; \mathbf{r}_0(t) = \mathbf{v}_0 t$$

Σ' ist auch ein Intertialystem wenn diese Bed. erfüllt ist

Mathematischer Einschub

Bezugssysteme, die relativ zu einem Inertialsystem eine unbeschleunigte Translationsbewegung ausführen, sind ebenfalls Inertialsysteme und für die Beschreibung mechanischer Vorgänge vollkommen gleichwertig.

- Transformation der Inertialsysteme bezeichnet man als Galilei-Transformation

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}'(t) \text{ und } t = t'$$

Mathematischer Einschub

- Die Grundgleichungen der Mechanik sind gegenüber allen möglichen Galilei-Transformationen invariant.
- Die Galilei-Transformation gilt nicht mehr im Rahmen der Relativitätstheorie.
- Dort wird die Galilei-Transformation durch die Lorentz-Transformation ersetzt.

Abschließend sei bemerkt, dass es unendlich viele Inertialsysteme gibt, die sich mit konstanter Geschwindigkeit zueinander bewegen.