2.1.3. Beispiele von Kräften

- Eine auf einen Körper wirkende Kraft kann Richtung und/oder Stärke seines Bewegungszustands ändern (vgl. Newtonsche Gesetze).

- Die Kraft $\mathbf{F}$ ist eine vektorielle Größe.

- Wir können über deren Ursprung der Kräfte keine Aussage innerhalb der hier diskutierten Mechanik treffen. Sie werden oft zunächst phänomenologisch eingeführt.

- Zur besseren Diskussion der Ursache von Kräften benötigen wir weiterführende Theorien aus anderen Teildisziplinen. Wir diskutieren hier nur die Bewegung von Körpern, wenn auf diese eine Kraft wirkt. Nicht den Ursprung der Kraft selbst.

Beispiel (1)

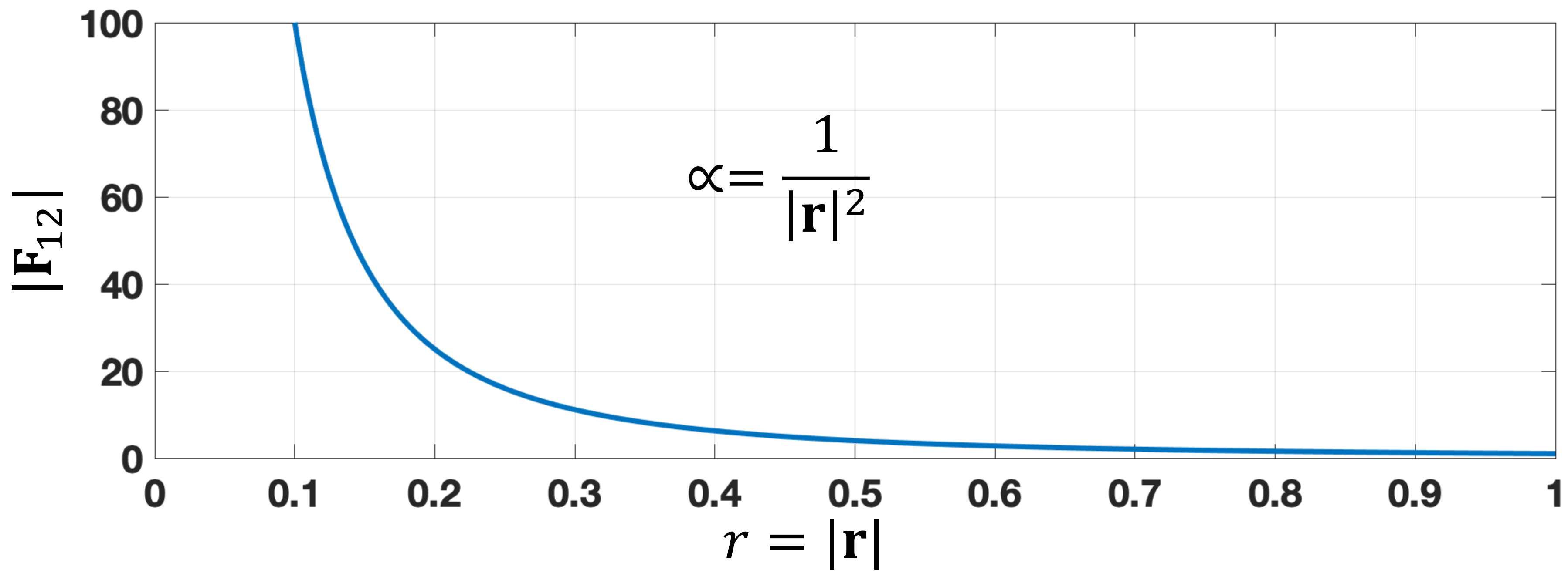
Gravitationskraft:

Beschreibt die Kraft, die ein Körper der Masse m_2 auf einen Körper der Masse m_1 ausübt.

$$\mathbf{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

Hierin ist G eine Naturkonstante, die Gravitationskonstante. Ihr Zahlenwert beträgt

$$G = (6.67430 \pm 0.00015) \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$$ (CODATA 2018)



Die Gravitationskraft ist eine anziehende Kraft.

Die auf die beiden Massen wirkenden Kräfte sind betragsmäßig gleich groß, haben aber ein unterschiedliches Vorzeichen (actio = reactio):

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

Außerhalb einer homogenen Kugel ist das Gravitationsgesetz identisch zu dem einer punktförmigen Masse mit gleicher Gesamtmasse (vgl. Kapitel 8).

Der Radius der Erde beträgt $r = r_E = 6.371 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$.

Die Masse der Erde beträgt $m_\mathrm{E} = 5.97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$.

Mit $|\mathbf{r}_\mathrm{E}| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ gilt auf der Erdoberfläche damit für einen Körper der Masse m:

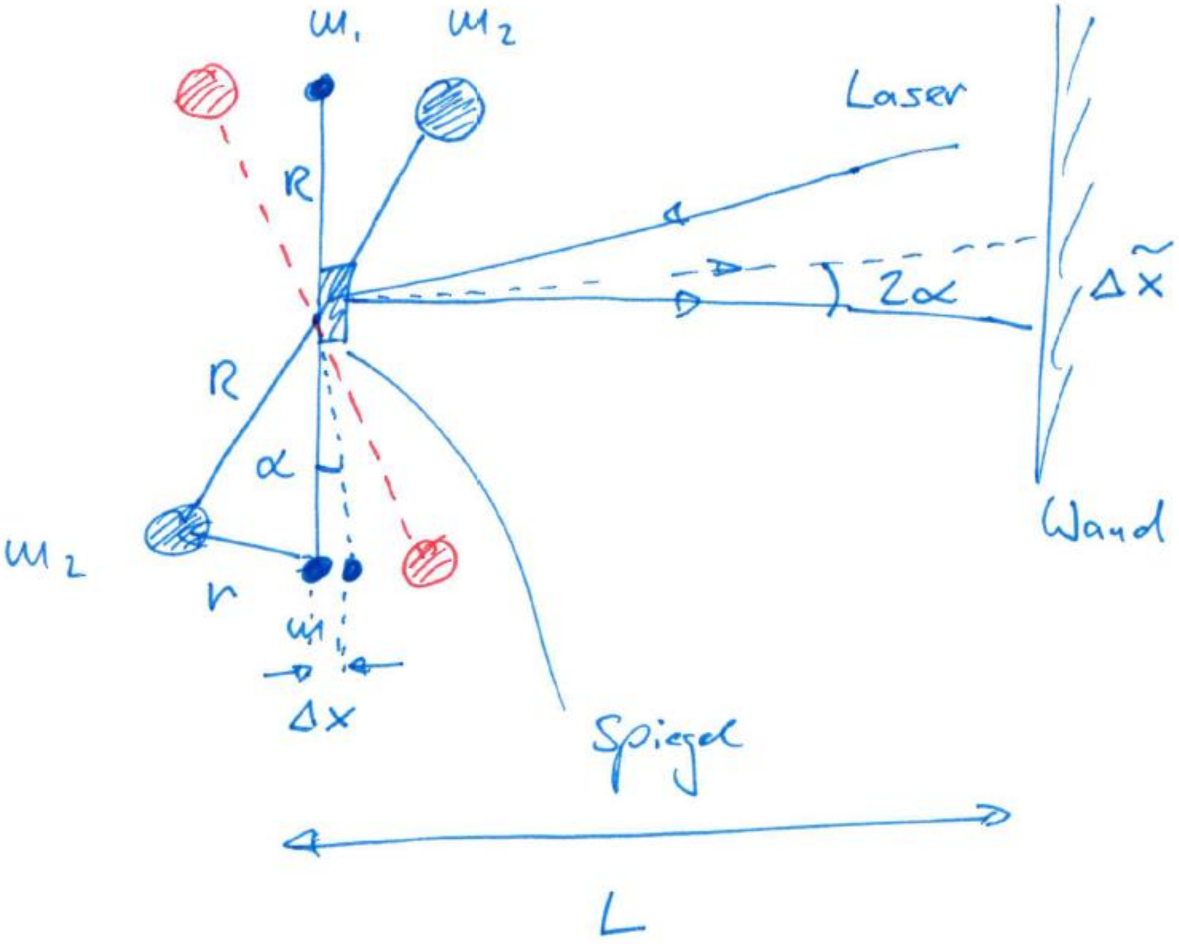
$$F = -G\,\frac{m\,m_E}{r_\mathrm{E}^2} = -mg, \qquad g = G\,\frac{m_\mathrm{E}}{r_\mathrm{E}^2} \simeq 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

(Schwerebeschleunigung in Erdnähe)

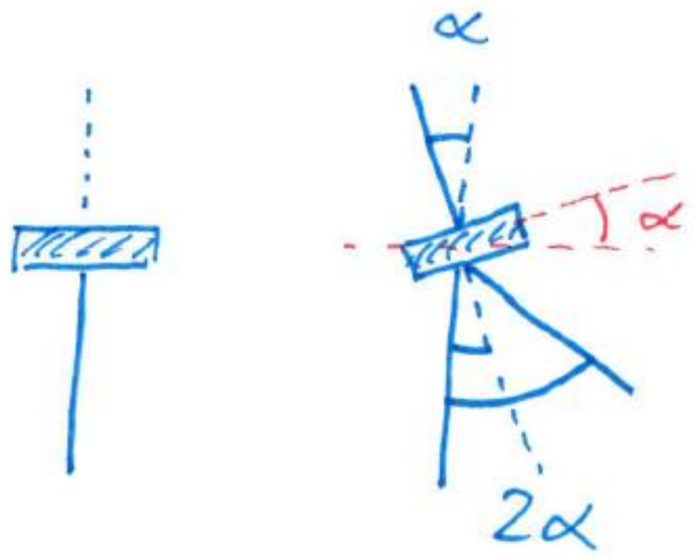
Die Erde ist nicht wirklich eine homogene Kugel. Daher hängt die Schwerebeschleunigung vom Ort auf der Erdoberfläche ab. Am Äquator beträgt der Wert $g = 9.78\ \mathrm{m}s^{-2}$ und an den Polen $g = 9.83\ \mathrm{m}s^{-2}$. Daher müssen z.B. die Pendel von „Schwarzwälder Kuckucksuhren“ dem entsprechenden Land eingestellt werden. Sie gehen eigentlich nur an ausgewählten Orten richtig.

Bestimmung der Gravitationskonstanten

(Cavendish-Experiment, 1798)



Zum Spiegel:



Parameter:

$m_1 = 0.015\ \mathrm{kg}$ ≙ kleine Masse

$m_2 = 1.5\ \mathrm{kg}$ ≙ große Masse

$R = 0.05\ \mathrm{m}$ ≙ Abstand von m_1, m_2 zur Drehachse

$r = 0.04\ \mathrm{m}$ ≙ Abstand von m_1 und m_2 ($\approx$ const)

$L = 13.75\ \mathrm{m}$ ≙ Abstand Spiegel-Wand

(1 SKT auf Wand ≙ $2.5\ \mathrm{cm}$)

Diskussion

In der Ausgangslage (Ruheposition) heben sich Gravitationskraft und Kraft aufgrund der Torsion des Drahtes auf. Bringt man nun m_2 in die spiegelbildliche Position, so wirkt auf m_1 die 2-fache Gravitationskraft, also $2F$, mit

$$F = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Hieraus resultiert die Beschleunigung a der Masse m_1:

$$a = 2\,G\,\frac{m_2}{r^2} \qquad (1)$$

Über $\alpha \simeq \frac{\Delta x}{R}$ und $2\alpha \simeq \frac{\Delta \tilde{x}}{L}$ resultiert die Beschleunigung $\tilde{a}$ des Lichtpunktes an der Wand mit

$$a = \frac{\tilde{a}\,R}{2L} \qquad (2)$$

Bemerkung: Diese Betrachtung nähert die Torsionskraft als zunächst konstant.

Experiment: Messe $\tilde{a} \overset{(1)}{\Rightarrow} a \overset{(2)}{\Rightarrow} \gamma$

Beispiel: $t = 90\,\mathrm{s}$: $\Delta\tilde{x} = 0.275\,\mathrm{m}$ mit $\Delta\tilde{x} = \frac{1}{2}\,\tilde{a}\,t^2$

$$\Rightarrow \quad \tilde{a} = \frac{2\Delta x}{t^2} = 6.8 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$\Rightarrow \quad a = 1.24 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$\Rightarrow \quad G = \frac{a\,r^2}{2m_2} = 6.6 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$$

(Literaturwert: $6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$)

Beispiel (2)

Coulombkraft:

Beschreibt die Kraft, die ein Körper mit Ladung q_2 auf einen Körper mit Ladung q_1 ausübt.
Die Coulombkraft ist mathematisch äquivalent zur Gravitationskraft

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

Hierin ist ϵ_0 eine Naturkonstante, die Vakuumpermitivität

$$\epsilon_0 = 8.8541878128(13) \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$$

Die Coulombkraft kann eine anziehend oder abstoßend sein.
Dies hängt vom relativen Vorzeichen der Ladungen ab.

Negative Ladungen stammen meist von Elektronen, positive meist von Protonen.

> Kontemplieren Sie bitte einen Moment über die Größe des Vorfaktors zwischen Gravitationskraft und Coulombkraft.
>
> Der Unterschied beträgt mehr als 20 Größenordnungen.
>
> Wir erkennen, dass die Gravitationskraft erst dominant wird bei sehr schweren und elektrisch nur sehr schwach geladenen Objekten.

Beispiel (3)

Lorentzkraft:

- Beschreibt die Kraft, die ein elektromagnetisches Feld auf ein Teilchen mit der Ladung q ausübt:

$$\boxed{\mathbf{F} = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t))}$$

- Hierbei ist $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ die elektrische Feldstärke und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ die magnetische Induktion. Die raumzeitliche Dynamik beider Felder wird durch die Maxwell-Gleichungen beschrieben.
- Die Lorentzkraft ist eine geschwindigkeitsabhängige Kraft.

> Manchmal wird nur der zweite Term als Lorentzkraft bezeichnet und der erste Teil als Coulombkraft. Details hierzu werden im 2. Semester in Elektrodynamik diskutiert.

Beispiel (4)

Federkraft:

- Beschreibt die elastische Kraft zwischen zwei mit einer Feder verbundenen Körpern:

$$\mathbf{F}_{12} = k(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

- Die Federkraft ist proportional zur Auslenkung, ihre Stärke wird bestimmt durch die Federkonstante k. Diese manchmal auch mit D abgekürzt.
- Das Gesetz wird auch Hookesches Gesetz genannt, benannt nach Robert Hooke, einem Zeitgenossen von Newton der u.a. das Mikrofon erfunden hat.
- Der funktionelle Zusammenhang ist für physikalische Systeme von großer Bedeutung, will man die Dynamik in näherer Umgebung zu einem stationären Zustand beschreiben.

6. Taylorentwicklung

Mit der Taylorentwicklung stellen wir eine Funktion $f(x)$ in näherer Umgebung zu einer Stelle ihres Arguments (z. B. x_0) durch den Wert dieser Funktion und aller ihrer Ableitungen an dieser Stelle x_0 dar.

Das Beispiel der Federkraft beschreibt die Kraftwirkung auf ein Teilchen wenn dieses nur sehr leicht (die nähere Umgebung) aus seiner Ruhelage ausgelenkt wird.

Die Funktion $f(x)$ muss dabei beliebig oft differenzierbar sein.

Für $x_0 = 0$ gilt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Allgemein gilt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Mathematischer Einschub

Beispiel 1

Trigonometrische Funktion $f(x) = \sin x$ und wir suchen die Funktion in Umgebung zu $x_0 = 0$.

$$f(x) = \sin x \qquad f(0) = 0$$

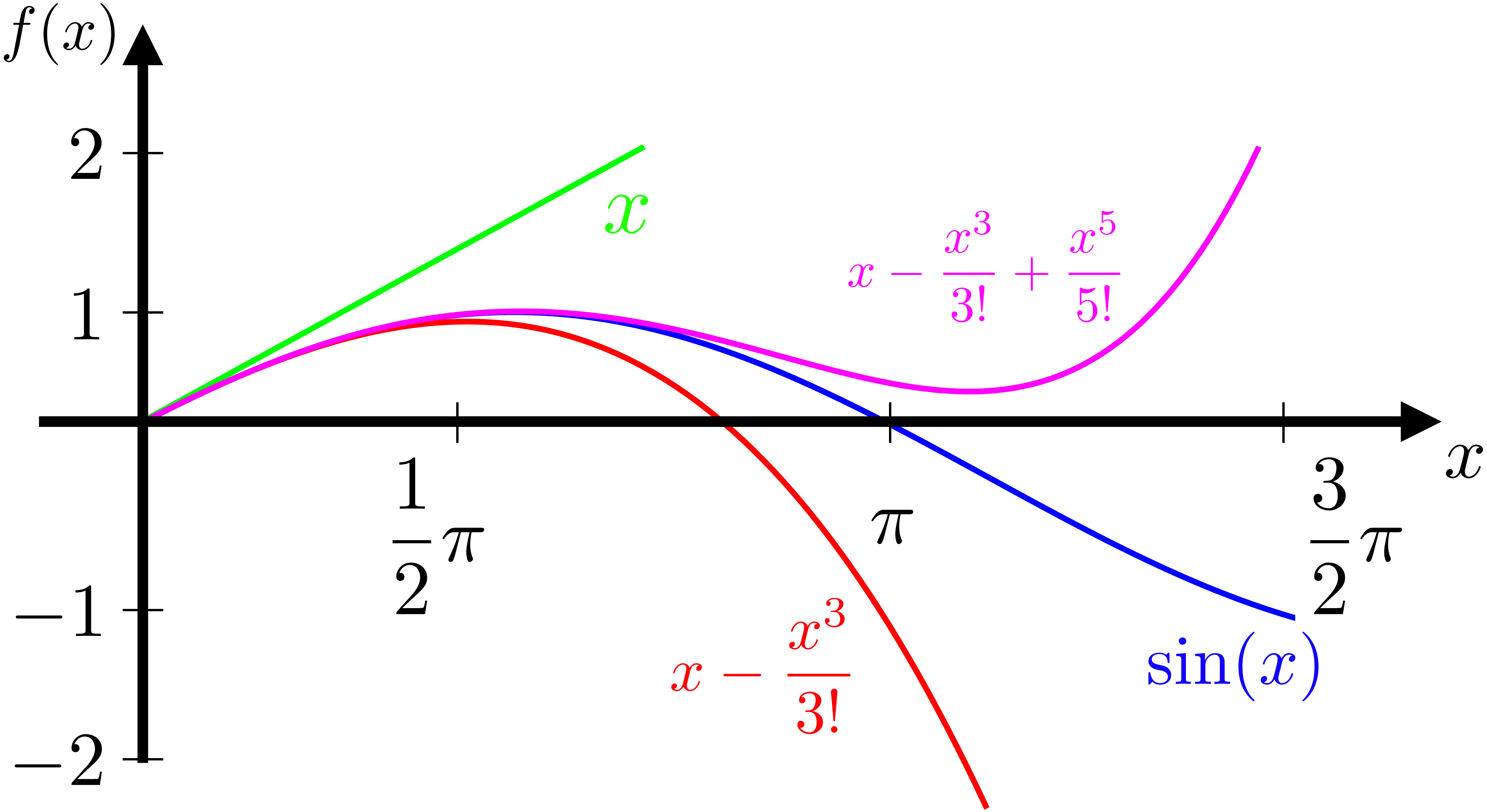
$$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Beispiel (1)



Mathematischer Einschub

Beispiel (2)

Exponentialfunktion $f(x) = e^x$. Wir suchen die Funktion in Umgebung zu $x_0 = 0$.

$$f(x) = e^x \qquad f(0) = 1$$

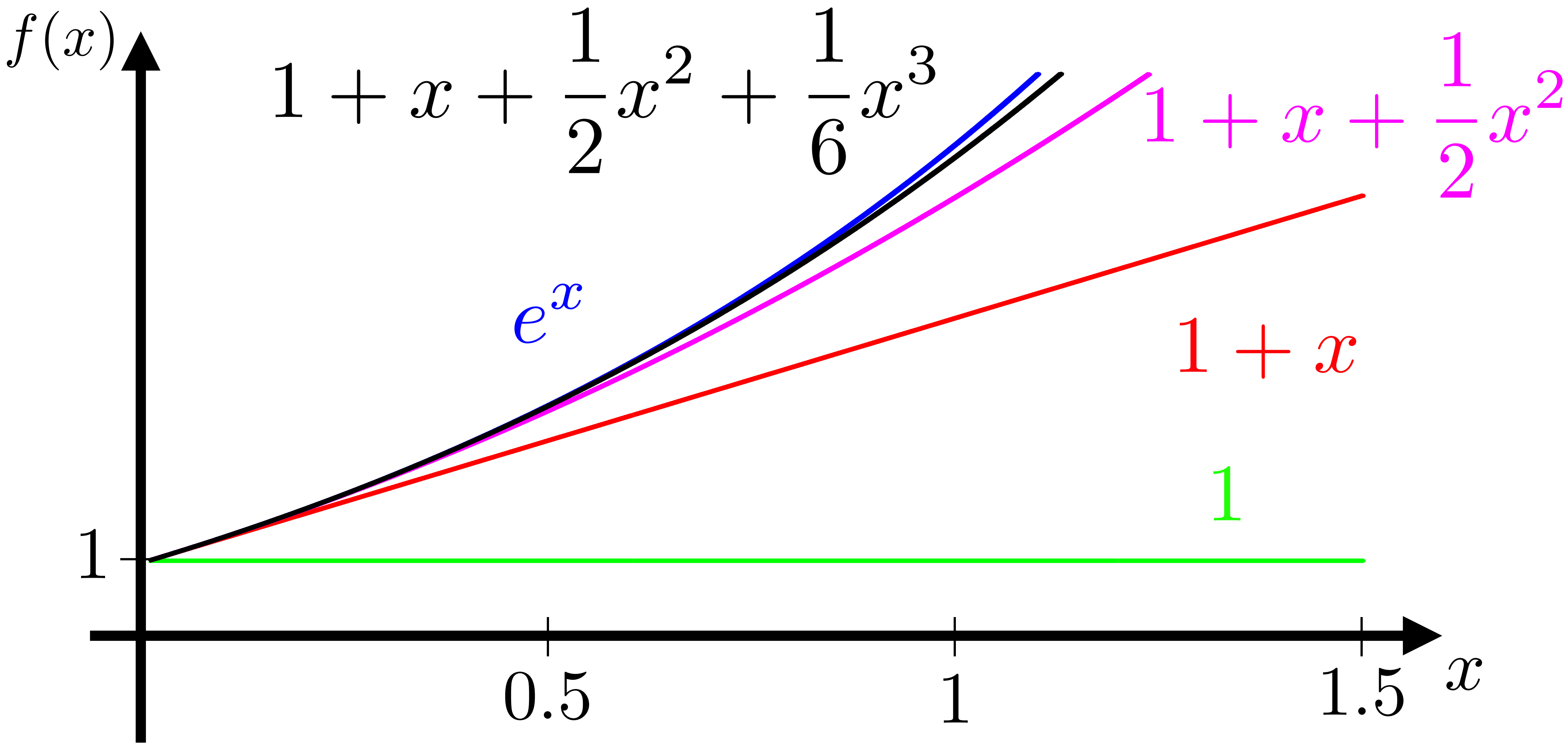
$$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \qquad f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = e^x \qquad f'''(0) = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Beispiel (2)



Mathematischer Einschub

Beispiele für die Entwicklung um $x_0 = 0$

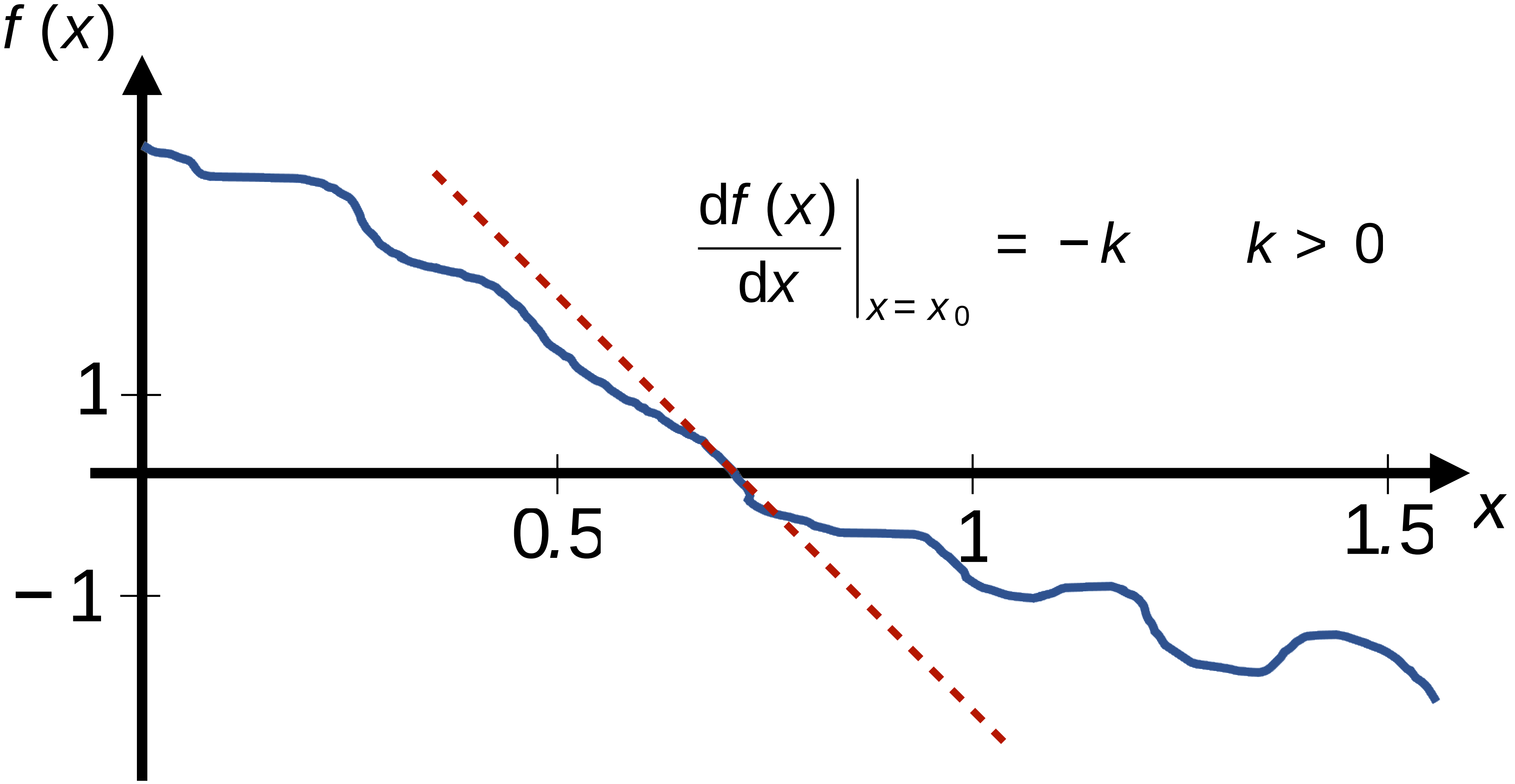
$f(x)$	Taylor-Reihe
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$
$\frac{1}{(1-x)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$
$\sqrt{1+x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$

Geometrische Reihe

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Mathematischer Einschub

Die Federkonstante k ist der erste Term einer Taylorreihe einer beliebigen Kraft in näherer Umgebung zu einem stationären Punkt (ein Ruhepunkt).



Mathematischer Einschub

Beispiel (5)

Reibungskräfte:

Beschreiben u.a. Kraftwirkungen auf einen Körper, die proportional sind zu seiner Geschwindigkeit und die Geschwindigkeit reduzieren.

$$\mathbf{F} = -f(v)\,\mathbf{v}$$

Der Vorfaktor $f(v)$ ist abhängig von der Art der Reibung: Bei der Stokeschen Reibung ist der Vorfaktor konstant. Bei der Newtonschen Reibung ist der Vorfaktor proportional zur Geschwindigkeit.

Haftreibung: Durch die Schwerkraft wirkt eine Tangentialkraft $\mathbf{F}_T \neq 0$. Gleichwohl bewegt sich der Klotz nicht. Es muss also eine weitere Kraft wirken.

$$\mathbf{F}_\mathrm{R} = -\mathbf{F}_\mathrm{T}$$

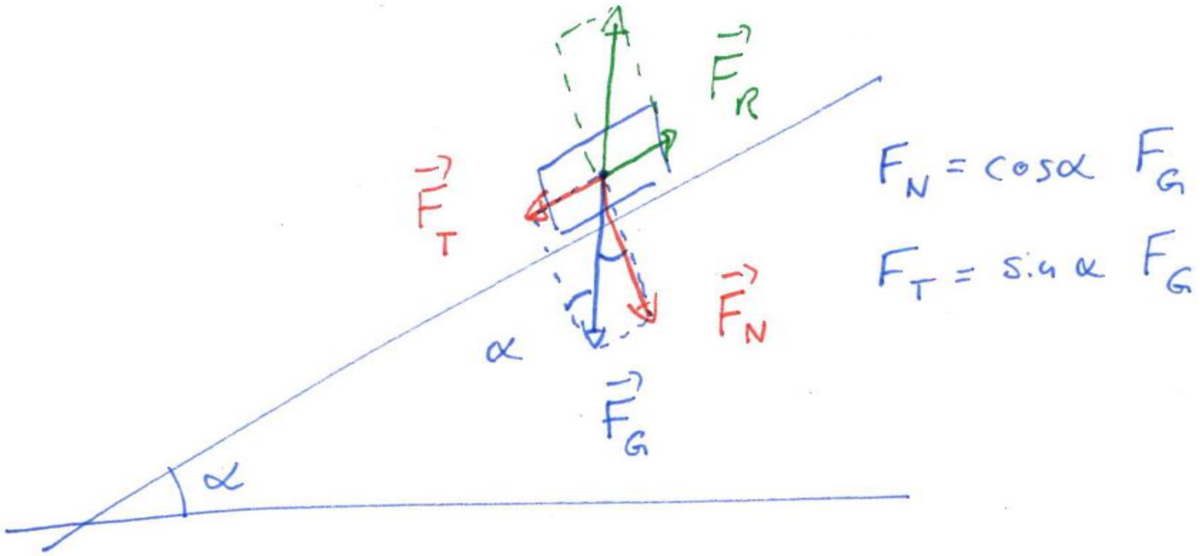
so dass

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mathrm{T} + \mathbf{F}_\mathrm{R} = 0$$

zumindest so lange, bis

$$\mathbf{F}_\mathrm{T} > \mu_\mathrm{H} \cdot \mathbf{F}_\mathrm{N}$$

mit dem Haftreibungskoeffizienten μ_H



Dann beginnt der Klotz zu rutschen. Also

$$\sin\alpha \; F_{\mathrm{G}} > \mu_{\mathrm{H}} \cdot \cos(\alpha) \; F_{\mathrm{G}} \;\Rightarrow \qquad \tan\alpha > \mu_{\mathrm{H}}$$

Beim Rutschen oder Gleiten wirkt weiterhin Reibung, aber mit Gleitreibungskoeffizienten $\mu_{\mathrm{G}} < \mu_{\mathrm{H}}$. Haft- und Gleitreibung sind unabhängig von der Geschwindigkeit.

Unterscheidung innere und äußere Kräfte

Bei inneren Kräften wirkt eine Kraft auf die Teilchen, die verursacht wird durch die Teilchen des betrachteten Systems.
Beispiel: Bewegung zweier geladener Teilchen im Vakuum

Äußere Kräfte haben ihren Ursprung außerhalb des Systems. Die Ursache wird nicht weiter beschrieben. Äußere Kräfte erzeugen ein Kraftfeld innerhalb des Systems. Hier wird jedem Punkt im Raum $\mathbf{r}$ eine Kraft zugeordnet $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.
Beispiel: Gravitationskraft eines Körpers, der sehr viel schwerer ist als alle anderen.

Wir bezeichnen ein System als abgeschlossen, wenn keine äußeren Kräfte vorliegen.

> Die Einteilung zwischen inneren und äußeren Kräften ist bis zu einem gewissen Maße willkürlich. De facto muss diese Einteilung aus Gründen der Praktikabilität erfolgen.