2.1.4 Der Schwerpunkt von Systemen aus vielen Teilchen

Wir betrachten ein System von vielen, insgesamt N Teilchen (Massenpunkten).
Für das Teilchen i gilt dann (1. und 4. Newtonsches Gesetz)

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ex}} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}$$

mit den inneren Kräften $\mathbf{F}_{ij}$ von den jeweils anderen Teilchen und den externen Kräften von Quellen außerhalb des Systems. Wir addieren die Bewegungsgleichungen aller Teilchen i:

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ex}} + \sum_{i,j \neq i} \mathbf{F}_{ij}$$

Für die inneren Kräfte gilt (3. Newtonsches Gesetz, actio=reactio)

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i,j\neq i} \mathbf{F}_{ij} = 0$$

Damit wird

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{\mathrm{ex}} = \mathbf{F}^{\mathrm{ex}}$$

Wir definieren den Schwerpunkt $\mathbf{R}$ mittels

$$\boxed{\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \, \mathbf{r}_i}$$

mit der Gesamtmasse

$$M = \sum_i m_i$$

Zweimaliges zeitliches Ableiten von $\mathbf{R}$ und Einsetzen in die Bewegungsgleichung ergibt

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{\mathrm{ex}}$$

Schwerpunktsatz

Der Schwerpunkt eines Systems von Teilchen (Massenpunkten) bewegt sich so, als ob die gesamte Masse in ihm vereint ist und alle äußeren Kräfte allein auf ihn wirken.

- Die inneren Kräfte haben also auf die Bewegung des Massenzentrums keinen Einfluss.
- Wenn man sich nicht für die Bewegung der einzelnen Teilchen interessiert, genügt zur Berechnung der Gesamtbewegung allein der Schwerpunkt.

Freiheitsgrade

- Anzahl der Freiheitsgrade eines Systems aus Massepunkten bezeichnet man mit f.
- f entspricht der Anzahl der Koordinaten, um die Bewegung des Massepunktes zu beschreiben.
- Massepunkt i: Ortskoordinaten x_i, y_i und z_i. System aus N Massepunkten $f = 3N$.
- Beschreibung eines starren Körpers möglich durch drei nichtkollineare Punkte.

Beispiel: Würfel charakterisiert durch genau 3 Eckpunkte $\mathbf{r}_{1,2,3}$

- Starrer Körper gibt als weiterer Einschränkung:

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = \text{const. und } |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3| = \text{const. und } |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3| = \text{const.}$$

- Dadurch reduzieren sich die Freiheitsgrade auf insgesamt sechs.

Ein starrer Körper ist durch drei translatorische Freiheitsgrade (wo befindet sich im absoluten Raum eine ausgewählte Zentrumskoordinate) und drei rotatorische Freiheitsgrade (wie orientiert ist der starre Körper im absoluten Raum relativ zu der ausgewählten Zentrumskoordinate).