2.1.7. Impulserhaltung und Energieerhaltung

- Grundaufgabe der Mechanik: Berechnung der Bahnkurve eines im Raum frei beweglichen Teilchens bei gegebener Kraft.

- Kraft ist allgemein eine Funktion des Ortes, der Geschwindigkeit und der Zeit.

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$$

- In kartesischen Koordinaten ausgedrückt formuliere wir dies als

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= F_x\,(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y}(t) &= F_y\,(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z}(t) &= F_z\,(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{aligned}$$

- Unter Berücksichtigung von sechs Integrationskonstanten, beschreiben diese Gleichungen die Gesamtheit aller durch das Kraftgesetz ermöglichten Bewegungen

- Für eine konkrete Lösung müssen wir dieser sechs Integrationskonstanten aus Anfangswerten bestimmen.

- Anfangswerte sind meist der Ort und die Geschwindigkeit zu einem Referenzzeitpunkt t_0

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) \text{ und } \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$$

- Anfangswerte + Kraftgesetz: mechanische Bewegung ist komplett determiniert.

- Dies ist tendenziell ein rein mathematisches Problem im Rahmen der Physik.

- Vorgehen: (1) Details der Kraft klären, (2) Bewegungsgleichungen integrieren, (3) Integrationskonstanten bestimmen, (4) Bahnkurve physikalisch diskutieren.

- Dieses allgemeine Vorgehen ist jedoch oft kompliziert, anspruchsvoll und uninspirierend.
- Unter Ausnutzung von Bilanzgleichungen oder Erhaltungssätzen können die Lösungen einer oder mehrere Integrale der Bewegungsgleichungen bei bestimmten Arten von Kräften unmittelbar angegeben werden.
- Die zugehörenden Erhaltungsgröße ist invariant. Diese Vereinfachung gilt es zu nutzen!
- Darüber hinaus sind diese Erhaltungssätze fundamental wichtig.
- Bilanzgleichungen oder Erhaltungssätze bezeichnen wir als erste Integrale der Bewegungsgleichungen. Sie haben die Form

$$f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0$$

2.1.7.2 Impulserhaltung bzw. Impulsbilanz

- Ergibt sich aus dem zweiten Newtonschen Axiom:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad \text{mit } \mathbf{p}(t) = m(t)\dot{\mathbf{r}}(t)$$

- Zeitliche Änderung des Impulses eines Teilchens = einwirkenden Gesamtkraft.
- Für den speziellen Fall, dass keine Kraft wirkt, also $\mathbf{F} = 0$, folgt Impulserhaltung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p}(t) = 0 \text{ und } \mathbf{p}(t) = \text{constant}$$

- Dies ist ein erstes Integral der Bewegungsgleichung.

- Falls $\boxed{\mathbf{F} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Impulserhaltung}}$

$$\boxed{\mathbf{p}(t) = \text{constant}}$$

- Ein kräftefreies Teilchen bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer Geraden im Raum oder ist komplett in Ruhe.

Unbedingt Merken

Impulserhaltung bzw. Impulsbilanz für Systeme aus Massepunkte

- Erinnerung: $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{\mathrm{ex}} + \sum_j \mathbf{F}_{ij}$ $\xrightarrow{\text{Summation}}$ $\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{\mathrm{ex}} + \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij}$

$\xrightarrow{\text{actio=reactio}}$ $\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{\mathrm{ex}} = \mathbf{F}^{\mathrm{ex}} \longleftarrow$ gesamte externe Kraft

- Gesamtimpuls: $\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i$

- Impulssatz: $$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}^{\mathrm{ex}}}$$

- Keine äußere Kraft: $\mathbf{F}^{\mathrm{ex}} = 0 \rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = 0 \rightarrow \mathbf{p} = \mathrm{constant}$ Gesamtimpuls erhalten

- Systeme in denen der Gesamtimpuls erhalten ist, nennt man abgeschlossene Systeme.
- Da aber lediglich die Summe der Einzelimpulse erhalten bleibt, führt das zu einem gekoppelten Satz an nichttrivialen Bewegungsintegralen für die einzelnen Massepunkte.
- Erinnerung: Bewegungsgleichung für Schwerpunkt $M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{\mathrm{ex}}$
- Der Schwerpunkt bewegt sich im resultierenden Gesamtkraftfeld.

2.1.7.3 Energieerhaltung bzw. Energiebilanz

- Zur Herleitung einer Bilanzgleichung betrachten wir die allgemeine, vektorielle Bewegungsgleichung und multiplizieren diese mit $\dot{\mathbf{r}}$

$$m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}\right) = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

- Der Term in der Klammer entspricht der kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{m}{2}v^2$$

- Der Term auf der rechten Seite der Gleichung entspricht gerade der negativen Leistung.

- Die zeitliche Änderung der kinetischen Energie ist gleich der entnommenen Leistung der einwirkenden Gesamtkraft am Teilchen:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -P}$$

- Für eine verschwindende Leistung muss die kinetische Energie konstant sein:

$$P = 0 \quad \rightarrow \quad T = \text{constant}$$

- Weiteres erstes Bewegungsintegral! Drückt die Erhaltung der kinetischen Energie aus.

- Wenn die Gesamtkraft eine negative Leistung abgibt ($P < \ 0$), muss $dT \ > \ 0$ sein. Wir beobachten einen Zuwachs an kinetischer Energie.

- Integration der differentiellen Gleichung:

$$\int_1^2 \mathrm{d}T = -\int_1^2 P\mathrm{d}t = -\int_1^2 \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \;\rightarrow\; T_1 - T_2 = W$$

- Die an dem Massenpunkt längs seines Weges geleistete Arbeit dient dazu, seinen Bewegungszustand zu ändern.

- Das Kraftfeld kann unterschiedliche Eigenschaften besitzen. Allgemein unterscheiden wir zwischen konservativen und nicht-konservativen Kraftfeldern.

- Für eine konservative Kraft können wir eine skalare Funktion $V(\mathbf{r})$ finden, für die gilt

$$\frac{\mathrm{d}V(\mathbf{r})}{\mathrm{d}t} = -\mathbf{F}_{\text{kons}}(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

- Beliebige Kräfte bestehen aus konservativen und dissipativen Anteil $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{kons}} + \mathbf{F}_{\text{diss}}$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathrm{d}V(\mathbf{r})}{\mathrm{d}t} + \mathbf{F}_{\text{diss}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[T + V(\mathbf{r})] = \mathbf{F}_{\text{diss}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

Energiebilanz: Zeitliche Änderung der mech. Energie entspricht der Leistung der dissipativen Kräfte.

- Die Energie E ist eine Erhaltungsgröße, wenn dissipativen Kräfte verschwinden.

$$E = T + V(\mathbf{r}) = \text{const.}$$
$$\frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}) = E = \text{const.}$$

- Die Größe E bezeichnet die Gesamtenergie des Teilchens. Diese besteht aus potentieller und kinetischer Energie.

Unbedingt Merken

Beispiel: Freier und gerader Fall aus hoher Höhe

- Wie betrachten einen Körper der Masse m im Schwerefeld der Erde.
- Die Höhe vom Erdboden ist nicht mehr vernachlässigbar und wir müssen berücksichtigen, dass die Gravitationskraft abhängig von der Höhe ist.
- Befindet sich das Teilchen im Abstand r vom Erdmittelpunkt, so beträgt die Schwerkraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G\frac{mM_{\text{Erde}}}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

- Wir betrachten eine Kraft in Erdnähe, die nicht von der x- und z- Koordinate abhängt. Das homogene Kraftfeld ist eine Funktion der y-Koordinate und zeigt in die y-Richtung.

- Diese Gravitationskraft ist ein homogenes Kraftfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G\frac{mM_{\text{Erde}}}{y^2}\mathbf{e}_y = -mg\frac{R_{\text{Erde}}^2}{y^2}\mathbf{e}_y \qquad g = \frac{GM_{\text{Erde}}}{R_{\text{Erde}}^2} = 9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- mit dem dazu gehörenden Potential

$$V(y) = -mg\frac{R_{\text{Erde}}^2}{y}$$

- Der negative Gradient dieses Potentials entspricht gerade der Kraft.
- Die Kraft hängt nicht von der Zeit oder der Geschwindigkeit des Teilchens ab.

- Für eine solche konservative Kraft gilt Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mg\,\frac{R_{\mathrm{Erde}}^2}{y} = E$$

- Die Anfangsbedingungen fixieren die Gesamtenergie: $y(t_0) = y_0 = h$ und $\dot{y}(t_0) = 0$

$$\frac{1}{2}\dot{y}^2 - g\,\frac{R_{\mathrm{Erde}}^2}{y} = -g\,\frac{R_{\mathrm{Erde}}^2}{h}$$

- Allgemein Lösung: $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2gR_{\mathrm{Erde}}}}\int\frac{\mathrm{d}y\prime}{\sqrt{y\prime^{-1} - h^{-1}}} + \mathrm{const.}$

- Ohne diese Gleichung weiter zu lösen, können wir einige physikalische Fragen diskutieren.

- 1. Einschlaggeschwindigkeit $v_{\text{Einschlag}}$ eines Körpers aus dem Unendlichen?

Anfangsbedingungen: $y = R_{\text{Erde}}$ und $h = \infty$

$$\frac{1}{2}\dot{y}^2 - g\frac{R_{\text{Erde}}^2}{R_{\text{Erde}}} = 0 \;\rightarrow\; \dot{y}^2 = v_{\text{Einschlag}}^2 = 2gR_{\text{Erde}} \;\rightarrow v_{\text{Einschlag}} = \sqrt{2gR_{\text{Erde}}}$$

$$v_{\text{Einschlag}} \approx 11.2\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

- 2. Bei welcher Anfangsgeschwindigkeit verlässt ein Teilchen das Kraftfeld der Erde?

  Anfangsbedingungen: $y_0 = y_a = h = R_{\text{Erde}}$

  Gesucht: $\dot{y} = v_a$

- Das Teilchen verlässt die Erde, wenn es sich unendlich weit entfernen kann.

  Ende: $y_e = \infty$ und $v_e = 0 \quad \rightarrow \quad 0 - 0 = E_e$

- Unter Ausnutzung der Energieerhaltung $E_a = E_e$

$$v_{\text{a}}^2 = 2gR_{\text{Erde}} \quad \rightarrow v_{\text{a}} = \sqrt{2gR_{\text{Erde}}} = v_{\text{Einschlag}}$$

Die 2. kosmische Geschwindigkeit (Fluchtgeschwindigkeit) ist identisch zur Einschlaggeschwindigkeit

- 3. Unter der Annahme, dass die Anfangsgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit ist, wie groß darf der Radius sein, damit, dass Teilchen das Schwerefeld verlassen kann

Annahme: $\dot{y} = v_a = c_0$

Gesucht: $y_0 = y_a = h = R_S$

$$c_0^2 = 2gR_s \quad \rightarrow \quad R_s = \frac{2GM}{c_0^2}$$

- Diesen Radius bezeichnet man als den Schwarzschildradius. Er spielt in der relativistischen Astrophysik als der ”Radius eines schwarzen Lochs“ eine wichtige Rolle.

- Für eine nichtkonservative Kraft, z.B. eine explizit zeitabhängige Kraft $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ gilt keine Energieerhaltung. Auch wenn für eine solche Kraft die Rotation verschwinden mag

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = 0$$

- und ein explizit zeitabhängiges Potential existiert (diese Kraft eine Potentialkraft ist)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -\mathrm{grad}\, V(\mathbf{r}, t)$$

- Beweis:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\mathrm{grad}\, V(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} \underbrace{- \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t}}_{\text{Einfügen einer virtuelle } 0} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V)=\frac{\partial V}{\partial t}$$

- Die zeitliche Änderung der Gesamtenergie wird bestimmt durch die partielle Zeitableitung des Potentials. Dem Teilchen wird Energie zugeführt bzw. entzogen.

- Dissipative Kräfte sind charakterisiert durch $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)\neq 0, \mathbf{F}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})\neq 0$ oder $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}(\mathbf{r})\neq 0$

- Allgemein gilt immer $\mathbf{F}=\mathbf{F}_{\mathrm{kons}}(\mathbf{r})+\mathbf{F}_{\mathrm{diss}}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t)$

$$\mathbf{F}_{\mathrm{kons}}(\mathbf{r})=-\mathrm{grad}\,V(\mathbf{r})\quad \text{und}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[T+V(\mathbf{r})]=\mathbf{F}_{\mathrm{diss}}\cdot\dot{\mathbf{r}}=-P_{\mathrm{diss}}$$

Bei der Dissipation wird mechanische Energie in andere Energieformen umgewandelt.

Beispiel: Freier und gerader Fall aus geringer Höhe mit Reibung

- Betrachten den Fall im lokalen Koordinatensystem und vernachlässigen Erdkrümmung.

- Der Normalenvektor der Erdoberfläche zeigt in y-Richtung. Eine positionsunabhängige Kraft wirkt nur in die negative y-Richtung und das lokale System ist ein Inertialsystem.

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_y \;\rightarrow\; m\ddot{y} = -mg \;\rightarrow \ddot{y} + g = 0$$

- Die Rotation dieses Kraftfeldes verschwindet $\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 \;\rightarrow\; \mathrm{rot}\,\mathbf{F} = 0$

- Das Potential berechnet sich zu: $V(y) = -\int_0^y F_y \mathrm{d}y' = \int_0^y mg\mathrm{d}y' = mgy$

- Die potentielle Energie ist proportional zur Höhe. Es ist gilt Energieerhaltung:

$$\frac{m}{2}\dot{y}^2 + mgy = E = \text{consant}$$

- Unter Annahme einer Stokeschen Reibung, wirkt zusätzlich eine geschwindigkeitsabhängige Kraft auf das Teilchen:

$$\mathbf{F}_{\text{diss}} = -\gamma\dot{y}\mathbf{e}_y \quad \rightarrow \ddot{y} + r\dot{y} + g = 0 \quad \text{mit} \;\; r = \frac{\gamma}{m}$$

- Der Energieverlust des Teilchens ist dann gerade

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[T + V(\mathbf{r})] = \mathbf{F}_{\text{diss}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\gamma\dot{y}^2$$

Energieerhaltung bzw. Energiebilanz für Systeme aus Teilchen

- Im Folgenden wiederholen wir die Herleitung der Energiebilanz unter der Annahme, dass das System aus vielen Teilchen besteht, die mit i indiziert werden.

Bewegungsgleichung für i'tes Teilchen:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{\mathrm{ex}} + \textstyle\sum_j \mathbf{F}_{ij} \quad | \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$$

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T_i = \underbrace{\mathbf{F}_i^{\mathrm{ex}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i}_{\text{Leistung der äußeren Kraft am } i\text{'ten Teilchen'}} + \underbrace{\sum_j \mathbf{F}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i}_{\text{Leistung aller inneren Kraft am } i\text{'ten Teilchen'}}$$

- Bei Summation über alle Teilchen erhalten wir die zeitliche Änderung der gesamten kinetischen Energie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T = \sum_{i}\frac{\mathrm{d}T_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\mathrm{ex}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \sum_j \mathbf{F}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = -P^{\mathrm{ex}} - P^{\mathrm{in}} = -P$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -P}$$

- Die zeitliche Änderung der kinetischen Energie ist gleich der entnommenen Leistung der einwirkenden Gesamtkraft am Teilchen. Im Besonderen der Leitung aller Kräfte.

Speziell: Äußere Kräfte

- Äußere Kräfte können konservativ als auch dissipativ sein: $\mathbf{F}^{\text{ex}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{kons.}} + \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{diss.}}$
- Der konservative Kraftanteil ist rotationsfrei: $\text{rot}_i\, \mathbf{F}_i^{\text{kons.}} = 0$
- Schreiben Kraft als negativen Gradienten des Potentials: $\text{grad}_i\, V^{\text{ex}}(\mathbf{r}_i) = \begin{pmatrix} \partial V^{\text{ex}}(\mathbf{r}_i) / \partial x_i \\ \partial V^{\text{ex}}(\mathbf{r}_i) / \partial y_i \\ \partial V^{\text{ex}}(\mathbf{r}_i) / \partial z_i \end{pmatrix}$
- Externe Potential ist Funktion aller Teilchenkoordinaten $V^{\text{ex}} = V^{\text{ex}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_i) \equiv V^{\text{ex}}(\mathbf{r}_i)$

$$\rightarrow \quad \mathbf{F}^{\text{ex}} = -\sum_i \text{grad}_i\, V^{\text{ex}}(\mathbf{r}_i) + \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{diss.}}$$

- Leistung der äußeren Kräfte:

$$P^{\text{ex}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ex}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = -\sum_i \text{grad}_i\, V^{\text{ex}}(\mathbf{r}_i) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + P^{\text{diss}}$$

- Gleiche Manipulation der Gleichung wie bei einem einzelnen Teilchen und wir erhalten:

$$\boxed{P^{\text{ex}} = -\sum_i \frac{\mathrm{d}V^{\text{ex}}(\mathbf{r}_i)}{\mathrm{d}t} + P^{\text{diss}} = -\frac{\mathrm{d}V^{\text{ex}}}{\mathrm{d}t} + P^{\text{diss}}}$$

Speziell: Innere Kräfte

- Annahme: innere Kräfte sind nicht explizit zeitabhängige Zentralkräfte und hängen nur vom Abstand der Teichen ab:

$$\mathbf{F}_{ij} = f_{ij}(\mathbf{r}_{ij})\frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|} \qquad \text{mit } \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$$

- Da das eine konservative Zentralkraft ist, dem man immer ein Potential zuordnen kann:

$$V_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) = V_{ji}(\mathbf{r}_{ji}) = -\int_{-\infty}^{\mathbf{r}_{ij}} f_{ij}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'$$

- Das Potential des i'ten Teilchens im Kraftfeld des j'ten Teilchens entspricht dem Potential des j'ten Teilchens im Kraftfeld des i'ten Teilchens.

- Potential ist die Arbeit, die geleistet werden muss, um das i'te Teilchen unter Einfluss des Kraftfeldes des j'ten Teilchen aus dem Unendlichen an seinen Platz zu bewegen.

- Es gilt: $\mathbf{F}_{ij} = -\mathrm{grad}_\mathrm{i}\, V_{ij}(\mathbf{r}_{ij})$ $\mathbf{F}_{ji} = -\mathrm{grad}_\mathrm{j}\, V_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) = -\mathbf{F}_{ij}$
- Das Gesamtpotential der inneren Kräfte ist dann:

$$V = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j V_{ji}(\mathbf{r}_{ji})$$

- Es lässt sich zeigen, dass $-\mathrm{grad}_i\, V = \sum_j \mathbf{F}_{ij}$ ist. Damit können wir dann schreiben:

$$\sum_i \sum_j \mathbf{F}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\boldsymbol{i}} -\mathrm{grad}_i\, V \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

Kombination der Betrachtungen zu inneren und äußeren Kräften

- Wir können als erstes ein Gesamtpotential einführen als Summe des externen und des internen Potentials:

$$V^{\mathrm{Gesamt}} = V^{\mathrm{ex}} + V = \sum_i V_i^{\mathrm{ex}}(\mathbf{r}_i) + \frac{1}{2}\sum_i \sum_j V_{ji}(\mathbf{r}_{ji})$$

- Der Energiesatz lautet dann:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(T + V^{\mathrm{Gesamt}}\right) = \sum_i \mathbf{F}_i^{\mathrm{diss}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = -P^{\mathrm{diss}}}$$

- Die zeitliche Änderung der Gesamtenergie eines Teilchensystems ist gleich der Leistung der dissipativen Kräfte.

Bemerkungen

- Wenn es keine äußeren Kräfte gibt, das System also abgeschlossen ist, gilt immer Energieerhaltung, da die inneren Kräfte konservativ sind.

- Falls die äußeren Kräfte konservativ sind, also keinen dissipativen Anteil haben, gilt ebenfalls Energieerhaltung.