2.1.6.1 Arbeit

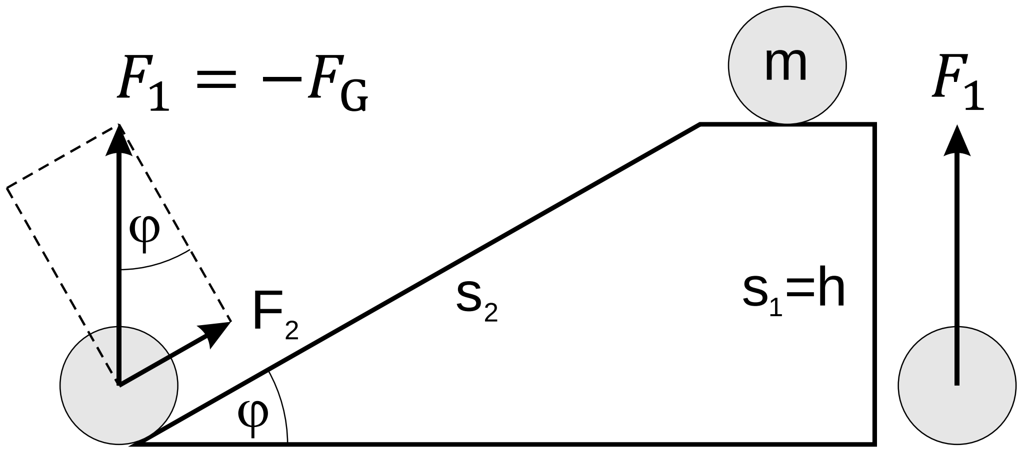
- Der Begriff der Arbeit entwickelte sich aus Experimenten mit Gewichten z.B. an schiefen Ebenen, Hebeln, Seilen und Rollen.
- Erfahrung: Zum Heben von Gewichten auf eine feste Höhe kann man die dazu aufzuwendende Kraft F verringern, der nötige Transportweg s wird dann aber größer. Und zwar so, dass die Arbeit W (ohne Reibung! vgl. 2.1.6.2) konstant ist:

Arbeit = Kraft × Weg bzw. $\boxed{W = F \cdot s}$

Beispiel: Schiefe Ebene

$$W_1 = F_1 \cdot s_1 = -F_G \cdot h = mgh$$

$$W_2 = F_2 \cdot s_2 = -F_G \cdot \sin\varphi \cdot \frac{h}{\sin\varphi} = mgh$$



- Die Einheit der Arbeit ergibt sich dann zu

$$[W] = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}} = \mathrm{J}$$

(Joule; nach James Prescott Joule, 1818-1889)

Beispiel: Ein Mensch mit Körpermasse $m = 75\ \mathrm{kg}$ läuft im Physikhochhaus über die Treppe in das 6. Stockwerk und steigt dabei entgegen der Schwerkraft $h \simeq 24\ \mathrm{m}$ hoch. Dabei leistet er die Arbeit

$$W = -F_\mathrm{G} \cdot h = m \cdot g \cdot h$$

$$= 75\ \mathrm{kg} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \cdot 24\ \mathrm{m}$$

$$= \underline{17658\ \mathrm{J}}$$

Verallgemeinerung

- Vektorieller Charakter: Arbeit wird nur für den Teilweg geleistet, bei dem sich das Teilchen in Richtung der Kraft bewegt.
- Die Arbeit W ist eine skalare Größe.

Mathematisch kann beides durch das Skalarprodukt von Kraft und Weg erfüllt werden. Mit der (vektoriellen) Änderung des Ortes $\Delta\boldsymbol{r}$ definieren wir daher

Wenn eine konstante Kraft $\mathbf{F}$ ein Teilchen, auf das die Kraft wirkt, um die Strecke $\Delta\mathbf{r}$ verschiebt, wird **von dem Teilchen** die **Arbeit** W verrichtet mit

$$W = -\mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}$$

- Vorzeichen: Bei einer Verschiebung entgegen der Kraft wird von außen an dem Teilchen Arbeit geleistet. Diese wird dann positiv gezählt.

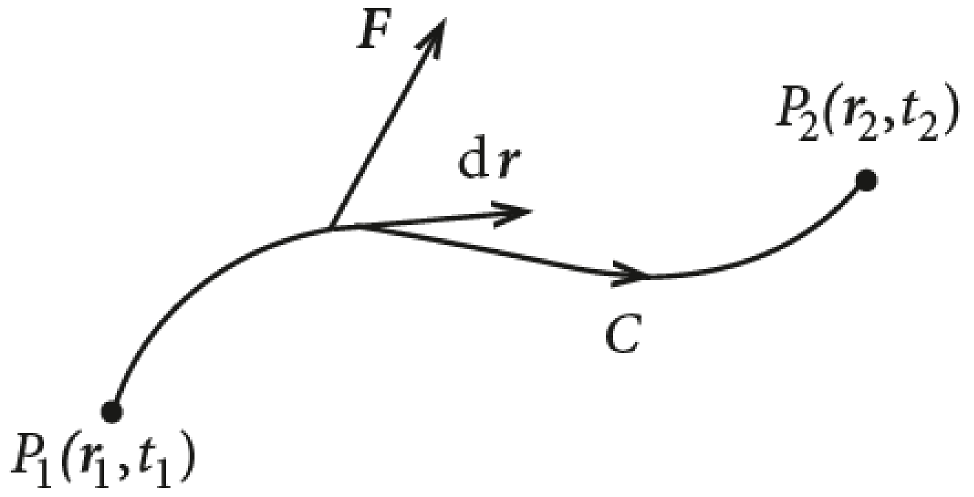
Wir verallgemeinern weiter

- Die Kraft sei nun orts- und zeitabhängig und gegeben durch ein Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$.
- Dann kann für eine konstante Kraft die vom Teilchen geleistete Arbeit nur für eine infinitesimale Änderung des Ortes zu einem gegebenen Zeitpunkt t bestimmt werden,

$$\delta W = -\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

- Die Gesamtarbeit zwischen zwei Orten P_1 und P_2 entlang eines Weges C berechnet sich dann durch Integration zu

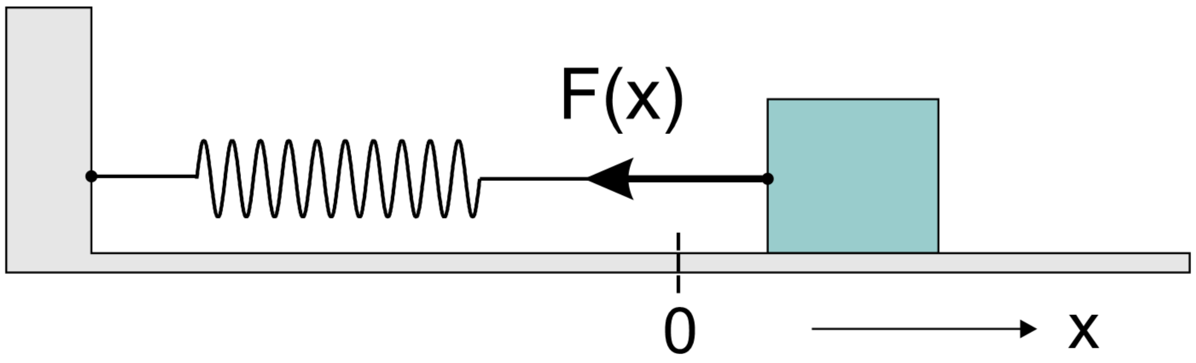
$$W_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$



Bildquelle: Nolting, Klassische Mechanik

Beispiel 1: Ein fester Körper sei über eine elastische Feder mit der Wand verbunden. Er gleite in x-Richtung reibungsfrei über den Boden. Die Feder übt die Kraft $F = -D \cdot x$ mit $D = 20\ \mathrm{N/m}$ auf den Körper aus. Anfangs befinde sich der Körper am Ort $x_0 = 0\ \mathrm{m}$). Berechne die Arbeit W, um zum Ort $x_1 = 0.5\ \mathrm{m}$ zu gelangen.

$$W = -\int_{x_0}^{x_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$$

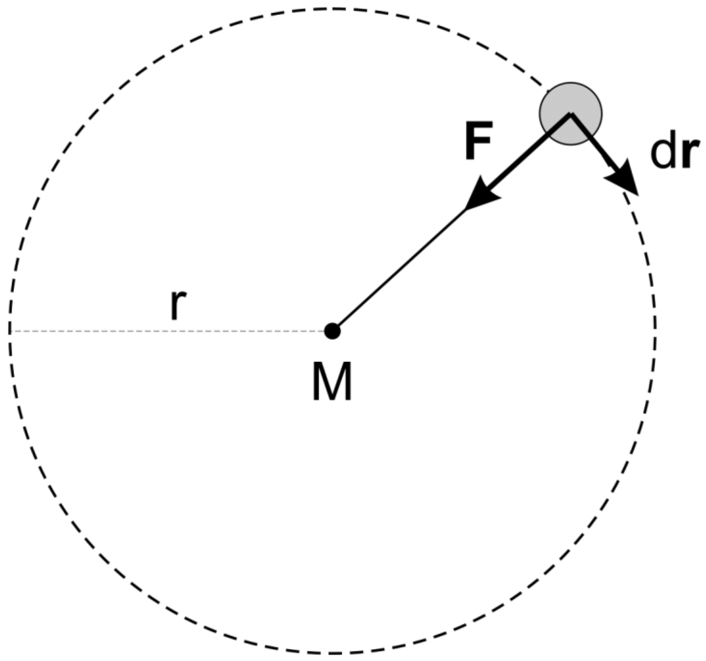


$$= +\int_{x_0}^{x_1} D \cdot x\,\mathrm{d}x = D\left[\frac{1}{2}\,x^2\right]_{x_0}^{x_1} = +\frac{1}{2}\,D\,(x_1^2 - x_0^2) = +\frac{1}{2}Dx_1^2$$

$$= +\frac{1}{2}\,20\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\,(0.25\ \mathrm{m}^2 - 0\ \mathrm{m}^2) = +2.5\ \mathrm{J}$$

Beispiel 2: Ein Teilchen durchlaufe eine Kreisbahn mit der Geschwindigkeit $v = |\mathbf{v}|$. Ein dünner Faden konstanter Länge $r = |\mathbf{r}|$, der am Ort $\mathbf{M}$ (Ursprung des Koordinatensystems) sowie am Teilchen befestigt ist, übt die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ aus, welche das Teilchen auf der Kreisbahn hält. Die Arbeit ist

$$W = -\int_{x_0}^{x_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$



Da die Kraft $\mathbf{F}$ an jedem Ort auf der Kreisbahn senkrecht zur infinitesimalen Ortsänderung $\mathrm{d}\mathbf{r}$ ist, gilt offenbar für das Skalarprodukt

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$$

Die geleistete Arbeit ist also überall Null, $W = 0$.

9. Wegintegrale

- Integrale der Gestalt
$$W = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$
werden als „Wegintegrale“, “Linienintegrale“ oder auch “Kurvenintegrale“ bezeichnet.

- Die mathematisch relevanten Größen sind hier das Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ in dem eine Kurve C gegeben ist, die charakterisiert ist durch einen Startpunkt $\mathbf{r}_a$ und einen Endpunkt $\mathbf{r}_b$.

- Die Kurve ist in einer geeigneten Darstellung explizit angegeben, z.B. in einer stückweise glatten Parameterdarstellung $\mathbf{r}(t)$.

- Zur besseren Definition führen wir eine Intervalleinteilung auf der Kurve durch und bezeichnen diese mit Z.

- Die so entstandenen Raumpunkte auf der Kurve bezeichnen wir mit

$$\mathbf{r}_a \equiv \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i, \dots \mathbf{r}_n \equiv \mathbf{r}_b$$

und Zwischenwerte, die zwischen benachbarten Raumpunkte liegen, mit $\mathbf{r}_i'$. Für eine immer feinere Unterteilung ergibt sich dann das Wegintegral als Grenzwert

$$\lim_{Z\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i') \cdot \Delta\mathbf{r}_i = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

- Falls der Anfangs- und Endpunkt identisch ist, nennt man das Integral ein „geschlossenes Kurvenintegral" oder auch „Zirkulation"

$$\oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

Praktische Berechnung

- Zur Berechnung werden Kurvenintegrale auf gewöhnliche Integrale zurückgeführt.

1. Die Kurve C ist in Parameterdarstellung gegeben: $\mathbf{r}(t)$.

   $\rightarrow$ jeder Raumpunkt $\mathbf{r}_i$ und $\mathbf{r}_i'$ einer Zerlegung Z entspricht einem Parameterwert τ_i und t_a und t_b sind Anfangs- bzw. Endpunkt der Kurve.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta\mathbf{r}_i = \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \cdot \frac{\Delta\mathbf{r}_i}{\Delta t_i} \Delta t_i$$

$\rightarrow$ Bei $Z \rightarrow \infty$, also $\Delta \mathbf{t}_i \rightarrow 0$, wird der Term $\frac{\Delta\mathbf{r}_i}{\Delta \mathrm{t}_i}$ die Ableitung $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$ und der Funktionswert strebt gegen τ_i . Das Kurvenintegral berechnet sich zu:

$$\Phi = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t$$

Wert des Feldes entlang der Kurve

Information über die Kurve C

Mathematischer Einschub

Praktische Berechnung

- Zur Berechnung werden Kurvenintegrale auf gewöhnliche Integrale zurückgeführt.

  2. Zerlegung in Komponenten

$$\Delta\mathbf{r}_i = \Delta x_i \mathbf{e}_1 + \Delta y_i \mathbf{e}_2 + \Delta z_i \mathbf{e}_3 \quad \text{und } \mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_1 + A_y \mathbf{e}_2 + A_z \mathbf{e}_3$$

$$\Phi = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \lim_{Z\to\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{n} A_x(\mathbf{r}_i)\Delta x_i + \sum_{i=0}^{n} A_y(\mathbf{r}_i)\Delta y_i + \sum_{i=0}^{n} A_z(\mathbf{r}_\mathrm{i})\Delta z_i \right\}$$

Die Summanden gehen in gewöhnliche Riemannintegrale über, in denen die Kurve, z.B., mit x als einem Parameter beschrieben wird.

$$\lim_{Z\to\infty} \sum_{i=0}^{n} A_x(\mathbf{r}_i)\Delta x_i = \int_{x_a}^{x_b} A_x(x, y(x), z(x))\mathrm{d}x$$

Mathematischer Einschub

Praktische Berechnung

Analoge Überlegungen gelten dann für alle drei Terme

$$\Phi = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

$$= \int_{x_a}^{x_b} A_x(x, y(x), z(x))\mathrm{d}x + \int_{y_a}^{y_b} A_y(x(y), y, z(y))\mathrm{d}y + \int_{z_a}^{z_b} A_z(x(z), y(z), z)\mathrm{d}z$$

Rechenregel:

$$\int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_{\mathbf{r}_b}^{\mathbf{r}_a} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

Beispiel:

- Gegebenes Vektorfeld: $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (3x^2 + 2y, -9xy, 8xz^2)$
- Betrachte 3 Kurven: C_1: Gerade von $(0,0,0)$ nach $(1,1,1)$
  C_2: Polygonzug: $(0,0,0) \rightarrow (1,0,0) \rightarrow (1,1,0) \rightarrow (1,1,1)$
  C_3: Parabelbogen von $(0,0,0)$ nach $(1,1,1)$

1. Lösen entlang der ersten Kurve: $\Phi_1 = \int_{C_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$

Paramaterdarstellung (erstes Verfahren): $\mathbf{r} \equiv (t, t, t)$ und $t \in [0,1]$ $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = (1,1,1)$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} = (3t^2 + 2t) \cdot 1 + (-9t \cdot t) \cdot 1 + (8t \cdot t^2) \cdot 1 = 8t^3 - 6t^2 + 2t$$

$$\int_{C_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^1 (8t^3 - 6t^2 + 2t)\mathrm{d}t = 2t^4 - 2t^3 + t^2\Big|_0^1 = 1$$

Mathematischer Einschub

Beispiel:

- Gegebenes Vektorfeld: $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (3x^2 + 2y, -9xy, 8xz^2)$
- Betrachte 3 Kurven: C_1: Gerade von $(0,0,0)$ nach $(1,1,1)$
  C_2: Polygonzug: $(0,0,0) \to (1,0,0) \to (1,1,0) \to (1,1,1)$
  C_3: Parabelbogen von $(0,0,0)$ nach $(1,1,1)$

2. Lösen entlang der ersten Kurve: $\Phi_2 = \int_{C_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$

   Integral zerfällt in drei Summanden $C_2 = C_{2,x} + C_{2,y} + C_{2,z}$ die glücklicherweise parallel zu einer Achse verlaufen: $\to$ Zerlegung in $\mathrm{d}\mathbf{r}_i = \mathrm{d}x_i\mathbf{e}_1 + \mathrm{d}y_i\mathbf{e}_2 + \mathrm{d}z_i\mathbf{e}_3$

$\to$ auf $C_{2,x}$ ist $y = z = 0$ und $dy = dz = 0$ $\int_{C_{2,x}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^1 A_x \mathrm{d}x = \int_0^1 3x^2 \mathrm{d}x = 1$

Mathematischer Einschub

Beispiel:

- Gegebenes Vektorfeld: $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (3x^2 + 2y, -9xy, 8xz^2)$
- Betrachte 3 Kurven: C_1: Gerade von $(0{,}0{,}0)$ nach $(1{,}1{,}1)$
  C_2: Polygonzug: $(0{,}0{,}0) \to (1{,}0{,}0) \to (1{,}1{,}0) \to (1{,}1{,}1)$
  C_3: Parabelbogen von $(0{,}0{,}0)$ nach $(1{,}1{,}1)$

$\to$ auf $C_{2,y}$ ist $x = 1$, $z = 0$ und $dx = dz = 0$ $\displaystyle\int_{C_{2,y}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^1 A_y \mathrm{d}x = \int_0^1 (-9x \cdot 1)\mathrm{d}y = \frac{9}{2}$

$\to$ auf $C_{2,z}$ ist $x = y = 1$ und $dx = dy = 0$ $\displaystyle\int_{C_{2,z}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^1 A_z \mathrm{d}x = \int_0^1 8 \cdot 1 \cdot z^2 \mathrm{d}z = \frac{8}{3}$

$$\Phi_2 = \int_{C_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 1 + \frac{9}{2} + \frac{8}{3} = \frac{59}{6} = 9\frac{5}{6} \neq 1$$

Kurvenintegrale hängen i.A. von der Kurvenform zwischen Anfangs- und Endpunkt ab!

Mathematischer Einschub

Beispiel:

- Gegebenes Vektorfeld: $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (3x^2 + 2y, -9xy, 8xz^2)$
- Betrachte 3 Kurven: C_1: Gerade von $(0,0,0)$ nach $(1,1,1)$
  C_2: Polygonzug: $(0,0,0) \rightarrow (1,0,0) \rightarrow (1,1,0) \rightarrow (1,1,1)$
  C_3: Parabelbogen von $(0,0,0)$ nach $(1,1,1)$

1. Lösen entlang der dritten Kurve: $\Phi_3 = \int_{C_3} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$

Paramaterdarstellung (erstes Verfahren): $\mathbf{r} \equiv (t, t^2, t^4)$ und $t \in [0,1]$ $\quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = (1, 2t, 4t^3)$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} = (3t^2 + 2t^2, -9t \cdot t^2, 8t \cdot t^8) \cdot (1, 2t, 4t^3) = 5t^2 - 18t^4 + 32t^{12}$$

$$\int_{C_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^1 (5t^2 - 18t^4 + 32t^{12})\mathrm{d}t = \frac{103}{195}$$

Mathematischer Einschub

2.1.6.2 Konservative Kraftfelder

- Für die Definition der Arbeit haben wir die Kraft bzw. das Kraftfeld nicht näher spezifiziert. Sie gilt für alle Kräfte.
- Im Folgenden betrachten wir Kräfte bzw. Kraftfelder, die bzgl. der Arbeit eine besondere Bedingung erfüllen.

Wir nennen ein Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ **konservativ**, wenn die geleistete Arbeit W **nur von Anfangs- und Zielort abhängt**, aber nicht vom speziellen Weg, den das Teilchen durchläuft.

- Beispiel: Diskutiertes Beispiel bei der Einführung des Begriffs Arbeit (Körper auf schräger Ebene) am Anfang von Kap. 2.1.6.1.

- Für zwei unterschiedliche Wege A und B zwischen denselben Anfangs- und Zielorten P_1 und P_2 gilt dann offenbar für konservative Kraftfelder $\mathbf{F}(\mathbf{r})$

$$W_\mathrm{A} - W_\mathrm{B} = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}_\mathrm{A})\,\mathrm{d}\mathbf{r}_\mathrm{A} + \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}_\mathrm{B})\,\mathrm{d}\mathbf{r}_\mathrm{B}$$

$$= -\left(\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}_A)\,\mathrm{d}\mathbf{r}_A + \int_{P_2}^{P_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}_B)\,\mathrm{d}\mathbf{r}_B\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \oint \mathbf{F}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r} = 0}$$

Die geleistete Arbeit nach Rückkehr zum Anfangsort ist für konservative Felder immer Null, unabhängig vom durchlaufenen Weg.

- Gegenbeispiel: Reibungskräfte

Ein Auto fährt mit konstanter (Betrags-) Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit Radius R. Die Reibung der Räder auf der Fahrbahn verursache die Reibungskraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r},\mathbf{v}) = -\eta \cdot \mathbf{v}$$

Die Kraft ist der aktuellen Fahrtrichtung immer entgegengesetzt. Da $\mathbf{dr} \,||\, \mathbf{v}$ wegen $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}t$ erhalten wir für die Arbeit beim einmaligen Durchfahren des Kreises

$$W = -\oint \mathbf{F}(\mathbf{r},\mathbf{v})\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \eta \cdot \oint v\,\mathrm{d}r$$

$$= \eta \cdot v \cdot 2\pi R > 0$$

- Ein weiteres Gegenbeispiel für nicht-konservative Kräfte sind zeitabhängige Kräfte.

> Zeitabhängige oder geschwindigkeitsabhängige Kraftfelder sind im Allgemeinen nicht konservativ.

- Gibt es eine „einfache" Methode, um festzustellen, ob ein Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ konservativ ist, ohne Wegintegrale lösen zu müssen?

  Ja , die gibt es! Das wird in Kürze im Rahmen der Vektoralgebra besprochen. Die Forderung für konservative Kraftfelder lautet mit der Rotation eines Vektorfeldes:

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0}$$

(Zur Definition dieser Operation, warten Sie noch ein paar Folien. Die Forderung ist äquivalent zur Forderung, dass das geschl. Linienintegral =0 ist)

2.1.6.3 Potential

- Auf der Basis konservativer Kraftfelder $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ wird eine neue Größe eingeführt, das Potential eines Kraftfeldes. Dieses wird für den Raumpunkt P definiert als

$$\boxed{V(P) = -\int_{P_0}^{P} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}}$$

- Da $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ konservativ ist, kann das Potential über einen beliebigen Weg, der möglichst rechnerisch günstig ist, bestimmt werden.
- Typischerweise setzt man das Potential für einen ausgewählten Bezugspunkt P_0 zu Null, also $V(P_0) = 0$. Das ist häufig ein unendlich weit entfernter Punkt, von dem man annimmt, dass dort alle Kraftfelder zu Null werden.

- Nun kann auch umgekehrt das Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ aus einem bekannten Potential $V(\mathbf{r})$ berechnet werden. Für ein eindimensionales Problem mit der Koordinate x ist das offensichtlich die Ableitung

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} V(x)$$

Beispiel: Das Potential einer Feder ist (vgl. früheres Beispiel)

$$V(x) = +\frac{1}{2} D\, x^2 \qquad \Rightarrow \qquad F(x) = -\frac{1}{2} \mathrm{D} \cdot 2x = -D \cdot x$$

- Die dreidimensionale Entsprechung der Ableitung nach einer Variablen ist der Gradient einer skalaren Funktion

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathrm{grad}\, V(\mathbf{r})}$$

Im Folgenden werden einige Operatoren der Vektoralgebra für dreidimensionale Vektorräume eingeführt, u.a. die Rotation und der Gradient.

10. Vektordifferentialrechnung: Gradient, Divergenz, Rotation, Laplace

- Auf den letzten Folien haben wir bereits ausgewählte Differentialoperatoren gesehen, die wir im folgenden im Detail besprechen wollen.

- Einfach ausgedrückt sind Differentialoperatoren Funktion, die auf andere Funktion wirken und die Ableitung nach einer oder mehreren Variablen enthalten.

- Differentialoperatoren in 3D, aber natürlich definierbar in allen Dimensionen.

- Differentialoperatoren wirken auf: skalare Funktionen: $u = u(\mathbf{r}) \; : \; r \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

  vektorielle Funktionen: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x(\mathbf{r}) \\ v_y(\mathbf{r}) \\ v_z(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \; : \; r \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Mathematischer Einschub

Nabla-Operator

- Die vektoriellen Komponenten entsprechen den partiellen räumlichen Ableitungen.

- Diskutieren hier kartesische Koordinaten. Später behandeln wir noch andere Koordinatensysteme und definieren den Nabla-Operator dann in diesen.

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

- Nabla-Operator angewandt auf skalare Funktion ergibt einen Vektor (Gradient).

- Nabla-Operator angewandt auf vektorielle Funktion ergibt Skalar oder Vektor (Divergenz bzw. Rotation).

Gradient

- Produkt des Nabla-Operator mit einer skalaren Funktion:

$$\boldsymbol{\nabla} u(x,y,z) = \operatorname{grad} u(x,y,z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \mathbf{F}(x,y,z)$$

- Der Gradient ist ein Vektor. Er zeigt in die Richtung der maximalen Änderung der skalaren Größe. Der Betrag gibt die Stärke der Änderung an.

- Komponentenschreibweise: $\left(u(x_j)\right)_{,i} = F_i$ $\quad i,j$: Platzhalter für x, y, z

- „Die i^te^ Komponente des Vektors $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ist die i^te^ Ableitung der skalaren Größe $u(r)$“

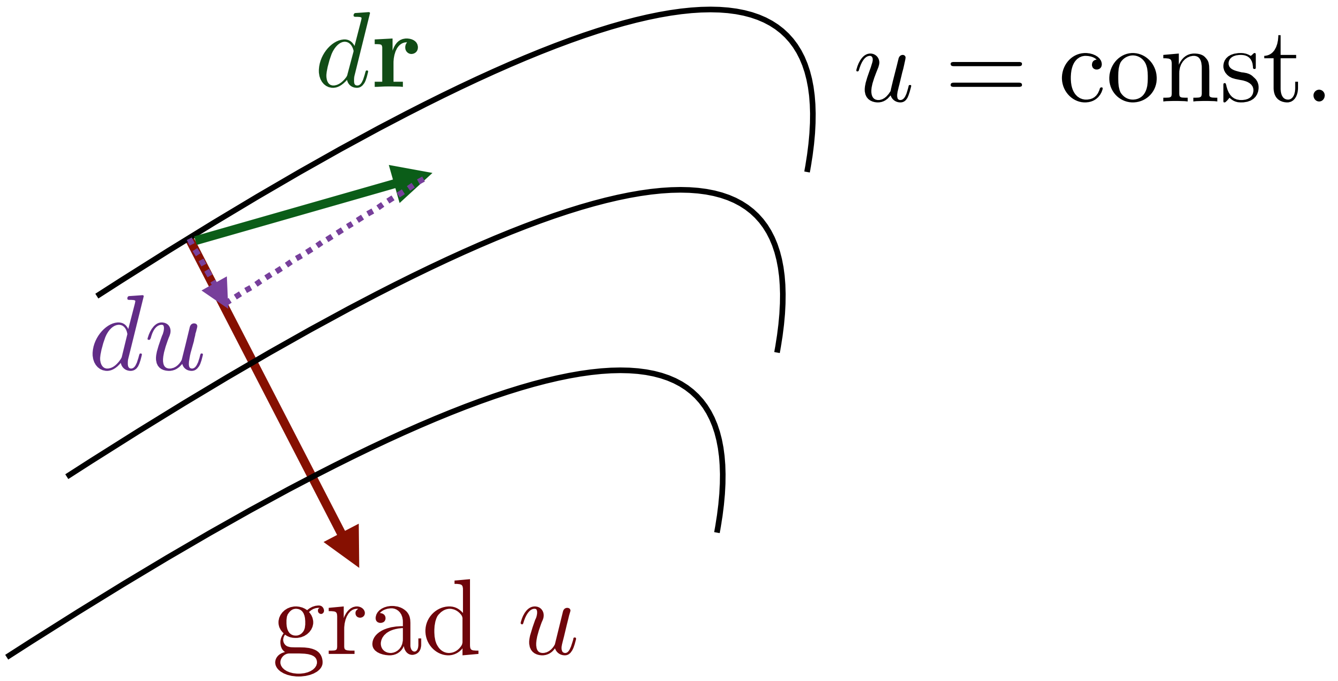
Mathematischer Einschub

- Änderung des skalaren Feldes $\mathrm{d}u$ in einer bestimmten Richtung, gegeben durch den infinitesimal kleinen Vektor mit einer bestimmten Richtung $\mathrm{d}\mathbf{r}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= u(\mathbf{r}+\mathrm{d}\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}) \\ &= \boldsymbol{\nabla} u \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \\ &= \operatorname{grad} u \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}u = u_{,i}\mathrm{d}x_i$$

Einsteinsche Summenkonvention beachten!



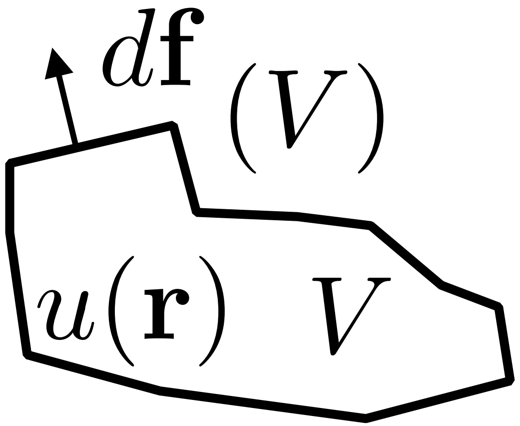
Mathematischer Einschub

- Gradient als Grenzwert eines Integrals:

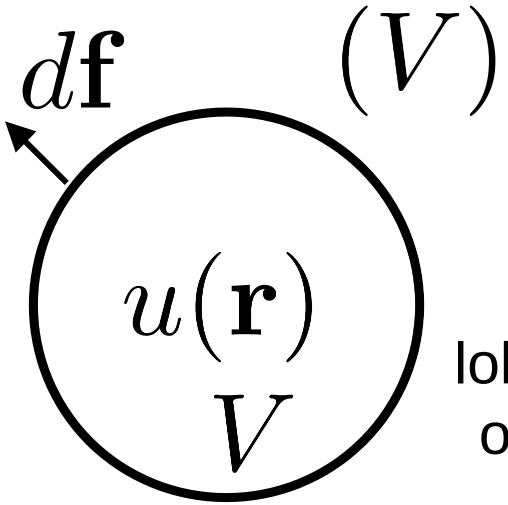
$$\operatorname{grad} u(\mathbf{r}) = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_{(V)} u(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{f}$$

Oberflächenintegral des durch V definierten Volumens

Normalenvektor der Oberfläche



$\operatorname{grad} u \neq 0$



lokales Minimum oder Maximum

$\operatorname{grad} u = 0$

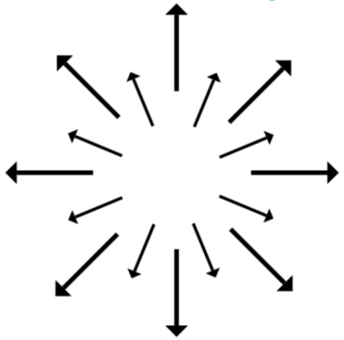
Divergenz

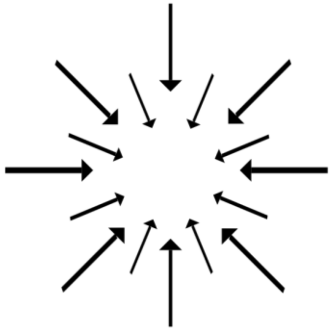
- Skalarprodukt des Nabla-Operator mit einem Vektorfeld:

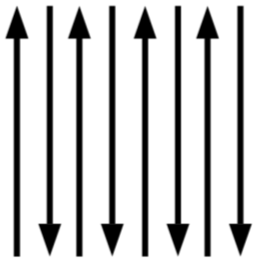
$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}(x, y, z) = \operatorname{div} \mathbf{v}(x, y, z) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = f(x, y, z)$$

- Die Divergenz ist ein Skalar. Sie beschreibt den Fluss der durch $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ beschriebenen Größe durch eine bestimmte Fläche. Sie wird auch als Quelldichte bezeichnet.

- Positiver Wert: Quelle, Negativer Wert: Senke, Verschwindende Divergenz: Quellfrei





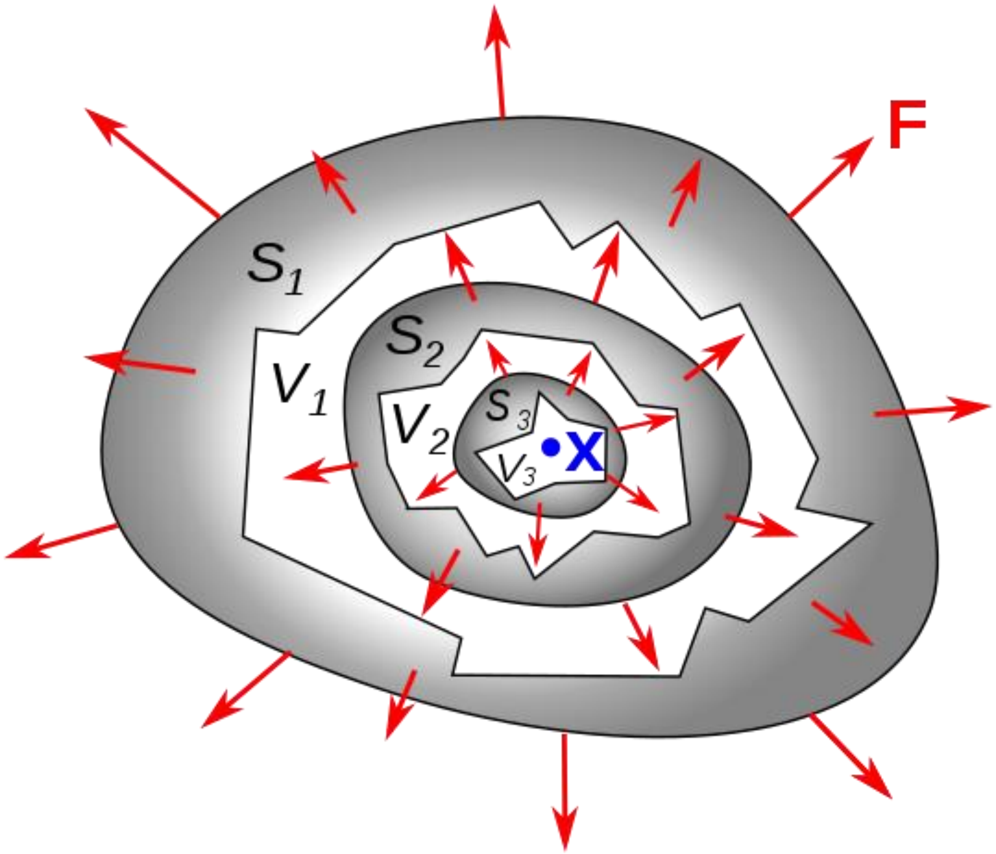


Mathematischer Einschub

- Komponentenschreibweise: $v_i(x_j)_{,i} = f$

- Divergenz als Grenzwert eines Integrals:

$$\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_{(V)} \mathbf{v}(\mathbf{r})\cdot \mathrm{d}\mathbf{f}$$



Mathematischer Einschub

Bildquelle: Wikipedia

Rotation

- Kreuzprodukt des Nabla-Operator mit einem Vektorfeld:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}(x,y,z) = \mathrm{rot}\,\mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{curl}\,\mathbf{v}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \mathbf{F}(x,y,z)$$

Mathematischer Einschub

- Die Rotation einer Vektorfunktion ist eine Vektorfunktion. Der Betrag entspricht der maximalen Rotation an diesem Punkt. Dessen Richtung steht senkrecht auf der Ebene der Rotation. Die Rotation ist ein Maß für die „Verwirbelung“ einer Vektorfunktion.

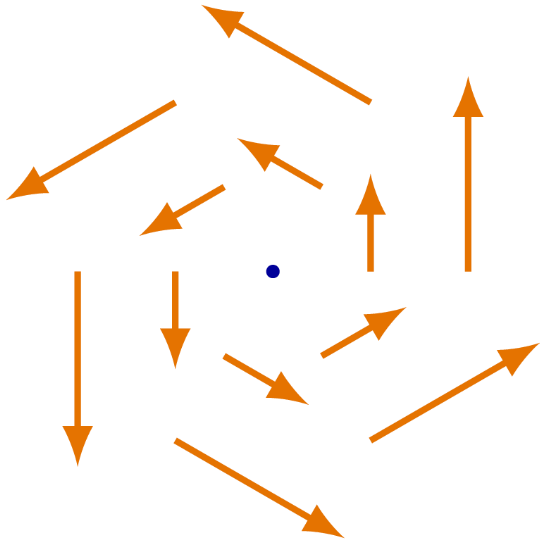
Beachte: Rechte-Hand-Regel

- Rotation als Grenzwert eines Integrals:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{e} = \lim_{F\to 0}\frac{1}{F}\int_{(F)}\mathbf{v}(\mathbf{r})\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

Linienintegral über die Umrandung der Fläche F

Tangentialvektor der Umrandung



Mathematischer Einschub

Erinnerung: Verschwindendes geschlossenes Kurveintegral über konservatives Kraftfeld $\rightarrow$ Rotation verschwindet, siehe später auch Stokescher Satz

Bildquelle: https://tikz.net/curl/

- Rotation mit Hilfe des Levi-Cevita-Pseudotensor ϵ_{ijk}: $\epsilon_{ijk}\dfrac{\partial}{\partial x_j}v_k = \epsilon_{ijk}v_{k,j} = F_i$

- Allgemein gilt für das Kreuzprodukt: $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_i = \epsilon_{ijk}A_j B_k$

- Definition Levi-Cevita-Pseudotensor: $\epsilon_{123} = 1$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{2 identische Indizes} \\ 1 & \text{wenn } i,j,k \text{ eine gerade Permutation von 1,2,3 sind} \\ -1 & \text{wenn } i,j,k \text{ eine ungerade Permutation von 1,2,3 sind} \end{cases}$$

- Der Levi-Cevita-Pseudotensor ist antisymmetrisch für jedes Indexpaar.

- Besteht aus 27 Komponenten: von denen 21 null sind und je 3 Komponenten sind ± 1

- Vereinfachung von doppelten Kreuzprodukten:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \det \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

- Insbesondere Vereinfachung von Kreuzprodukten mit einem identischen Index:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{kl}\delta_{jm}$$

Rechenregeln

- BAC-CAB-Regel: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$
- Zyklische Vertauschung des Spatproduktes: $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$
- Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet: $\mathbf{c} = \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, u = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} u) = 0$

Beweis: $c_i = \epsilon_{ijk} u_{,k,j} = \epsilon_{ijk} u_{,j,k} = -\epsilon_{ikj} u_{,j,k} = -\epsilon_{ijk} u_{,k,j} = 0$

Erinnerung: Ein konservatives Kraftfeld, dessen Rotation verschwindet, kann immer geschrieben werden als der Gradient eines skalaren Feldes, unser skalares Potential

Mathematischer Einschub

- Divergenz eines Wirbelfeldes verschwindet: $\mathrm{c} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = 0$

Beweis: $c = \epsilon_{ijk} A_{k,j,i} = \epsilon_{ijk} A_{k,i,j} = -\epsilon_{jik} A_{k,i,j} = -\epsilon_{ijk} A_{k,j,i} = 0$

- Vergleichbare Operation für eine skalare Größe:

$$c = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} u) = \left(u_{,i}\right)_{,i} = u_{,i,i} = \Delta u$$

Wichtiger Operator: Laplace-Operator $\boxed{\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)}$

- Laplace-Operator besteht aus der Summe der zweiten Ableitungen

Mathematischer Einschub

- Laplace-Operator angewandt auf Vektorfeld: $\Delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}$

- Letzte Regel: doppeltes Kreuzprodukt

$$\mathbf{c} = \mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = \mathrm{grad\,div}\,\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}$$

Beweis: $\mathbf{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})_k = \mathbf{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{kmn} \partial_m A_n = \mathbf{e}_i \left(\delta_{jn}\delta_{im} - \delta_{in}\delta_{jm}\right) \partial_j \partial_m F_n$

$$= \mathbf{e}_m \partial_n \partial_m F_n - \mathbf{e}_n \partial_m \partial_m F_n = \mathbf{e}_m \partial_m \partial_n F_n - \partial_m \partial_m \mathbf{e}_n F_n = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}$$

Mathematischer Einschub

Integralsätze:

- Linienintegral des Gradienten: $$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \operatorname{grad} u \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathrm{d}u = u(\mathbf{r}_2) - u(\mathbf{r}_1)$$

Erinnerung: Definition des Potentials für konservatives Kraftfeld

- Gaußsche Satz: $$\oint_{(V)} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \mathrm{d}V$$

- Stokescher Satz: $$\oint_{(F)} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_F \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{f}$$

Erinnerung: Verschwindendes geschlossenes Kurvenintegral
für konservatives Kraftfeld impliziert, dass es wirbelfrei ist.

Zusammenfassung

Die folgenden Aussagen sind für konservative Kraftfelder $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ äquivalent:

- Die verrichtete Arbeit W, also das Wegintegral
$$W = -\int_{\mathbf{r}_\mathrm{A}}^{\mathbf{r}_\mathrm{E}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$
zu einem gegebenen Anfangspunkt $\mathbf{r}_\mathrm{A}$ und einem gegebenen Endpunkt $\mathbf{r}_\mathrm{E}$, hängt nicht vom Weg selbst ab.
- Für einen geschlossenen Weg (also $\mathbf{r}_\mathrm{A} = \mathbf{r}_\mathrm{E}$) ist die Arbeit gleich Null.
- Das Kraftfeld kann dargestellt werden mit einem skalaren Potential $V(r)$ wie $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathrm{grad}\, V(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r})$.
- Die Rotation des Kraftfeldes ist gleich Null, also $\mathrm{rot}\, \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$.

Unbedingt Merken

2.1.6.4 Kinetische und Potentielle Energie

- Bisher haben wir hauptsächlich über die Bewegung von Körpern und Kräften auf Körper im dreidimensionalen Ortsraum auf Basis der Newtonschen Gleichungen gesprochen. Eine weitere wichtige Größe, weit über die Mechanik hinaus, ist die Energie, da sie eine sogenannte Erhaltungsgröße ist.
- Wir unterscheiden in der Mechanik zwischen der kinetischen Energie und der potentiellen Energie eines Körpers.
- Die potentielle Energie eines Körpers wird identifiziert mit dem Potential des Körpers im gegebenen Kraftfeld.

$$\boxed{E_{\mathrm{pot}} = V(\mathbf{r})}$$

- Beispiel: Energie eines Körpers der Masse m im Schwerefeld der Erde. Die Höhe über den Erdboden sei durch die Koordinate z gegeben. Mit $F_\mathrm{G} = -m\,g$ ist dann

$$V(z) = -\int_0^z F_\mathrm{G}(z)\,\mathrm{d}z = mg \cdot z \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_\mathrm{pot} = mg \cdot z}$$

- Lässt man z.B. einen Körper in Ruhe aus der Höhe z fallen, wird seine potentielle Energie kleiner, jedoch steigt seine Geschwindigkeit v an. Wie hängt v mit der potentiellen Energie zusammen?

  Mit dem 2. Newtonschen Gesetz $m\,a = F_\mathrm{G}$ muss für das folgende Wegintegral gelten

$$\int_{z_0}^{z_1} (m\,a - F_\mathrm{G})\,\mathrm{d}z = \int_{z_0}^{z_1} m\,a\,\mathrm{d}z + \big(V(z_1) - V(z_0)\big) = 0$$

Für das Wegintegral über $F = ma$ erhalten wir

$$\int_{z_0}^{z_1} m\, a\, \mathrm{d}z = m \int_{t(z_0)}^{t(z_1)} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\, v\, \mathrm{d}t = m \int_{v(z_0)}^{v(z_1)} v\, \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\, m\, v_1^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_0^2$$

Diese Größe wird als kinetische Energie des Teilchens definiert,

$$\boxed{E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}\, m\, v^2}$$

Insgesamt folgt dann die Energieerhaltung für konservative Kräfte (hier in einer Dimension)

$$\frac{1}{2} m\, v_1^2 - \frac{1}{2} m\, v_0^2 + V(z_1) - V(z_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{\mathrm{kin}}(\mathrm{z}_1) + E_{\mathrm{pot}}(z_1) = E_{\mathrm{kin}}(\mathrm{z}_0) + E_{\mathrm{pot}}(z_0)}$$

Für unser Beispiel eines fallenden Körpers im Schwerefeld folgt dann mit $z_0 = 0$ und $v(z_1) = 0$ für die Geschwindigkeit am Erdboden $v(0)$

$$\underbrace{E_{\mathrm{kin}}(z_1)}_{=0} + E_{\mathrm{pot}}(z_1) = E_{\mathrm{kin}}(0) + \underbrace{E_{\mathrm{pot}}(0)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \qquad mg \cdot z_1 = \frac{1}{2}\, m\, v^2(0)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{v(0) = \sqrt{2g \cdot z_1}}$$

Wir erhalten aus der Energiebilanz dieselbe Formel für die Endgeschwindigkeit wie nach Lösen der Differentialgleichung des Problems (vgl. Kap. 2.1.5).

2.1.6.5 Leistung

- Eine letzte wichtige Kenngröße ist die Leistung P. Die Leistung ist ein Maß für die Arbeit pro Zeit. Im folgenden Ausdruck haben wir die Arbeit parametrisiert mit der Zeit:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t'), \dot{\mathbf{r}}(t'), t') \cdot \dot{\mathbf{r}}(t')\mathrm{d}t'$$

- Daraus ergibt sich für Leistung $\boxed{P(t) = -\mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t\,) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)}$

- Die Einheit der Leistung ist $[P] = \mathrm{J/s} = \ \mathrm{W}$ (Watt; nach James Watt, 1737-1819)

- P hängt für alle Typen von Kraftfeldern vom zeitlichen Ablauf der Bewegung ab.

> Beachten Sie bitte, das physikalische Symbol P wird später auch noch einmal verwendet für die Größe des Drucks. Üblicherweise gibt das keine Verwirrung, aber bitte achten Sie auf den Kontext, in dem dieses Symbol verwendet wird.

Beispiel:

- Welche Leistung ist erforderlich, um eine Masse von $2.5 \cdot 10^3\ \mathrm{kg}$ (Wohnwagenanhänger) mit einer Geschwindigkeit von $80\ \mathrm{km/h}$ eine schiefe Ebene mit einer Steigung von 10% heraufzuziehen?

$$P = -\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

Hangabtriebskraft: $F_a = -m \cdot g \cdot \sin\alpha = 2.5 \cdot 10^3 \cdot 9.81 \cdot \sin \operatorname{atan} 0.1\ \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}$

$$= -2.44 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$P = 2.44 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{80}{3.6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 54.23 \cdot 10^3\ \mathrm{W} = 73.7\ \mathrm{PS}$$