2.1.9. Der harmonische Oszillator

- Eine Drosophila der Physik. Wenn Sie den harmonischen Oszillator verstanden haben, haben Sie einen Großteil der für das B.Sc.-Studium relevanten Physik verstanden😏.

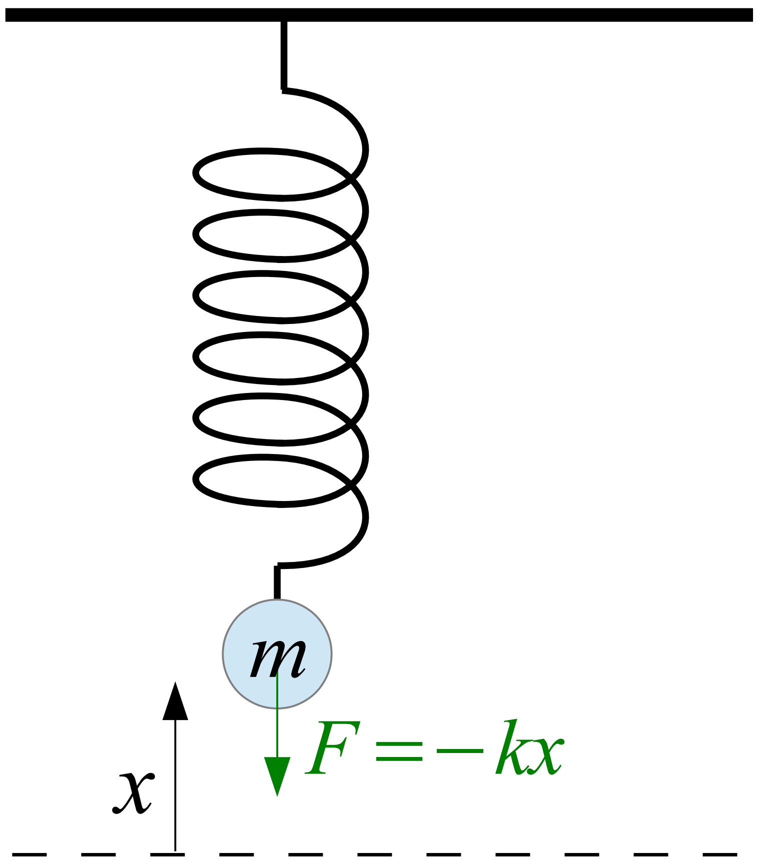
- Der harmonische Oszillator beschreibt die Bewegung eines Teilchens bei kleiner Auslenkung aus der Ruhelage.

- Die rücktreibende Kraft ist proportional zur Auslenkung und entspricht dem niedrigsten Term der Taylorreihe einer allgemeinen auf das Teilchen wirkenden Kraft.

Wir diskutieren im Folgenden den harmonischen Oszillator mit ansteigender Komplexität.

2.1.9.1 Implementierungen und Grundgleichung

Beispiel 1: Federpendel



- Rückstellkraft bei kleiner Auslenkung mit Federkonstante k

$$\mathbf{F} = -k\, x\, \mathbf{e}_x$$

- Bewegungsgleichung ohne treibende Kraft und Dissipation

$$m\ddot{x} = -kx \quad \rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

mit der Resonanz- oder Eigenfrequenz $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

Freier, ungedämpfter, harmonischer Oszillator

Motivation des Begriffs „Eigenfrequenz“ ω_0:

Wir starten von dem Lösungsansatz $x(t) = A\cos(\omega_0 t)$ (oder auch $x(t) = B\sin(\omega_0 t)$) und setzen diesen zusammen mit der Hookeschen Kraft in das zweite Newtonsche Gesetz $m\ddot{x} = -kx$ ein.

$$\Rightarrow m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}A\cos(\omega_0 t) = -kA\cos(\omega_0 t)$$
$$= -m\,A\,\omega_0^2\cos(\omega_0 t) = -k\,A\cos(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \Rightarrow \omega_0 = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Das System schwingt alleine mit der Frequenz ω_0 bzw. mit der Periode $\mathrm{T} = 2\pi/\omega_0$.

Vorlesungsexperiment

Vorlesungsexperiment

Beispiel 2: mathematisches Pendel

- Rückstellkraft allgemein: $F = -mg\sin\alpha$
- Für kleine Auslenkung gelten

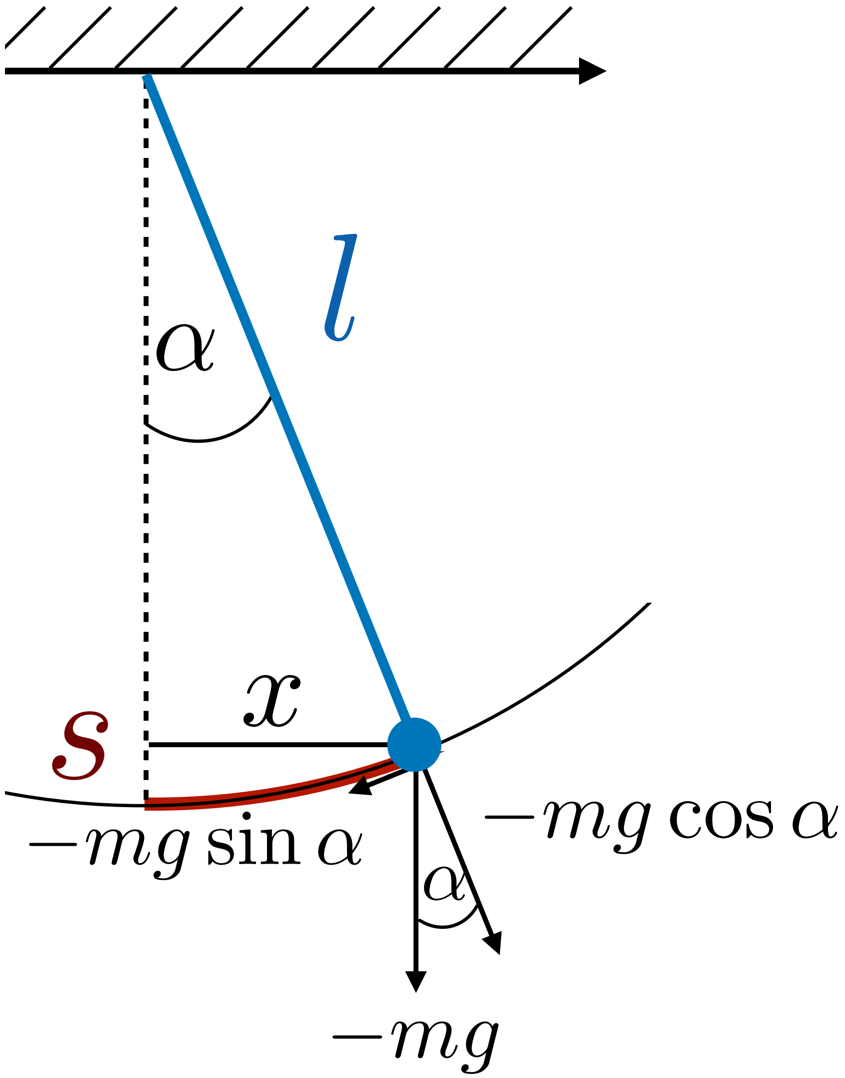
$$\sin\alpha \approx \alpha \quad ; \quad x \approx l \cdot \alpha$$

$$F = -mg\sin\alpha \approx -mg\frac{x}{l} \quad \rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Resonanz- oder Eigenfrequenz ist dann

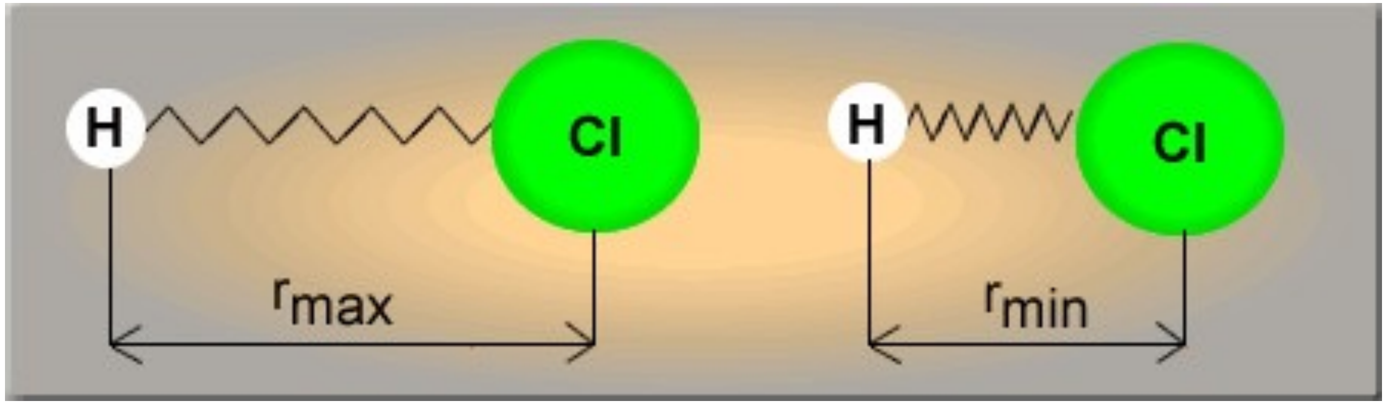
$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

Freier, ungedämpfter, harmonischer Oszillator



Beispiel 3: Schwingungen eines 2-atomigen Moleküls

- Klassisches Modell: zwei Atome der Masse m_1 und m_2 mit Abstand a in Ruhelage.



- Bewegung der Atome in x-Richtung im Potential $V(x_2 - x_1)$. Dadurch übt m_2 auf m_1 die Kraft F_{12} und m_1 auf m_2 die Kraft F_{21} aus.

$$F_{12}(x_2 - x_1) = -\frac{\mathrm{d}V(x_2 - x_1)}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\mathrm{d}V(x_2 - x_1)}{\mathrm{d}x_2} = -F_{21}$$

http://www.chemgapedia.de

- Wenn $x_2 - x_1 = a \quad \rightarrow \frac{\mathrm{d}V(x_2 - x_1)}{\mathrm{d}x_1} = 0$. Dies entspricht gerade genau der Ruhelage.
- Für kleine Auslenkungen gilt gerade nach Durchführen einer Taylorentwicklung

$$
\begin{aligned}
F_{12}(x_2 - x_1) = F_{12}(a + \epsilon) &= F_{12}(a) + \frac{F_{12}(a+\epsilon) - F_{12}(a)}{\epsilon} \cdot \epsilon \\
&\approx F_{12}(a) + \epsilon \cdot \left.\frac{\mathrm{d}F_{12}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a} \\
&= \quad 0 + \epsilon \left.\frac{\mathrm{d}^2 V(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=a}
\end{aligned}
$$

- Bewegungsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
m_1 \ddot{x}_1 &= +(x_2 - x_1 - a)\, V''(a) \\
m_2 \ddot{x}_2 &= -(x_2 - x_1 - a)\, V''(a)
\end{aligned}
$$

- Einführen der Relativkoordinate $\epsilon = x_2 - x_1 - a$ ergibt als Bewegungsgleichung für die Relativkoordinate

$$\ddot{\epsilon} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) V''(a) \cdot \epsilon$$

$$\ddot{\epsilon} + \omega_0^2 \epsilon = 0$$

- mit der Resonanz- oder Eigenfrequenz $\omega_0^2 = \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} V''(a) > 0$

- Wenn die Gleichgewichtslage stabil sein soll, muss sie einem Minimum des Potentials $V(a)$ entsprechen. Dann ist $V''(a) > 0$.

Freier, ungedämpfter, harmonischer Oszillator

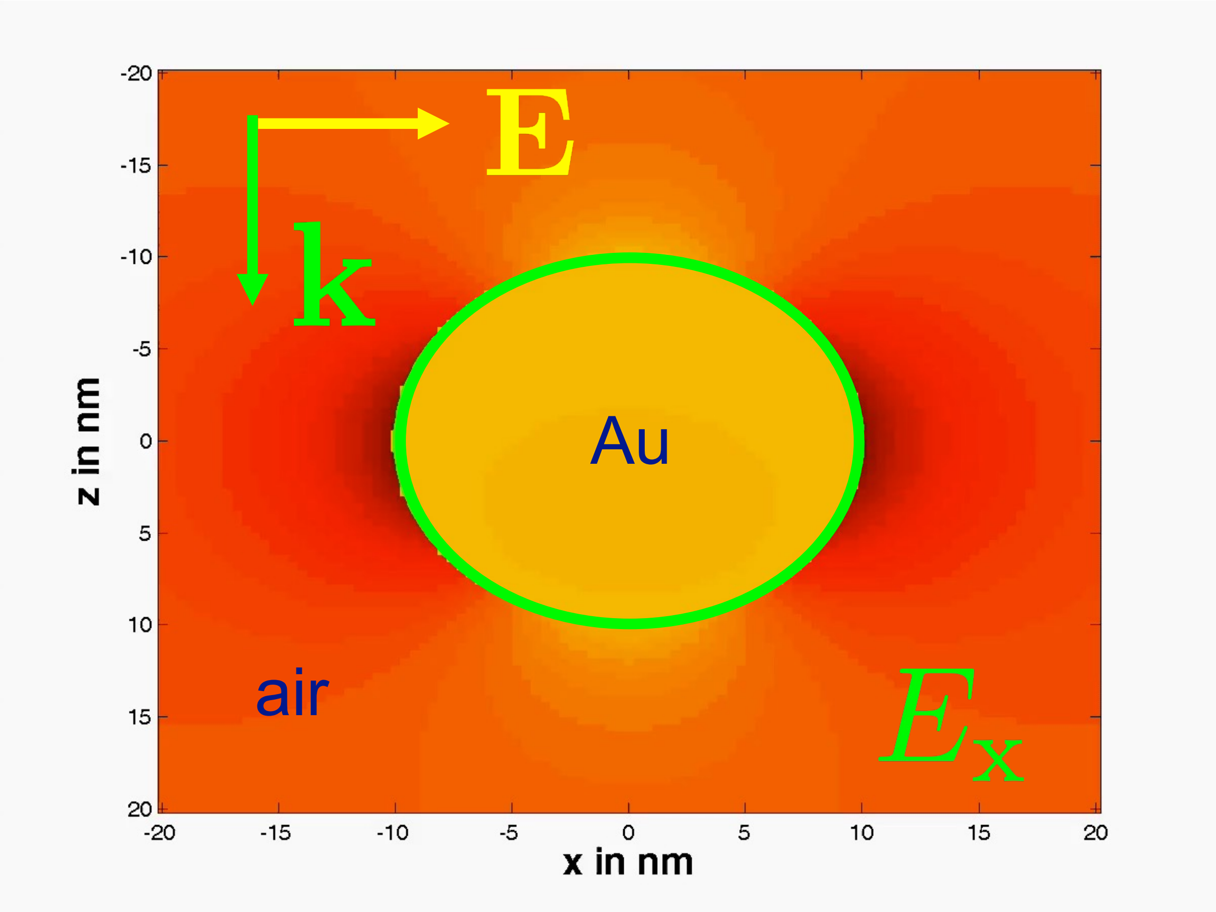
Beispiel 4: Polarisation eines metallisches Nanopartikels

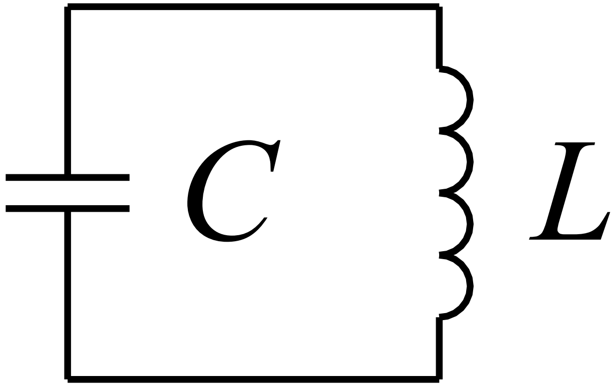
- Ein externes elektromagnetisches Feld (Licht), kann das Dipolmoment in einem kleinen metallischen Nanopartikel resonant anregen.

- Die zeitliche Dynamik dieses Dipol-moments $p(t)$ gehorcht der Differential-gleichung eines harmonischen Oszillators:

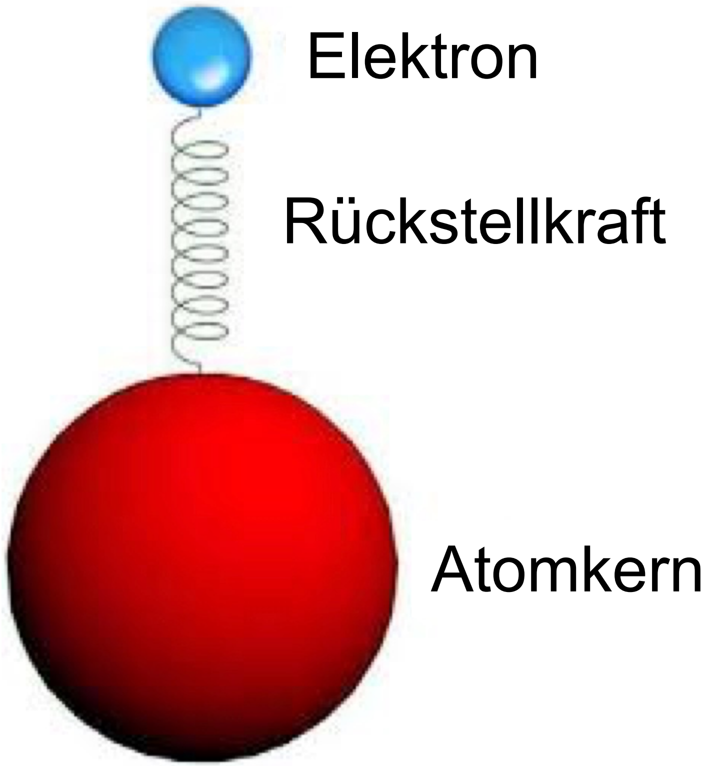
$$\ddot{p} + \omega_0^2 p = 0$$

Mehr dazu in der Optik

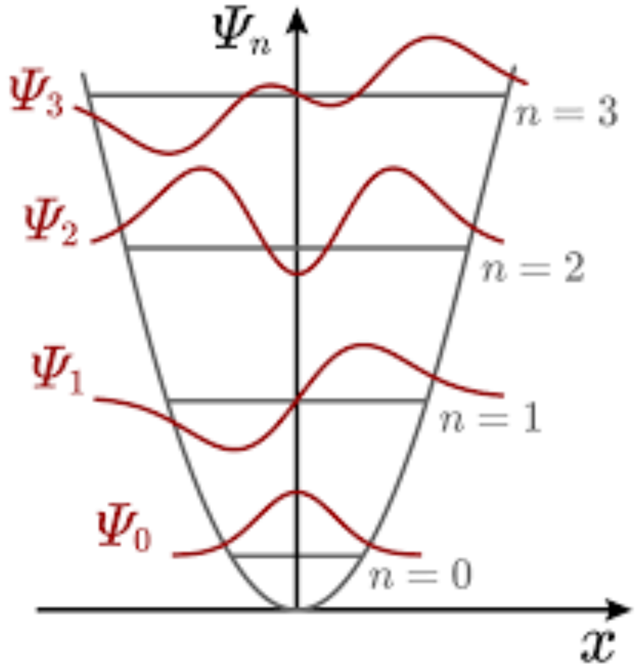




Elektrodynamik



Materialeigenschaften in der Optik



Quantenmechanik

2.1.9.2 Eigenschaften des harmonischen Oszillators

- Das Kraftfeld des harmonischen Oszillators ist wirbelfrei

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$$

- Wir können diesem daher ein skalares Potential zuordnen

$$V(x) = -\int_0^x F_x(x')\mathrm{d}x' = \int_0^x kx'\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}kx^2$$

Potential ist eine quadratische Funktion.

- Es ist ein konservatives System, für das Energieerhaltung gilt

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = E = \mathrm{const}$$

2.1.9.3 Lösung des harmonischen Oszillators

- Wir nehmen als Anfangsbedingung an, dass der Massepunkt sich in Ruhe befindet [$\dot{x}(t_0) = 0$] und sich zu diesem Zeitpunkt bei $x(t_0) = x_0 = a$ befindet.

  Energie: $E = \frac{k}{2} a^2$

- Lösen der Gleichung, die uns die Energieerhaltung beschreibt:

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2 = \frac{k}{2} a^2$$

$$\dot{x}^2 = \frac{k}{m}(a^2 - x^2)$$

- Lösen durch Separation der Variablen

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\,\mathrm{d}t = \pm\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\,t(x) = \int_a^x \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{a^2 - x'^2}} = \arcsin\frac{x}{a} - \arcsin 1 = \arcsin\frac{x}{a} - \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \arcsin\frac{x}{a} = \omega_0 t + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{a} = \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \quad \boxed{x(t) = x_0 \cos\omega_0 t}$$

Die Bewegung ist eine zeitharmonische Oszillation um die Ruhelage.

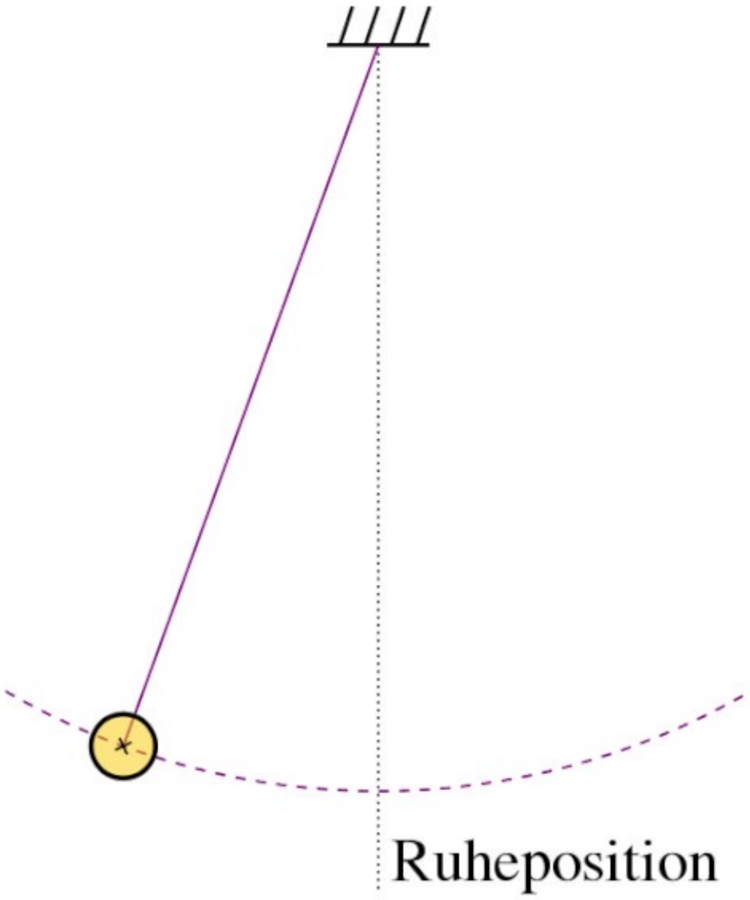
- Mit der Wahl einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 anstelle einer Anfangsauslenkung

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

- Erinnerung: Die Bewegungsgleichung ist eine lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und zwei Lösungen:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \cos(\omega_0 t - \alpha) \quad \text{mit } \alpha = \frac{v_0}{x_0 \omega_0}$$



https://de.m.wikipedia.org/wiki/Datei:Pendelschwingung.gif

2.1.9.4 Lösung des freien, gedämpften harmonischen Oszillator

- Ein realer harmonischer Oszillator ist immer auch durch Reibung charakterisiert.

$$\mathbf{F}_{\text{Diss}} = -r\dot{x}\mathbf{e}_x \quad \rightarrow \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \;\; \text{mit} \;\; \gamma = \frac{r}{2m}$$

> Beachten Sie bitte, dass in der Literatur dieser Reibungskoeffizienten manchmal mit und manchmal ohne diesen Faktor 2 eingeführt wird. Wir verwenden ihn hier, um die Lösungen später kompakter schreiben zu können.

- Die Kraft hängt von der Geschwindigkeit ab. Das System ist nicht konservativ. Die Kraft wirkt der Geschwindigkeit entgegen. Der Energieverlust beträgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + V) = \mathbf{F}_{\text{Diss}} \cdot \dot{\mathbf{r}} =- -r\dot{x}^2$$

Arten der Reibungskräfte

- Stokesche Reibung: der Reibungskoeffizient ist keine Funktion der Geschwindigkeit,

$$\gamma(v) = \gamma = \text{const}$$

  Beispiel: schnelle Teilchen oder Teilchen in zähen Medien (sehr hohe Viskosität).

- Newtonsche Reibung: Reibungskoeffizient ist eine lineare Funktion der Geschwindigkeit.

$$\gamma(v) = \gamma_0 v$$

  Beispiel: sich langsam bewegende Körper (z.B. mit Fallschirm).

11. Komplexe Zahlen

- Per Definition berechnet sich die imaginäre Einheit i als

$$i^2 = -1$$

- Imaginäre Einheit ist Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$

- Komplexe Zahl z: $z = a + ib$ mit dem Realteil a und dem Imaginärteil b

- Komplex konjugierte Zahl z^*: $i \rightarrow -i$ dadurch $z^* = a - ib$

Mathematischer Einschub

> René Descartes prägte den Begriff im Sinne von ‚abwertend‘ und hielt komplexe Zahlen für fiktiv und nutzlos…

- Betrag einer komplexen Zahl:

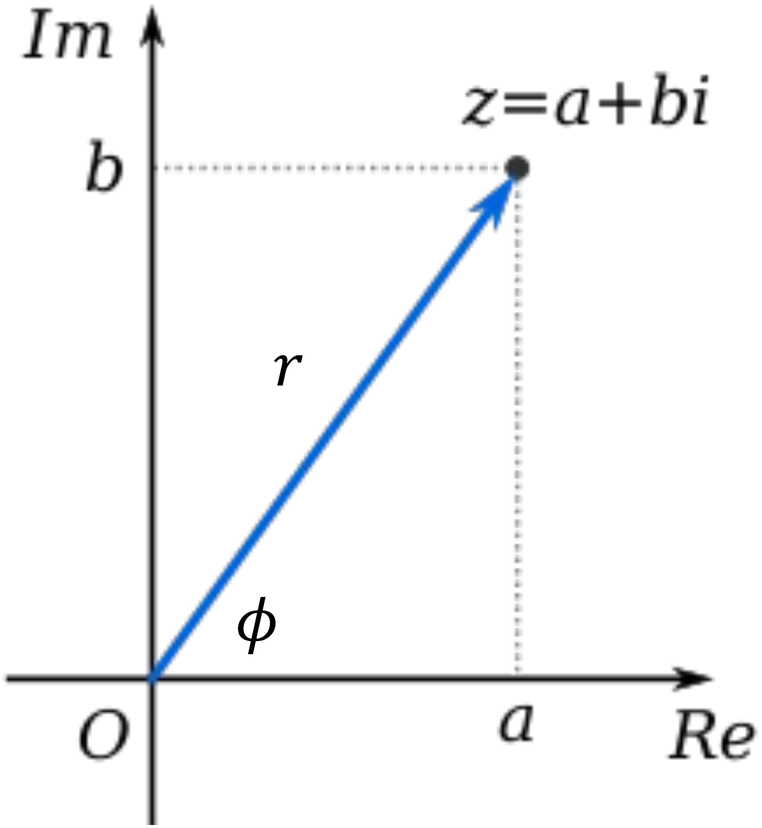
$$r^2 = |z|^2 = a^2 + b^2$$

- Phase einer komplexen Zahl:

$$\phi = \arg z = \operatorname{atan2}\left(\frac{b}{a}\right)$$

- Darstellung:

$$z = a + ib = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$



Mathematischer Einschub

Angepasst von https://de.wikiversity.org/wiki/Komplexe_Zahlen

Rechenregeln

- Betrachte zwei komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + ib_1$ und $z_2 = a_2 + ib_2$

- Addition: $$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$$

- Multiplikation: $$z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

- Division: $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(-a_1 b_2 + a_2 b_1)}{a_2^2 + b_2^2}$$

Die komplexe Exponentialfunktion

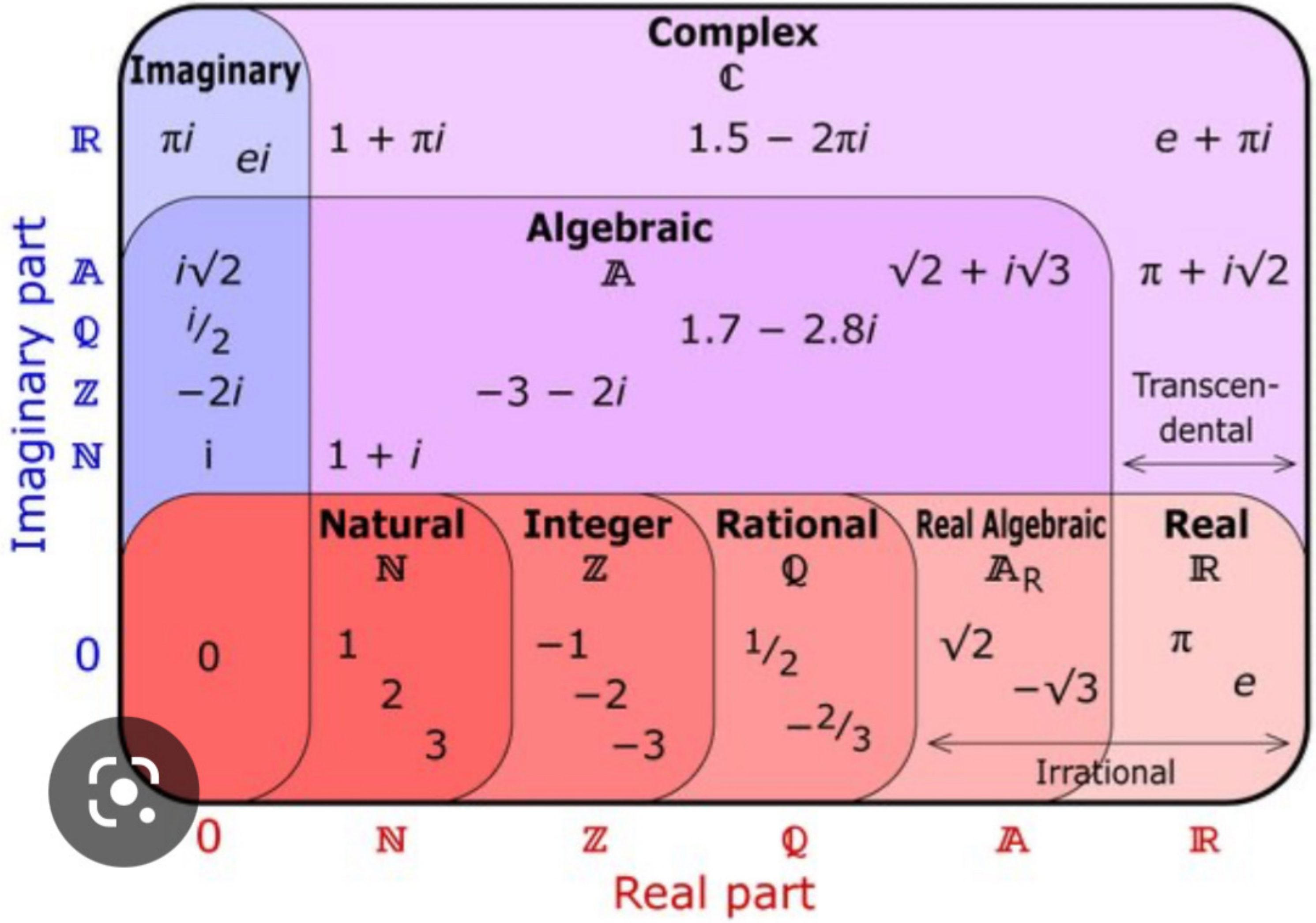
- Im Folgenden drücken wir die Koordinaten harmonischer Oszillation mit komplexen Zahlen aus.

> Die Messgröße (Observable) ist immer nur der Realteil.

- Wir nutzen nur aus, mit komplexen Größen einfacher rechnen zu können!
- Beispiel: $f(y) = \cos y + i \sin y = e^{iy}$
- Ableitung: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = -\sin y + i \cos y = if(y) = ie^{iy}$
- Satz von Moivre: $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\phi}$ mit $\alpha = n \in \mathbb{N}$
  $\rightarrow (\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi)$

Mathematischer Einschub

Zahlenbereiche



Mathematischer Einschub

Quelle: Twitter @zlatko_minev

2.1.9.4 Lösung des freien, gedämpften harmonischen Oszillators

- Bewegungsgleichung: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

- Ansatz: $x \propto e^{\lambda t}$ $\rightarrow$ $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$
- Lösung: $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

- Allgemeine Lösung HO: $$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}$$

- Die Koeffizienten ergeben sich aus den Anfangsbedingungen.

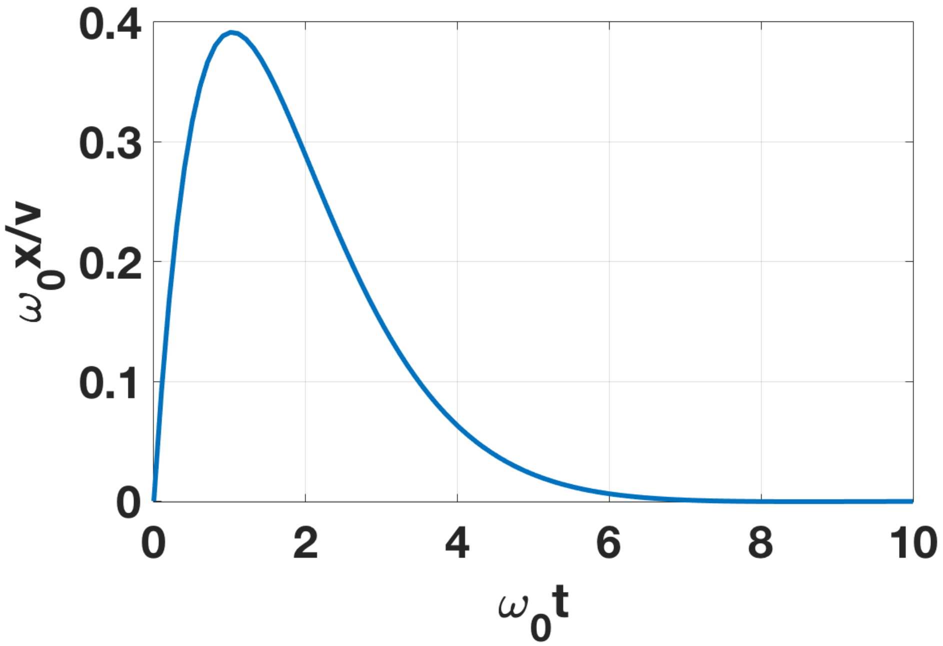
Wir diskutieren im Folgenden die Lösungen abhängig vom Argument der Wurzel.

Starke Dämpfung: Kriechfall $\omega_0^2 < \gamma^2$

- Zwei negative Wurzelargumente, rein imaginäre Wurzel: $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$
- Reelwertige Zeitkonstanten und exponentiell abklingend aufgrund starker Dämpfung
- Konstantenbestimmung aus Anfangsbedingungen:

z.B. $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v$

$$x(t) = \frac{v}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\gamma t} \sinh\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t\right)$$



Mittlere Dämpfung: aperiodischer Grenzfall $\omega_0^2 = \gamma^2$

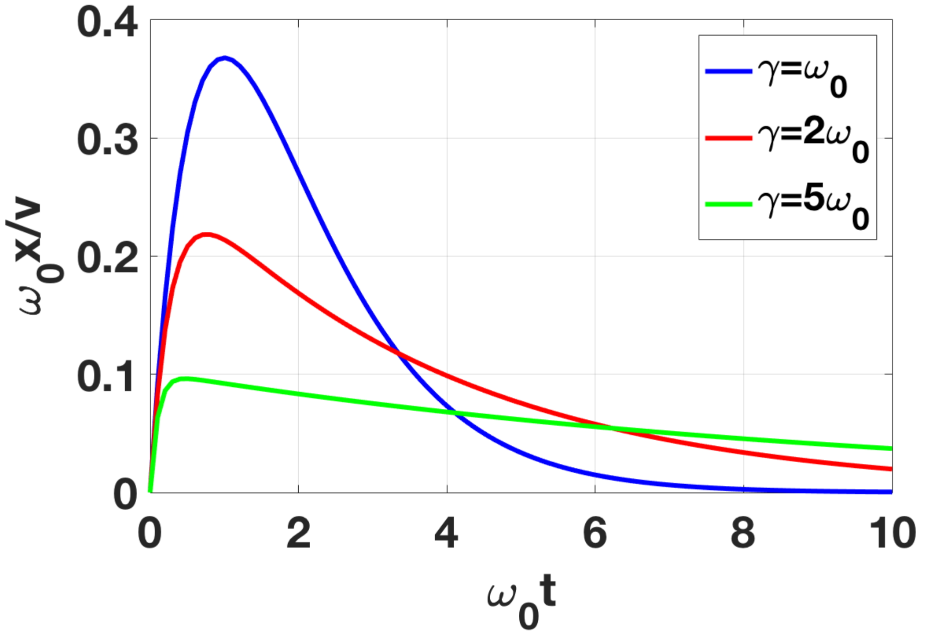
- Wir haben hier eine doppelte Nullstelle, $\lambda_{1,2} = -\gamma$

- Lösungsansatz: $x(t) = e^{-\gamma t}(a_1 + a_2 t)$

- Konstantenbestimmung aus Anfangsbedingungen:

  z.B. $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v$

$$x(t) = v\, t\, e^{-\gamma t}$$



- Der Oszillator kommt nach Auslenkung schnellstmöglich zur Ruhe. Wichtig im Gerätebau (z.B. analoge Zeiger wie beim Tachometer).

Schwache Dämpfung: Schwingfall $\omega_0^2 > \gamma^2$

- Wir haben hier zwei konjugiert komplexe Nullstellen, $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

- Konstantenbestimmung aus Anfangsbedingungen:

  z.B. $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v$

$$x(t) = \frac{v}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\gamma t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t\right)$$

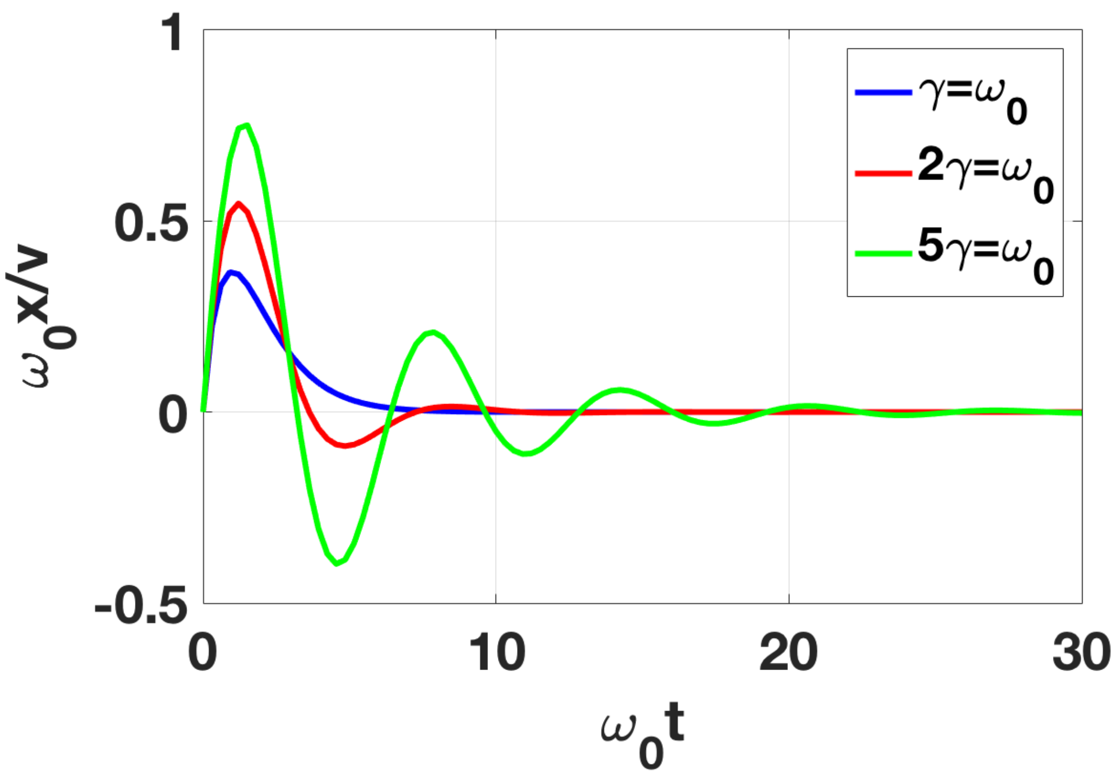
- Harmonische Schwingung mit exponentieller Dämpfung.

- Dämpfung verschiebt die Eigenfrequenz

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

- Oszillationsperiode:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$



- Verhältnis zweier Auslenkungen auf gleicher Seite:

$$D = \frac{x_n}{x_{n+2}} = e^{\gamma T} \rightarrow \ln D = \gamma T$$

2.1.9.4 Lösung des getriebenen, gedämpften harmonischen Oszillators: zeitharmonische Anregung

- Wir betrachten jetzt nicht mehr nur den freien harmonischen Oszillators, sondern diskutieren nun zusätzlich ein zeitabhängige Kraft, die den Oszillator antreibt

$$\mathbf{F}(x,t) = -kx\mathbf{e}_x - r\dot{x}\mathbf{e}_x + F(t)\mathbf{e}_x$$

- Die äußere Kraft kompensiert die Dämpfung und führt zu einer permanenten Bewegung.

- Beginne mit dem Spezialfall einer zeitharmonischen Kraft:

$$\boxed{F(t) = F_0 \cos(\Omega t + \theta)}$$

Amplitude Winkelfrequenz Phasenverschiebung

- Diese zeitharmonische Kraft führt zu einer zeitharmonischen (stationären) Bewegung.

- Inhomogene, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \bar{f}\cos(\Omega t + \theta)} \quad \text{mit} \quad \bar{f} = \frac{F_0}{m}$$

- Lösung: $x(t) = x_{\mathrm{hom}}(t) + x_{\mathrm{s}}(t)$

- Die homogene Lösung inklusive dem asymptotischem Verhalten aus vorheriger Betrachtungen hat die folgenden Eigenschaften

$$x_{\mathrm{hom}}(t \to \infty) = 0 \quad \to \quad x(t \to \infty) = x_{\mathrm{s}}(t)$$

- Aus früheren Betrachtungen wissen wir, dass wir bei zeitharmonischer Anregung eine ebenfalls zeitharmonische Antwort bei gleicher Frequenz erhalten:

- Ansatz: $x_s(t) = A\cos(\Omega t + \alpha)$

- Komplexe Notation (wesentlich einfacher): $x_s(t) = a e^{i\Omega t}$ mit $a = A e^{i\alpha}$

- Kraft: $\bar{f}\cos(\Omega t + \theta) \rightarrow f e^{i\Omega t}$ mit $f = \bar{f} e^{i\theta}$

- Ansatz und Kraft in DGL: $(-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2)a = f$

- Für eine gegebene Kraft können wir dann so die Antwort berechnen:

$$a = \frac{f}{-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2}$$

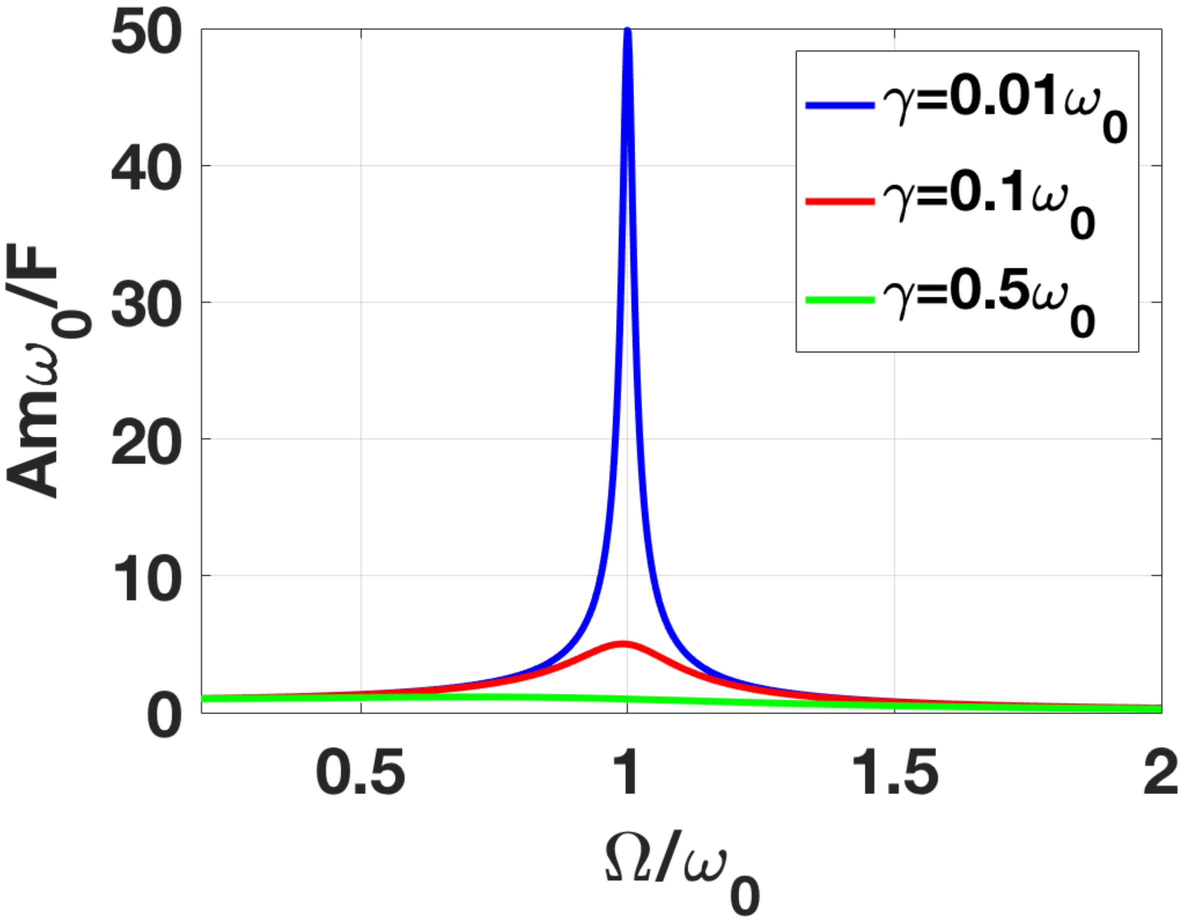
$$Ae^{i\alpha} = \frac{\bar{f}e^{i\theta}}{-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2}$$

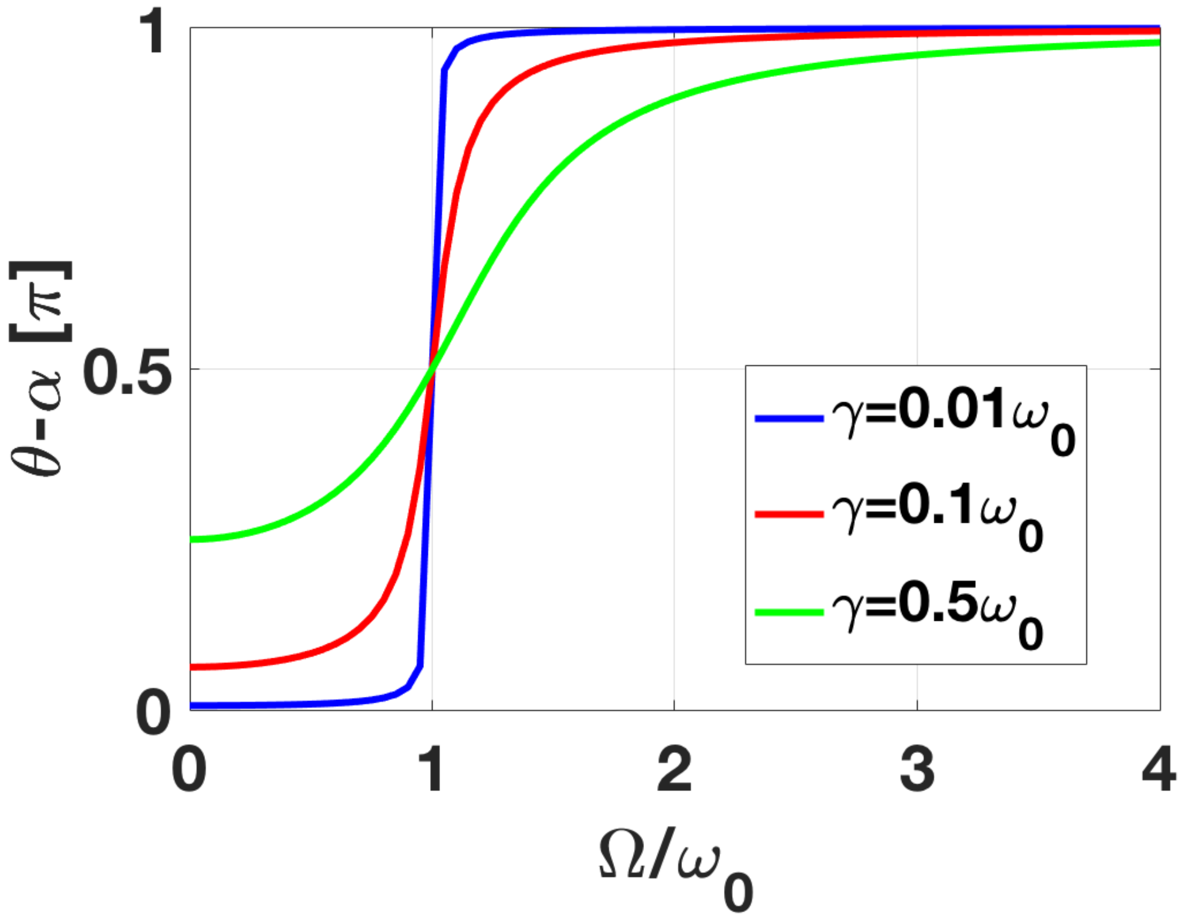
- Amplitude:

$$A = \frac{\bar{f}}{\sqrt{\left(w_0^2 - \Omega^2\right)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}$$

- Phase:

$$\tan(\theta - \alpha) = \tan\delta = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$


50
40
30
20
10
0
$Am\omega_0/F$
0.5
1
1.5
2
Ω/ω_0
γ=0.01ω_0
γ=0.1ω_0
γ=0.5ω_0


1
0.5
0
θ-α [π]
0
1
2
3
4
Ω/ω_0
γ=0.01ω_0
γ=0.1ω_0
γ=0.5ω_0

Interpretation

- Die Schwingung hat die maximale Amplitude in Resonanznähe.
- Die Linienbreite der Resonanz ist proportional zur Dämpfung.
- Phase: $\Omega \ll \omega_0$ die Schwingung ist in Phase (d.h. gleiche Phase)
  $\Omega \gg \omega_0$ die Schwingung ist um den Winkel π außer Phase $(180°)$
- Der Nenner der Amplitude ist am kleinsten wenn Frequenz in der Nähe der Resonanzfrequenz ist. Exakt:

$$\Omega_\mathrm{R} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

Interpretation

- Die maximale Amplitude ist dann:

$$A_{\max} = \frac{F}{2\gamma m\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}}$$

- Die Linienbreite der Resonanz ist hier definiert als die Breite bei der Hälfte ihres Maximalwertes

$$\mathrm{FWHM} = \Omega_2 - \Omega_1 = 2\gamma \qquad \text{mit} \qquad A^2\left(\Omega_{1,2}\right) = \frac{1}{2} A^2(\Omega_\mathrm{r})$$

2.1.9.4 Lösung des getriebenen, gedämpften harmonischen Oszillators: beliebige Anregung

- Bisher haben wir nur die Möglichkeit einer zeitharmonischen Anregung betrachtet. Jetzt wollen wir eine beliebige Anregung berücksichtigen.

- Zur Lösung gibt es zwei Möglichkeiten, die wir im Folgenden separiert diskutieren:

  1) Fourierzerlegung
  2) Greensche Funktion (Antwortfunktion)

- Beide Möglichkeiten wenden des Superpositionsprinzip von Kräften an.

2.1.9.4 Lösung des getriebenen, gedämpften harmonischen Oszillators: beliebige Anregung

- Superposition zeitharmonischer Kräfte, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz sind: periodische Kraft beliebiger Amplitude innerhalb Periodendauer.

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{i\cdot n\Omega\cdot t}$$

- Dies nennt man eine Fourierreihe. Im Grenzfall einer unendlichen kleinen Grundperiode führt dies zu einer unendlichen zeitlichen Periodendauer.

- In dem Fall, wenn $\Omega \to 0$ geht, wird das diskrete Frequenzspektrum kontinuierlich und man spricht von einer Fouriertransformation.

12. Fouriertransformation

- Fouriertransformation: mathematisches Werkzeug zur Zerlegung beliebiger periodischer Funktionen mit Periode a in harmonische Schwingungen.

$$f(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\left(m\frac{2\pi}{a}x\right) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\left(m\frac{2\pi}{a}x\right) = f(x+a)$$

- Diskrete Fourierreihe:

$$A_m = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\left(m\frac{2\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x \quad ; \qquad B_m = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\left(m\frac{2\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x$$

- Alternativ (komplexe Schreibweise):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{im\frac{2\pi}{a}x} \quad ; \qquad f_m = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^a f(x)e^{-im\frac{2\pi}{a}x}\mathrm{d}x$$

Mathematischer Einschub

- Beim Übergang von der diskreten Fourierreihe zur kontinuierlichen Fourtransformation betrachten wir den Grenzfall einer unendlich kleinen Grundperiode.
- Der diskrete Index eine kontinuierliche Variabel: $$m\frac{2\pi}{a} \to k$$
- Die Summe wird zu einem Integral: $$\sum_m \to \frac{a}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k$$
- Das diskrete Spektrum wird kontinuierlich: $$f_m \to \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,\tilde{f}(k)$$

Mathematischer Einschub

Fouriertransformation

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} \mathrm{d}k$$

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x$$

Unbedingt Merken

Mathematischer Einschub

Notation und Normierung werden nicht einheitlich gehandhabt in der Literatur und können von der hier verwendeten abweichen.

Rechenregeln

- Ableitung einer Funktion: $f'(x) \quad \leftrightarrow \quad ik\tilde{f}(k)$
- Höhere Ableitung einer Funktion: $f^{(n)}(x) \quad \leftrightarrow \quad (ik)^n\tilde{f}(k)$
- Verschiebungssatz: $f(x-x_0) \leftrightarrow \quad e^{ikx_0}\tilde{f}(k)$
- δ-Distribution: $\delta(x-x_0) \leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx_0}$

Wichtigste Anwendung: Differentialgleichungen im Zeitbereich werden algebraisch im Frequenzbereich

Hinweise zur Notation

- Die Notation wie eine Fouriertransformation zu schreiben ist, ist leider nicht eindeutig.
- Der Vorfaktor ist manchmal symmetrisch gewählt ($\sqrt{\frac{1}{2\pi}} \leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$) und manchmal asymmetrisch ($1 \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}$). De facto ist das nicht so wichtig, so lange Sie nach Hin- und Rücktransformation die Funktion reproduzieren.
- Die Vorzeichenwahl der Exponentialfunktion ist unterschiedlich. Die hier verwendete Notation $f(t) = Ae^{i\omega t}$ entstammt der Signaltheorie und ist hier angemessen.
- Im Kontext der Wellenphysik, unterscheidet man später zwischen einer Fouriertransformation im Zeit- und im Ortsbereich. Für eine Welle benötigt man ein unterschiedliches Vorzeichen. Daher wählt man üblicherweise $f(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$.

Jupyter Notebook

- In diesem Beispiel illustrieren wir Details zur Fouriertransformation.

13. Delta-Distribution (δ-Distribution)

- Wir benötigen die δ-Distribution, um punktförmige Anregungen in der Zeit im Folgenden darzustellen.

- Die δ- Distribution stellt eine Erweiterung des Funktionenbegriffs auf unstetige Funktionen dar.

- Distributionen ermöglichen es, Lösungen für manche Differentialgleichungen zu definieren, die im klassischen Sinn nicht hinreichend oft differenzierbar oder gar nicht definiert sind.

> In der physikalischen Literatur wird der Unterschied zwischen Distribution und Funktion nicht immer wertgeschätzt und es wird auch von der δ-Funktion besprochen.

- Definition:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\delta(x - x')\mathrm{d}x'$$

Die δ–Distribution ist ein Funktional, welches eine Funktion auf eine Zahl abbildet.

- Rechenregeln:

$$f(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\delta(x + x')\mathrm{d}x' = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\delta(-x - x')\mathrm{d}x'$$

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\delta(-x')\mathrm{d}x' \quad = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\delta(x')\mathrm{d}x'$$

- Eigenschaften:

$$\delta(x-x')=\begin{cases}0 & x\neq x'\\ \infty & x=x'\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x')\mathrm{d}x'=1$$

$$\delta(x)=\delta(-x)$$

$$\delta(t^2-a^2)=\frac{1}{2a}\big(\delta(t-a)+\delta(t+a)\big)$$

$$\delta(\alpha x)=\frac{1}{|\alpha|}\delta(x)$$

- Ableitung der δ –Distribution: $\dfrac{\partial}{\partial x}\delta(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\frac{\partial}{\partial x'}\delta(x-x')\mathrm{d}x'$$

$$= f(x')\delta(x-x')|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x'}f(x')\,\delta(x-x')\mathrm{d}x'$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}f(x)$$

Mathematischer Einschub

- δ –Distribution in höheren Dimensionen:

$$\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \equiv \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \equiv \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathrm{d}V' = 1$$

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathrm{d}V'$$

- δ –Distribution als Grenzübergang aus einer stetiger Funktion.

- Beispiel:

$$f(x,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$$

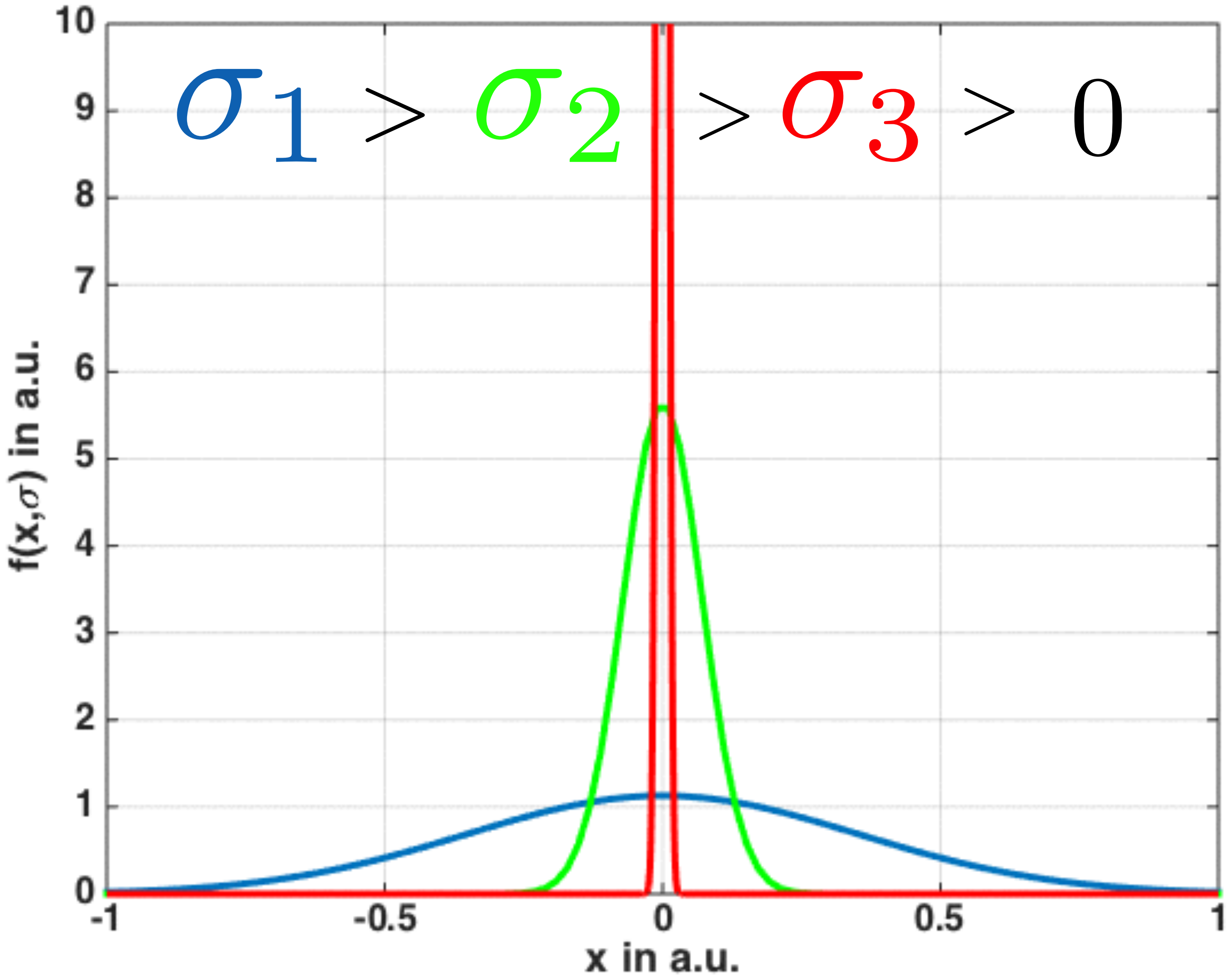
- Eigenschaften:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\sigma)\mathrm{d}x = 1$$

$$f(x,\sigma) = 0 \;\text{ für } x \neq 0 \;\text{ wenn } \sigma \to 0$$

$$\lim_{\sigma\to 0} f(x,\sigma) = \lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} = \delta(x)$$

Mathematischer Einschub



Mathematischer Einschub

$$\lim_{\sigma\to 0} f(x,\sigma) = \lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} = \delta(x)$$

- Diese Funktion multipliziert mit einer beliebigen analytischen Testfunktion und integriert über den ganzen Raum, ergibt im Grenzfall den Wert der Testfunktion, dort wo die Distribution lokalisiert ist.

- Damit sind alle Eigenschaften der δ-Distribution erfüllt.

- Falls man nicht mit der δ-Distribution rechnen will, rechnet man mit einer solchen Testfunktion und betrachten sie abschließend den Grenzwert.

Zurück zum getriebenen, gedämpften harmonischen Oszillator mit beliebiger Anregung

- Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{in\Omega t}$$

- Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL wird ebenfalls als Reihe geschrieben:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} B_n e^{in\Omega t}$$

- Amplitude:

$$f_n = \left(-(n\Omega)^2 + 2i\gamma(n\Omega) + \omega_0^2\right) B_n$$

Alternativer Zugang: Greensche Funktion

- Anstelle der Zerlegung in zeitharmonische Anregungen, zerlegen wir jetzt die Anregung in eine zeitliche Sequenz von Stößen.

- Jeder einzelne Stoß wird durch eine impulsförmige δ-Anregung beschrieben.

- Die Antwort des Systems auf einen einzelnen Stoß ist bekannt: diese entspricht gerade der Greensche Funktion oder auch Antwortfunktion genannt.

- Die Greensche Funktion ist ein Mittel zur Lösung inhomogener DGLs. Mit bekannter Greenscher Funktion bestimmen wir die Antwort auf beliebige zeitliche Anregungen.

- Bewegungsgleichung mit Kraftstoß zum Zeitpunkt t' (ein Parameter der Gleichung):

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \delta(t - t')$$

- Anfangsbedingungen: $x(t'_-) = 0$ und $\dot{x}(t'_-) = 0$
  (Teilchen in Ruhe und ohne Auslenkung vor dem Stoß)

- Greensche Funktion: $$G(t;t') \equiv x(t)$$ (Lösung obiger Gleichung)

- Bekannt: Kausalität: $G(t;t') = 0$ für $t < t'$
  Zeitinvarianz: $G(t;t') = G(t - t')$

- Allgemeine Bestimmungsgleichung für Greensche Funktion:

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right] G(t-t') = \delta(t-t')$$

- Für $t > t'$ gilt dann aber

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right] G(t-t') = 0$$

- mit bekannten Lösung:

$$G(t-t') = e^{-\gamma(t-t\prime)}\{a_1 \cos[\omega(t-t')] + a_2 \sin[\omega(t-t')]\}$$

$$\text{mit } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

- Wie bestimmen wir die Konstanten aus den Anfangsbedingungen? Wir integrieren die Differentialgleichung über ein kleines Zeitintervall um den Stoß.

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2\right]G(t-t')\mathrm{d}t=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon}\delta(t-t')\mathrm{d}t$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t-t')\right]_{t=t'-\epsilon}^{t=t'+\epsilon}=\lim_{\epsilon\to 0}\dot{G}(\epsilon)=1$$

- Die Greensche Funktion ist stetig und beschränkt: kein Beitrag der letzten beiden Terme.

- Weiterhin: $$\lim_{\epsilon\to 0}G(\epsilon)=0$$

- Aus diesen beiden Bedingungen bestimmen wir die Koeffizienten:

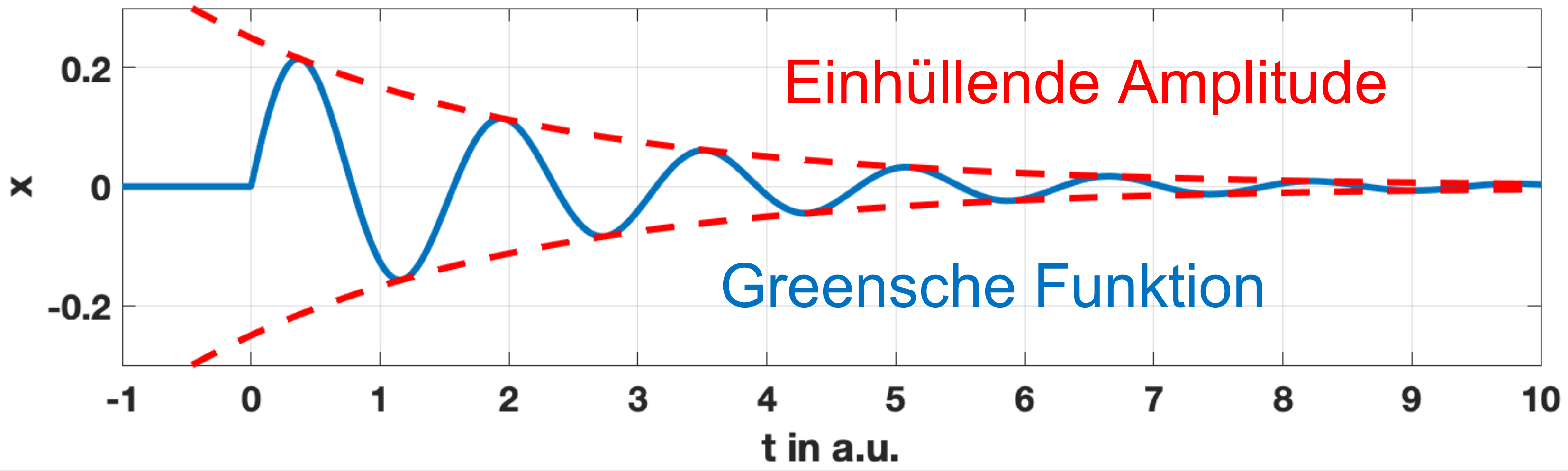
$$a_1 = 0 \quad \text{und } a_2 = \frac{1}{\omega}$$

- Greensche Funktion:

$$G(t-t') = \begin{cases} \frac{1}{\omega} e^{-\gamma(t-t')} \sin[\omega(t-t')] & t > t' \\ 0 & t < t' \end{cases}$$

Kausalität
(Wirkung kommt nach Ursache)

Retardierung
(Wirkung nicht instantan)



- Beliebige Anregung:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')f(t')\mathrm{d}t'$$

löst: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$

- Beweis:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right) G(t-t')}_{\delta(t-t\prime)} f(t')\mathrm{d}t' = f(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t')f(t')\mathrm{d}t' = f(t)$$

Jupyter Notebook

- In diesem Beispiel illustrieren wir Details zur Lösung des harmonischen Oszillators.

Jupyter Notebook