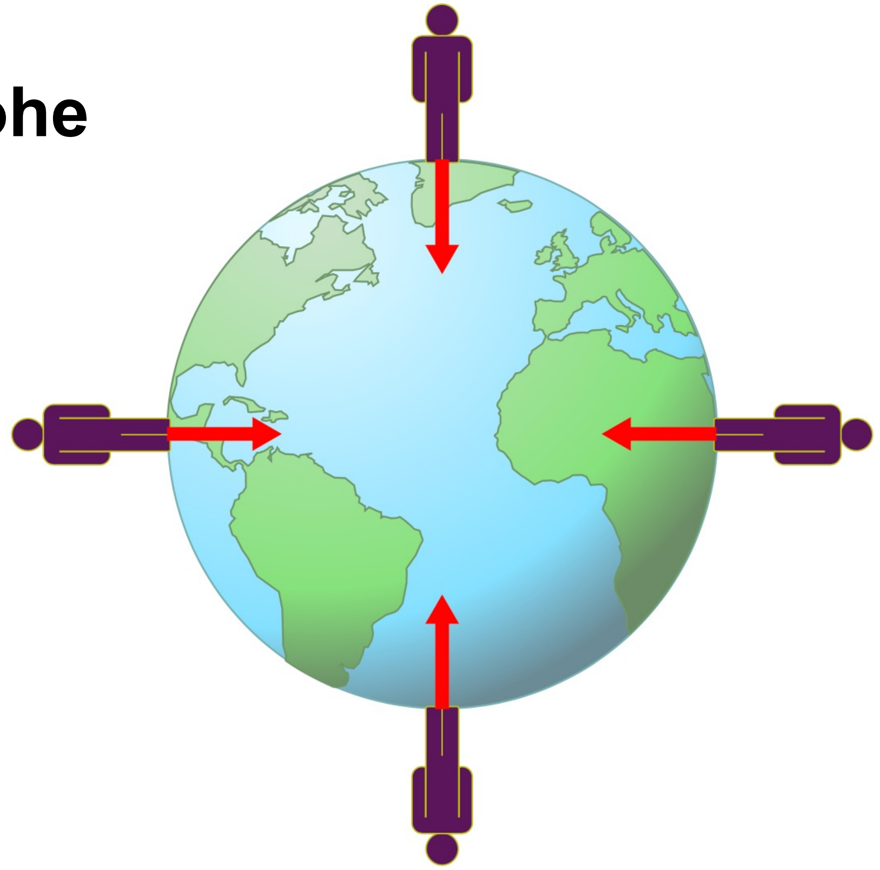
2.1.5. Fall im Schwerefeld der Erde
2.1.5.1 Freier und gerader Fall aus geringer Höhe

- Wie betrachten einen Körper der Masse m im Schwerefeld der Erde kurz oberhalb des Erdradius.
- Die Höhe ist klein, so dass die Gravitationskraft unabhängig von der exakten Höhe ist ($r \ll R_{\mathrm{Erde}}$).
- Die Kraft, die auf den Körper wirkt, ist die Gravitationskraft der Erde. Wir bezeichnen das als die Schwerkraft.



$$\mathbf{F} = G\frac{mM_{\mathrm{Erde}}}{|\mathbf{R}_{\mathrm{Erde}}|^2}\frac{-\mathbf{R}_{\mathrm{Erde}}}{|\mathbf{R}_{\mathrm{Erde}}|} = -mg\mathbf{e}_r$$

$$g = \frac{GM_{\mathrm{Erde}}}{R_{\mathrm{Erde}}^2} = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Bildquelle: https://www.leifiphysik.de

- Wir lösen hier alles rein skalar da wir eine Bewegung nur in radialer Richtung betrachten. Die zu lösende Bewegungsgleichung für die radiale Koordinate des Teilchens lautet

$$m\ddot{r} = -mg$$

- Die Ortskoordinate r beschreibt den Abstand von der Erdoberfläche.
- Der Körper wird konstant beschleunigt. Die Geschwindigkeit wächst linear mit der Zeit

$$v(t) = \dot{r} = -gt + C_1$$

- Die Integrationskonstante C_1 ist die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$:

$$C_1 = v(t = 0) = v_0$$

- Eine weitere Integration nach der Zeit liefert die Ortskoordinate

$$r(t) = -\frac{g}{2}t^2 + C_1 t + C_2$$

- Die Integrationskonstante C_2 ist die Höhe zur Zeit $t = 0$, $C_2 = r(t = 0) = h$.

$$\boxed{r(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + h}$$

Spezialfall 1: Wird das Teilchen aus der Höhe losgelassen ($v_0 = 0$) lautet die Lösung

$$\boxed{r(t) = h - \frac{g}{2}t^2}$$

- Die Fallzeit T bis zur Erdoberfläche ergibt sich aus $r(T) = 0$ und lautet

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

- Die Endgeschwindigkeit $v(T) = v_{\mathrm{Max}}$ beträgt

$$v_{\mathrm{Max}} = -gT = -\sqrt{2gh}$$

Beispiel: Ein Sprung vom Zehnmeterturm dauert gerundet $T = 1.4$ s und die maximale Geschwindigkeit beträgt $v_{\mathrm{Max}} = -14\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \simeq -50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Spezialfall 2: Wird das Teilchen vom Erdboden aus senkrecht nach oben geworfen, so erhalten wir mit den Anfangsbedingungen

$$C_1 = v(t = 0) = v_0 \quad \text{und} \quad C_2 = r(t = 0) = 0$$

als Lösung

$$r(t) = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 t$$

2.1.5.2 Schräger Fall bzw. Wurf im Schwerefeld der Erde

- Ausgangspunkt ist eine gleichförmig beschleunigte Bewegung im dreidimensionalen kartesischen Raum. Wir spezifizieren dies später auf das Schwerefeld der Erde.

- Die Beschleunigung ist konstant, also unabhängig von der Zeit

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a} = \text{const}$$

- Eine Lösung erhalten wir durch zweimalige Integration:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$$

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{a}}{2}t^2 + \mathbf{b}t + \mathbf{c}}$$

- Anfangsbedingungen spezifizieren unsere Integrationskonstanten

$$t = t_0 \;\rightarrow\; \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \;\text{ und }\; \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0$$

- Dadurch ergeben sich die Integrationskonstanten zu

$$\mathbf{b} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{a}t_0$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{a}}{2}t_0^2 - \mathbf{b}t_0 = \mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{a}}{2}t_0^2 - \mathbf{v}_0 t_0 + \mathbf{a}t_0^2$$

- Die Lösungen für die Geschwindigkeit und den Ort lautet dann

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a}(t - t_0) + \mathbf{v}_0$$

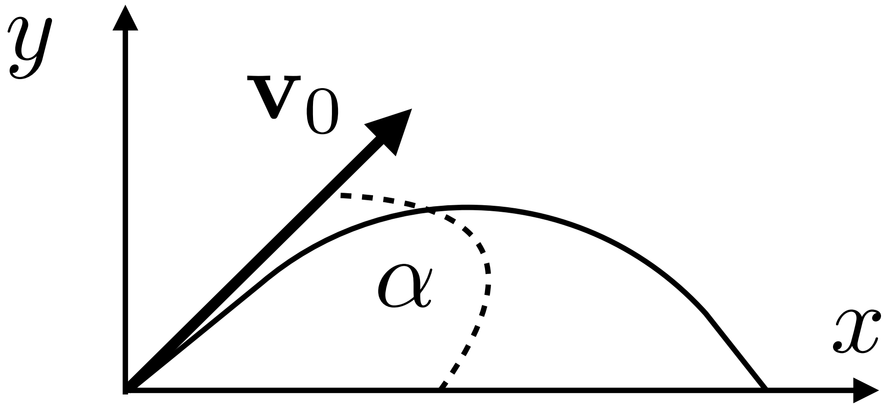
$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{a}}{2}(t - t_0)^2 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \mathbf{r}_0$$

Dies ist eine Bewegung in einer Ebene aufgespannt durch die beiden Vektoren $\mathbf{v}_0$ und $\mathbf{a}$.

- In unserem konkreten Fall des schrägen Falls bzw. des Wurfes betrachten wir eine Bewegung in einer x-y-Ebene. Das Koordinatensystem wurde so gewählt, dass dies immer der Fall ist. In dieser Konkretisierung gilt

$$\mathbf{a} = -g\mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{e}_x + v_{0y}\mathbf{e}_y$$



- Die spezifizierte Lösung ist dann

$$x(t) - x_0 = v_{0x}(t - t_0) \;;\qquad y(t) - y_0 = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + v_{0y}(t - t_0)$$

- Die Bahnkurve $y = y(x)$ lautet damit

$$y(x) = -\frac{g}{2v_{0x}^2}(x - x_0)^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0) + y_0$$

- Spezialfall: Die folgende Diskussion beinhaltet den senkrechten Wurf für den Fall, in dem das Teilchen keine Anfangsgeschwindigkeit in x-Richtung hat.

- Annahmen: $v_{0x} = v_0 \cos\alpha,\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha,\ x_0 = y_0 = 0$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \cos\alpha \\ y(t) &= v_0 t \sin\alpha - \frac{g}{2} t^2 \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{y(x) = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x \tan\alpha}$$

Welche physikalischen Aussagen können wir treffen?

- Steigzeit t_s: Ist die Zeit die vergeht, bis die zeitliche Änderung der y-Koordinate verschwindet. Bedingung: $\dot{y} = 0$

$$0 = v_0 \sin\alpha - g t_s \quad \rightarrow \quad \boxed{t_s = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}}$$

- Wurfdauer t_w: Ist die Zeit die vergeht, bis der Massepunkt nach dem Flug wieder auf Referenzhöhe des Bodens angekommen ist. Bedingung: $y = 0$

$$0 = v_0 t_w \sin\alpha - \frac{g}{2} t_w^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{t_w = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = 2 t_s}$$

- Wurfhöhe: Ist die erreichte Höhe nach der Steigzeit. Bedingung: $y(t_s)$

$$y(t_s) = v_0 \sin\alpha \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g}{2} v_0^2 \frac{\sin^2\alpha}{g^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(t_s) = v_0^2 \frac{\sin^2\alpha}{2g}}$$

- Wurfweite: Ist die x-Koordinate nach Verstreichen der Wurfdauer. Bedingung: $x(t_w)$

$$x(t_w) = v_0 \frac{2v_0}{g} \sin\alpha \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t_w) = \frac{v_0^2}{g} \sin^2 2\alpha}$$

- Wie groß ist die maximal mögliche Wurfweite mit einem optimalen Einstellwinkel? Hierfür müssen wir Wurfweite nach dem Winkel ableiten und Extremwerte suchen:

$$\cos 2\alpha_{\mathrm{Max}} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha_{\mathrm{Max}} = \frac{\pi}{4}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{\mathrm{Max}} = \frac{v_0^2}{g}}$$

2.1.5.1 Freier und gerader Fall aus geringer Höhe mit Dämpfung

- Bisher betrachteten wir nur idealisierte Systeme ohne Wechselwirkung mit der Umgebung. Zur Diskussion der Dämpfung wechseln wir zu einer phänomenologischen Betrachtung, bei der wir zwar die Umgebung einbeziehen, aber keine exakte Beschreibung durchführen müssen.
- Freier Fall mit Reibung (Dissipation): Bewegung eines Teilchens in ruhendem Gas bzw. ruhender Flüssigkeit.
- Wechselwirkung mit Umgebung führt zu einem Widerstand gegen die Bewegung. Dies wird beschrieben durch eine geschwindigkeitsabhängige Kraft $\mathbf{F} = \mathbf{F}(v)$.
- Exakte Beschreibung folgt, wie alle eingeprägten Kräfte, aus anderen Theorien.

Modelle der Reibung

- 1. Fall: Für kleine Körper und/oder niedrigen Geschwindigkeiten wird die Strömung durch das Teilchen nicht verwirbelt. Man spricht von einer laminaren Strömung. Man bezeichnet diesen Fall als Stokesche Reibung. Die dissipative Kraft ist proportional zur Geschwindigkeit.

  Beispiel Kugel (Radius: R, materialspezifische Viskosität η):

$$F_{\mathrm{Diss}}(v) = 6\pi\eta R v \propto v$$

- 2. Fall: Gewöhnliche Körper bei denen es zu einer Verwirbelung der Strömung kommt, in der dieser fallen: turbulente Strömung. Bei der auftretenden Newtonschen Reibung ist die Kraftwirkung proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit:

$$F_{\mathrm{Diss}}(v) \propto v^2$$

Allgemeine Lösung

- Wir betrachten wieder eine Bewegung in der Nähe der Erdoberfläche. Das Schwerefeld ist homogen und wir spezifizieren die dissipative Kraft zunächst nicht weiter.

- Für eine allgemeine Lösung wird die Reibungskraft nicht spezifiziert und wir schreiben

$$\mathbf{F}_{\mathrm{Diss}} = \mathrm{f}(\dot{y})\mathbf{e}_y$$

- Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$m\ddot{y} = -mg + f(\dot{y}).$$

- Wenn wir die Geschwindigkeit $v = \dot{y}$ substituieren, schreiben wir diese Gleichung als

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g + \frac{1}{m} f(v).$$

- Wir lösen diese Gleichung in dem wir die Variablen separieren und integrieren

$$t = \int_0^v \frac{\mathrm{d}v'}{-g + m^{-1} f(v)}$$

7. Lösen (inhomogener) (linearer) Differentialgleichungen

- Auf der vorherigen Folien haben wir eine Differentialgleichungen erster Ordnung mit der Methode der Separation der Variablen gelöst.

- Allgemein sind Differentialgleichungen Gleichungen, in denen nicht nur eine Funktion selbst sondern auch ihre Ableitungen vorkommen.

- Beispiele: Newton in 1D: $$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$$

  Newton in 3D: $$m\ddot{\mathbf{r}} = F(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{x}}, t)$$

Mathematischer Einschub

Differentialgleichungen erster Ordnung

- Differentialgleichungen erster Ordnung enthalten neben der Funktion $y(x)$ nur die erste Ableitung $y'(x)$.

- Beispiele: $y'(x) = \cos x$ oder $y'(x) + y(x) = 0$

- Mögliche Schreibweisen: $F(x, y, y') = 0$ oder $y' = f(x, y)$

- Lösung einer Differentialgleichung im Intervall $a < x < b$: Funktion $h(x)$ mit Ableitung $h'(x)$ die nach Einsetzen von $h(x)$ für $y(x)$ und $h'(x)$ für $y'(x)$ in die Differentialgleichung eine wahre Aussage liefert.

- Beispiel: $y'(x) - y(x) = 0 \;\rightarrow\; y(x) = e^x$

Allgemeine vs. spezielle oder partikuläre Lösung

- Differentialgleichungen haben üblicherweise viele Lösungen, die sich nicht unterscheiden durch den Werte von additiven oder multiplikativen Konstanten, welche nach der Ableitung häufig verschwinden.

- Beispiel: $y'(x) = e^x \;\rightarrow\; y(x) = e^x + C$

- Lösungen mit unbestimmten Konstanten nennt man allgemeine Lösungen.

- Spezielle oder partikuläre Lösungen ergeben sich durch die Wahl der Konstanten.

Mathematischer Einschub

Anfangswertproblem

- Eine Differentialgleichung mit Anfangsbedingungen, die die Lösung $y(x)$ für ein konkretes x_0 definiert, nennt man eine Anfangswertproblem.

- Allgemeine Form: $$y' = f(x, y) \quad \text{und} \quad y(x_0) = y_0$$

- Wenn die Funktionswerte auf Rändern eines endlichen Gebietes vorgegeben werden, spricht man auch von einem Randwertproblem.

Es gibt viele Wege zum Lösen von Differentialgleichungen.

Wir diskutieren hier kurz einige.

Separierbare Differentialgleichungen

- Häufig schreiben wir Differentialgleichungen $y' = f(x, y)$ als

$$y' = f(x)g^{-1}(y)$$

- Diese bezeichnet man als separierbar, da alle Größen die von y abhängen auf einer Seite der Gleichung geschrieben werden können und alle die von x abhängen auf der anderen Seite. Mit $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ erhalten wir

$$g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$$

- Linke Seite multipliziter mit einer virtuellen $1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}$ und Integration über x ergibt

$$\int g(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + C$$

Mathematischer Einschub

Separierbare Differentialgleichungen

- Durch Änderung der Integrationsvariabel auf der linken Seite auf y und unter Ausnutzen, dass $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ erhalten wir:

$$\int g(y)\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C$$

- Wenn die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(y)$ stetig sind, können wir die Lösung der Differentialgleichung berechnen.

- Die Separierung ist nicht immer offensichtlich, kann aber forciert werden für bestimmte Formen von Differentialgleichungen.

Separierbare Differentialgleichungen

- Zum Beispiel kann die Differentialgleichung der Form

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

mit der Substitution $u = \frac{y}{x}$ separiert werden. Wir erhalten

$$y = ux \quad \text{und} \quad y' = u'x + u$$

und die Differentialgleichung nimmt die folgende Form an

$$u'x = g(u) - u \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{g(u) - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Mathematischer Einschub

Lineare Differentialgleichungen

- Eine Differentialgleichung erster Ordnung ist linear, wenn sie in der Form

$$y' + p(x)y = r(x)$$

geschrieben werden kann. Sie hängt nur linear von y und y' ab.

Beispiel: $y'(x) + y(x) = e^x$

Gegenbeispiele: $y'(x)y(x) = 0$; $y^2(x) = x$

- Die Differentialgleichung ist homogen wenn $r(x) = 0$ und ansonsten inhomogen.

- Für lineare homogene Differentialgleichungen gilt das Superpositionsprinzip. Bei bekannten Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ ist $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ auch eine Lösung.

Mathematischer Einschub

- Eine allgemeine Lösung kann angegeben werden $p(x)$ und $r(x)$ stetig sind. Wir lösen hierfür zuerst die homogene Gleichung:

$$y' + p(x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\mathrm{d}x$$

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

- Die inhomogene Gleichung löst sich dann (hier ohne Herleitung) mit Hilfe eines integrierenden Faktors als

$$y(x) = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int e^{\int p(x)\mathrm{d}x} r(x)\mathrm{d}x + \mathrm{C}\right]$$

Mathematischer Einschub

Homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

- Eine wichtige Kategorie von Differentialgleichungen sind solche mit konstanten Koeffizienten. Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung hat dann die Form

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

- Dies ist eine lineare Gleichung, da die Summer zweier Lösungen auch wieder eine Lösung der Differentialgleichung ist.
- Und es ist eine homogene Gleichung, da die wir keinen Term auf der rechten Seite stehen haben der von x abhängt.
- Die Koeffizienten vor den Ableitungen $y^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n y(x)}{\mathrm{d}x^n}$ sind keine Funktion von x.

- Differentialgleichungen dieser Form lassen sich lösen mit dem Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

- Um die Koeffizienten λ zu bestimmen, stecken wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung und nutzen, dass $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ und $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$ ist:

$$(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} = 0$$

- Daraus erhalten wir die quadratische (charakteristische) Gleichung

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

mit den Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_1 a_0}\right)$$

Mathematischer Einschub

- In der Tat haben wir so zwei verschiedene Lösungen gefunden

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \qquad \text{und} \qquad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

- Die allgemeine Lösung kann dann geschrieben werden als

$$y(x) = \sum_{i=1}^{2} C_i y_i(x) = \sum_{i=1}^{2} C_i e^{\lambda_i x}$$

- Bei einem positiven oder negativen Argument der Wurzel, sind die λ reell oder komplex. Falls die Nullstellen degeneriert sind, verwendet man den Ansatz

$$y_1(x) = e^{\lambda x} \qquad \text{und} \qquad y_2(x) = x\, e^{\lambda x}$$

Stokesche Reibung

- Das spezielle Kraftgesetz lautet $f(v) = -rv$, wobei der hier eingeführte Parameter r alle Eigenschaften des konkreten Settings berücksichtigt. Mit $\kappa = \frac{r}{m}$ schreiben wir die vorherige allgemeine Lösung als

$$t = \int_0^v \frac{\mathrm{d}v'}{-g - \kappa v'}$$
$$= -\frac{1}{\kappa}\ln(g + \kappa v')\Big|_0^v$$
$$= -\frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{g + \kappa v}{g}\right)$$

$$\rightarrow g + \kappa v = g e^{-\kappa t} \quad \rightarrow \quad \boxed{v(t) = -\frac{gm}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{m}t}\right)}$$

- Für den Grenzfall $t \to \infty$ strebt diese Geschwindigkeit asymptotisch einem festen Wert entgegen. Das Teilchen fällt dann mit einer konstanten Fallgeschwindigkeit:

$$v_\infty = -\frac{gm}{r} = -\frac{g}{\kappa}$$

- Die Ortskoordinate das Teilchens $z(t)$ erhalten wir nach einer weiteren Integration:

$$h - z(t) = \frac{gm^2}{r^2} - \frac{gm}{r}\left(t + \frac{m}{r}e^{-\frac{r}{m}t}\right)$$

Netwonsche Reibung

- Das spezielle Kraftgesetz lautet $f(v) = -qv^2 \frac{v}{|v|}$ wobei der hier eingeführte Parameter q alle Eigenschaften des konkreten Settings berücksichtigt. Wir können die vorherige allgemeine Lösung mit $\kappa^2 = \frac{q}{mg}$ schreiben als

$$t = -\frac{1}{g}\int_0^v \frac{\mathrm{d}v'}{1-(\kappa v')^2} \qquad \rightarrow \qquad v(t) = -\frac{1}{\kappa}\tanh(g\kappa t)$$

$$\rightarrow \qquad \boxed{v(t) = -g\sqrt{\frac{m}{qg}}\tanh\left(\sqrt{\frac{qg}{m}}\,t\right)}$$

- Für den Grenzfall $t \to \infty$ strebt diese Geschwindigkeit wieder asymptotisch einem festen Wert entgegen. Das Teilchen fällt dann mit einer konstanten Fallgeschwindigkeit:

$$|v_\infty| = g\sqrt{\frac{m}{qg}}$$

- Die Ortskoordinate das Teilchens als Funktion der Zeit erhalten wir nach einer weiteren Integration:

$$z(t) = h - \frac{m}{q}\ln\cosh\left(\sqrt{\frac{qg}{m}}\,t\right)$$

8. Numerische Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen

- Analytische Lösungen sollen immer durchgeführt werden, wenn dies möglich ist. Aber praktischen Gründen ist heute auch sehr häufig eine numerische Lösung hilfreich.

- Aus Gründen der Praktikabilität werden wir diesen Teil der Vorlesung in einem Jupyter Notebook durchführen.

Jupyter Notebook

- In diesem Beispiel diskutieren wir Details zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen.

- Wir betrachten hierbei das Beispiel eines schrägen Wurfes (gedämpft und ungedämpft)