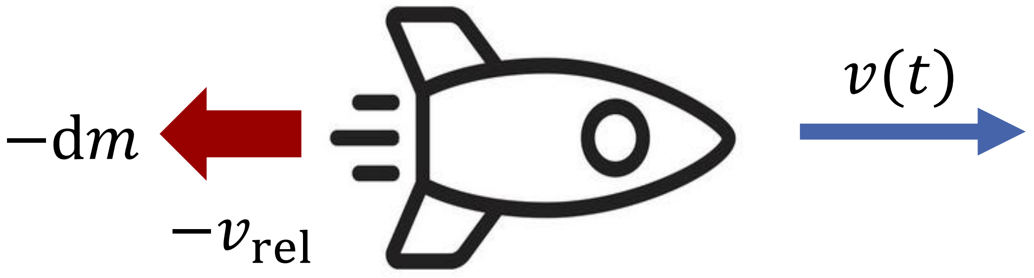
# 2.1.8 Beispiele zur Impuls- und Energieerhaltung

## 2.1.8.1 Raketenproblem

- Eine Rakete der Masse $m(t)$ stoße die Treibstoffmasse $-\mathrm{d}m$ $(\mathrm{d}m < 0)$ im Zeitintervall $\mathrm{d}t$ aus. Ihre konstante Relativgeschwindigkeit zur Rakete sei $v_{\mathrm{rel}} > 0$.
- Der Gesamtimpuls $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$ bleibt erhalten, bleibt also konstant im Intervall $\mathrm{d}t$.

Es folgt

$$(-\mathrm{d}m) \cdot (-v_{\mathrm{rel}}) + m(t)\,\mathrm{d}v = 0$$




$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}v = -v_{\mathrm{rel}} \frac{\mathrm{d}m}{m}$$



Bildquelle: www.alamy.com

- Wir lösen die (separierte) Differentialgleichung durch Integration mit der Anfangsbedingung $v(0) = 0$:

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \mathrm{d}v = -v_{\mathrm{rel}} \int_{m(0)}^{m(t)} \frac{\mathrm{d}m}{m} \Rightarrow \qquad v(t) - v(0) = -v_{\mathrm{rel}} \left(\ln(m(t)) - \ln(m(0))\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{v(t) = v_{\mathrm{rel}} \left(\ln\left(\frac{m(0)}{m(t)}\right)\right)}$$

**Raketengleichung von Ziolkowski**

- Schlussfolgerung: Geschwindigkeiten $v(t) \gg v_{\mathrm{rel}}$ können nur durch großen Massenausstoß erreicht werden.

## 2.1.8.2 Stoßprozesse zweier Massen

- Hier verwenden wir sowohl Impulserhaltung als auch Energieerhaltung!

- Wir unterscheiden zwischen elastischen Stößen und inelastischen Stößen:
  Bei elastischen Stößen ist die gesamte kinetische Energie erhalten, bei inelastischen Stößen nicht.

- Wir unterscheiden weiter zwischen geraden Stößen und schiefen Stößen.

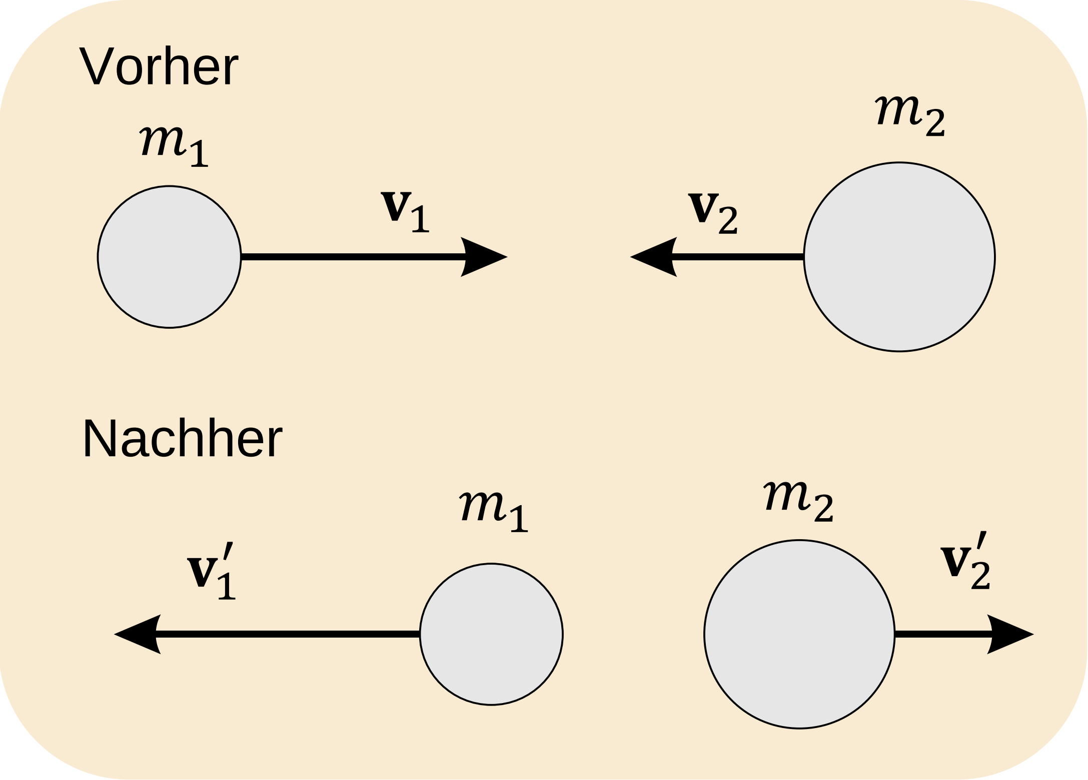
- Es werden nur zentrale Stöße betrachtet, d.h. die Teilchen werden beim Stoß nicht in Drehung versetzt.

# A. Der gerade zentrale Stoß

*Elastischer Stoß*

Impulserhaltung

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2'$$




Die Vektoren sind kollinear, also

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \qquad (1)$$

Beachte: Für die Bewegung nach links sind die Geschwindigkeiten negativ!

## Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 {v_1'}^2 + \frac{1}{2}m_2 {v_2'}^2$$

$$m_1\left(v_1^2 - {v_1'}^2\right) = m_2\left({v_2'}^2 - v_2^2\right)$$

$$m_1(v_1 - v_1') \cdot (v_1 + v_1') = m_2(v_2' - v_2) \cdot (v_2' + v_2)$$

Mit Impulsgleichung (1) folgt

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_2' = v_1 + v_1' - v_2}$$

Setze das Ergebnis wieder in Impulsgleichung (1) ein:

$$\left.\begin{aligned} (1)\quad m_1(v_1 - v_1') &= m_2(v_2' - v_2) \\ v_2' &= v_1 + v_1' - v_2 \end{aligned}\right\} \qquad v_1' = \frac{(m_1 - m_2)\, v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

Analog $\qquad v_2' = \dfrac{(m_2 - m_1)\, v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$

Spezialfälle:

1) $m_2 \to \infty\,; \quad v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1' = -v_1\,; \quad v_2' = 0$ (ruhende Wand)

2) $m_2 = 2m_1\,; \quad v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1' = -v_1/3\,; \; v_2' = 2v_1/3$

3) $m_2 = m_1\,; \quad v_2 = -v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1' = v_2\,; \quad v_2' = v_1$

## *Inelastischer Stoß*

Energieerhaltungssatz muss modifiziert werden

$$\frac{1}{2}\,m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}\,m_1 {v_1'}^2 + \frac{1}{2}\,m_2 {v_2'}^2 + \Delta W$$

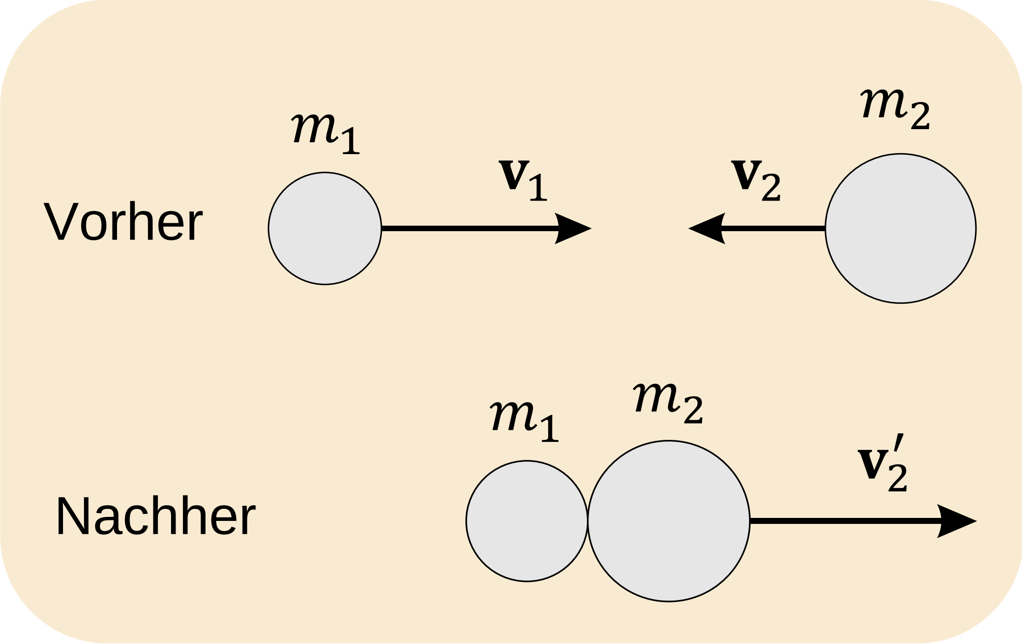
mit Deformationsenergie $\Delta W$
(nicht leicht zu bestimmen)

### Total inelastischer Stoß

$$\frac{1}{2}\,m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\,{v_2'}^2 + \Delta W$$

Impulserhaltung

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\,v_2' \;\rightarrow\; v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$



## Einsetzen in Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}\, m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}\frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2} + \Delta W$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2 m_1 m_2 v_1 v_2}{m_1 + m_2} + \Delta W \qquad \Big|\ \cdot 2\,(m_1 + m_2)$$

$$\cancel{m_1^2 v_1^2} + m_1 m_2 v_1^2 + m_1 m_2 v_2^2 + \cancel{m_2^2 v_2^2} = \cancel{m_1^2 v_1^2} + \cancel{m_2^2 v_2^2} + 2 m_1 m_2 v_1 v_2 + 2\,\Delta W (m_1 + m_2)$$

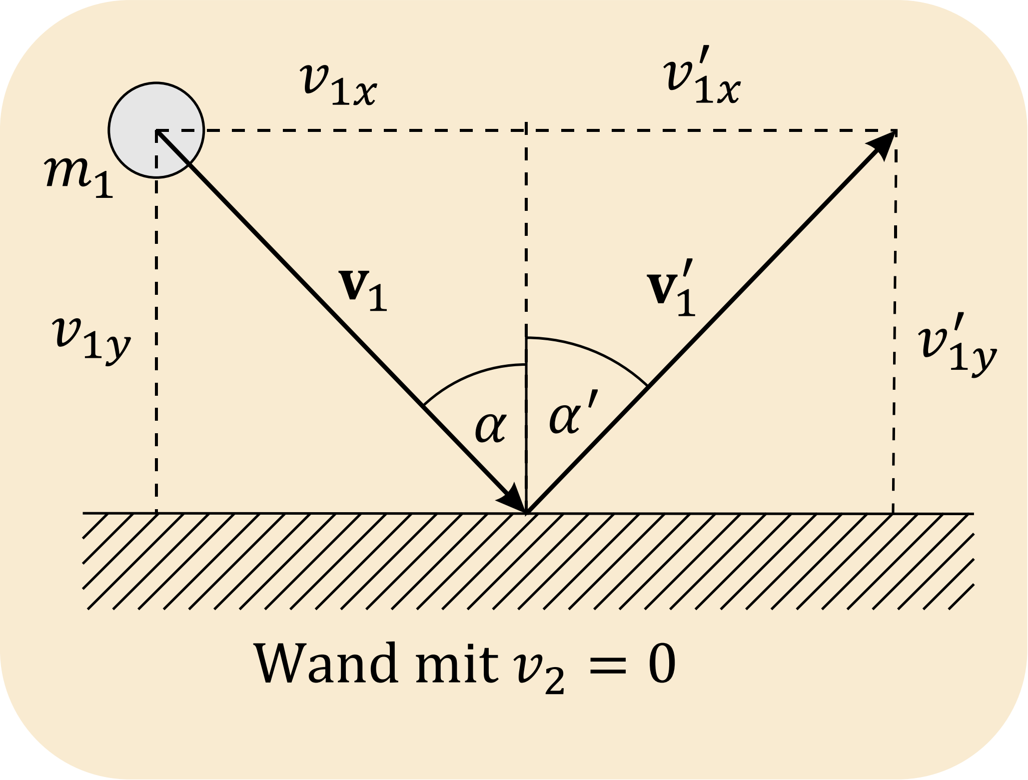
$$m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2 = 2\Delta W\ (m_1 + m_2)$$

Die „verlorene“ mechanische Energie ist demzufolge:

$$\boxed{\Delta W = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2}$$

## B. Der schiefe zentrale Stoß

*Spezialfall: Stoß mit Wand,* $m_2 \gg m_1$




### Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}\left(v_{1x}^2 + v_{1y}^2\right) = \frac{1}{2}\left({v'_{1x}}^2 + {v'_{1y}}^2\right)$$

### Impulserhaltung

$$m_1 \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix} = m_1 \begin{pmatrix} v'_{1x} \\ v'_{1y} \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} v'_{2x} \\ v'_{2y} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} y\text{-Komponente wie gerader Stoß} & \Rightarrow \quad v'_{1y} = -v_{1y} \\ x\text{-Komponente bleibt unverändert} & \Rightarrow \quad v'_{1x} = +v_{1x} \end{array}\right\}$$

Einfallswinkel $\hat{=}$ Ausfallswinkel

$$\alpha = \alpha'$$