2.2 Rotationsbewegungen

2.2.1 Winkelfrequenz, Drehimpuls, Drehmoment, Trägheitsmoment

- Wir haben die Translationsbewegungen kräftefreier Teilchen in einem kartesischen Koordinatensystem (x, y, z) betrachtet, da die Bewegung eines kräftefreien Teilchens so mathematisch am einfachsten beschrieben werden kann (Impulserhaltung).
- Das ändert sich nun bei der Betrachtung von Rotationsbewegungen. Hier ist der Impuls $\mathbf{p}$ nicht konstant. Für die mathematische Beschreibung eignen sich besser Polarkoordinaten (Radien und Winkel). Wir beschränken uns hier zunächst auf Bewegungen in einer Ebene. Dazu führen wir Kreiskoordinaten ein.
- Wir werden sehen, dass für Rotationsbewegungen unter geeigneten Bedingungen ein weiterer Erhaltungssatz gilt für eine neue Größe, dem Drehimpuls $\mathbf{L}$.

2.2.1.1 Gleichförmige Kreisbewegung eines Teilchens in der Ebene

- Ein Teilchen der Masse m bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit $v = |\mathbf{v}|$ auf einer Kreisbahn mit Radius r. Seine Koordinaten sind

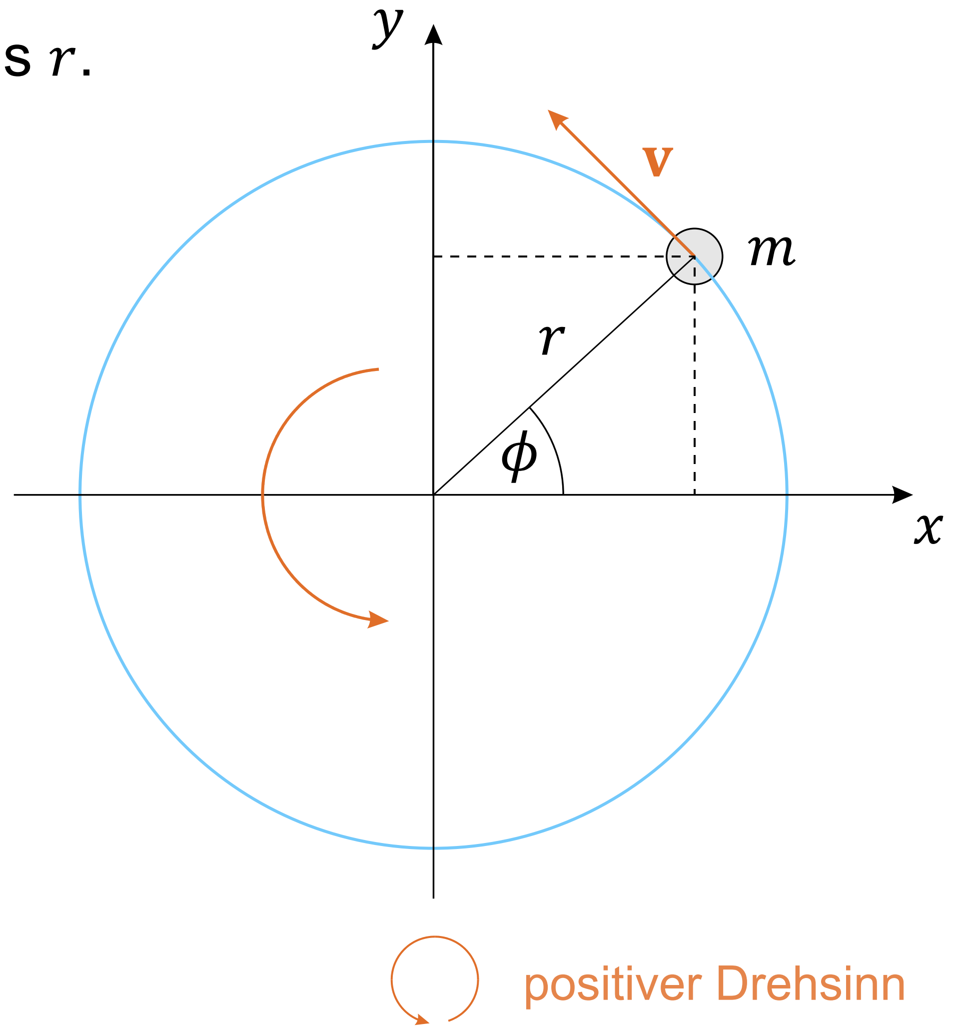
$$x = r \cdot \cos\phi \quad ; \qquad y = r \cdot \sin\phi$$

- Der Winkel ϕ wächst mit der Zeit t. Wir definieren die Winkelgeschwindigkeit

$$\boxed{\omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}} \quad \overset{v\,=\,\mathrm{const}}{\Rightarrow} \quad \phi = \omega t$$

- Dann folgt $(v = \mathrm{const})$:

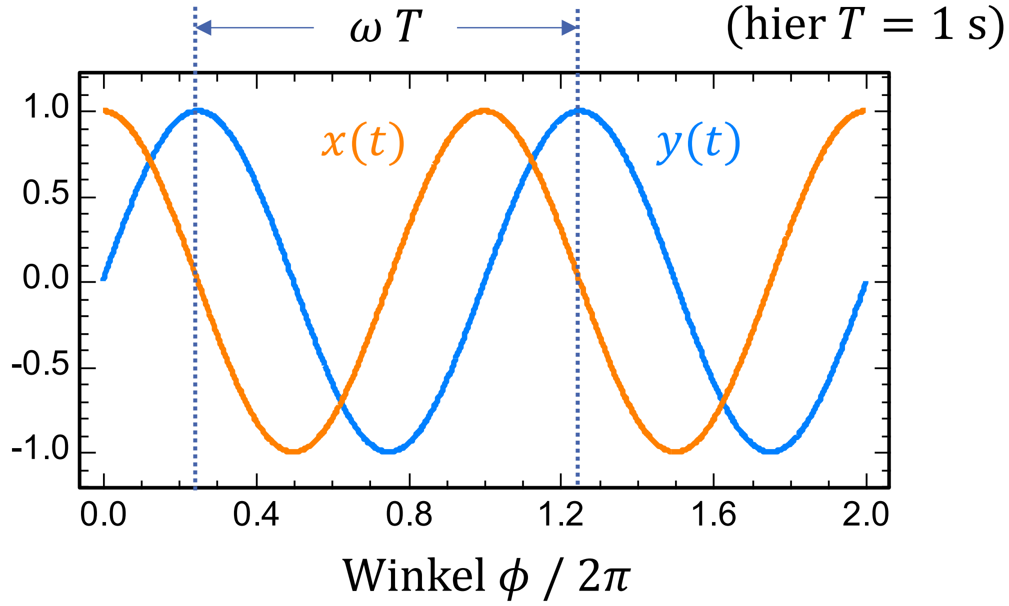
$$\left.\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = -\omega r \cdot \sin\omega t \\ v_y &= \dot{y} = +\omega r \cdot \cos\omega t \end{aligned}\right\} \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega r$$



- Die allgemeine Bewegung in der Ebene kann vollständig mit den Kreiskoordinaten $(\phi(t), r(t))$ beschrieben werden. Die angegebenen Beziehungen $x(\phi, r)$ und $y(\phi, r)$ sind die Transformationsgleichungen zwischen den beiden Koordinatensystemen.
- Für drei Dimensionen werden je nach Symmetrie des Problems die Kreiskoordinaten erweitert zu Zylinderkoordinaten (Achse z) oder Kugelkoordinaten (Winkel θ).
- Für periodische Bewegungen ist eine weitere Größe nützlich, die Periodendauer T bei konstanter Winkelgeschwindigkeit ω:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$$

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$



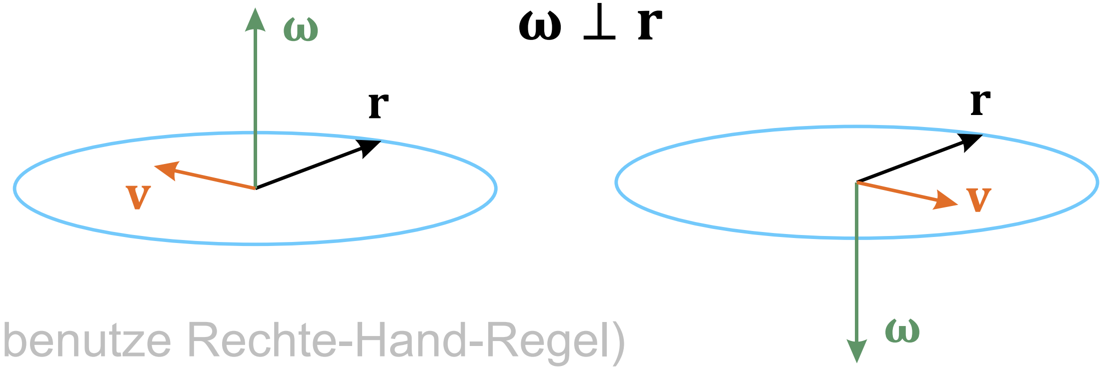
- Geschwindigkeit v und Winkelgeschwindigkeit ω sind bzgl. der jeweiligen Koordinate analog definiert:

$$x = v \cdot t \quad ; \qquad \phi = \omega \cdot t$$

- Aber: die Geschwindigkeit ist eine vektorielle Größe. Kann man der Winkel-geschwindigkeit auch eine Richtung zuordnen? Ja!
- Die relevante Richtung einer Drehbewegung in der Ebene ist die Orientierung der Ebene im Raum (Normale der Ebene). Wir definieren den axialen Vektor ω mittels

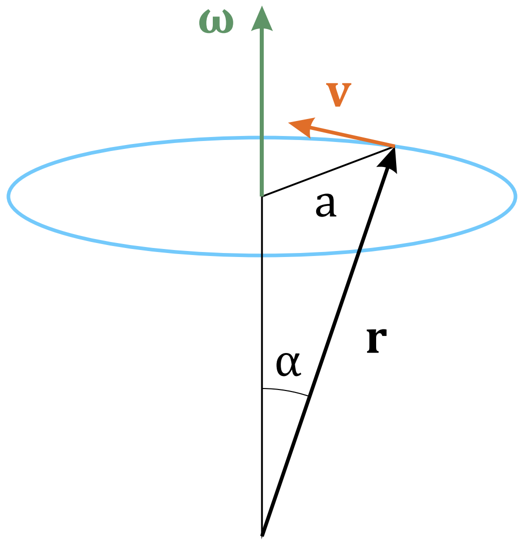
$$\boxed{\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}} \quad \Rightarrow \quad v = \omega\, r \sin\alpha$$

$$\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad v = \omega\, r \;\checkmark$$



(benutze Rechte-Hand-Regel)

- Ist die Formel auch richtig, wenn $\boldsymbol{\omega}$ nicht senkrecht zum Ortsvektor $\mathbf{r}$ ist?



$$\sin\alpha = \frac{a}{r}$$

$$v = \frac{2\pi a}{T} = \omega\, a = \omega r \sin\alpha = |\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}| \quad ✓$$

2.2.1.2 Drehimpuls und Drehmoment

- Ein Teilchen der Masse m bewege sich mit dem Impuls

$$\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$$

auf einer beliebigen Bahn $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Wir definieren dann den Drehimpuls $\mathbf{L}$ des Teilchens bzgl. des Ursprungs des Ortsvektors $\mathbf{r}$ zu

$$\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}} \qquad [L] = \mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$$

Das Drehmoment $\mathbf{M}$ bzgl. des Ursprungs von $\mathbf{r}$ definieren wir als

$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}} \qquad [M] = \mathrm{Nm}$$

worin $\mathbf{F}$ die auf das Teilchen wirkende Gesamtkraft darstellt.

- Wie sind Drehimpuls und Drehmoment miteinander verbunden?
  Wir berechnen dazu die zeitliche Ableitung von $\mathbf{L}$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}\times\mathbf{p}) = \underbrace{m\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{v}}_{\mathbf{v}\times\mathbf{v}=0} + \mathbf{r}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$$

Damit folgt die fundamentale Beziehung

$$\boxed{\mathbf{M} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t}}$$ entspricht hinsichtlich der Form $\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$

Drehimpulserhaltungssatz

Der Drehimpuls eines Teilchens bleibt konstant solange kein Drehmoment auf das Teilchen ausgeübt wird.

Beachte: Drehimpuls und Drehmoment hängen vom gewählten Bezugspunkt ab!

- Beispiel: Hebelgesetz

Zwei Körper auf einer Balkenwaage üben auf dem äußersten Ende ihrer Arme die Schwerkräfte $F_1 = m_1 g$ und $F_2 = m_2 g$ aus. Die Waage ist im Gleichgewicht, wenn kein Drehmoment wirkt. S sei der Ursprung und die Balkenlängen betragen r_1 und r_2.

Für die Summe der Drehmomente gilt

$$M_1 + M_2 = r_1 F_1 + r_2 F_2 = (m_1 r_1 + m_2 r_2) \cdot g$$

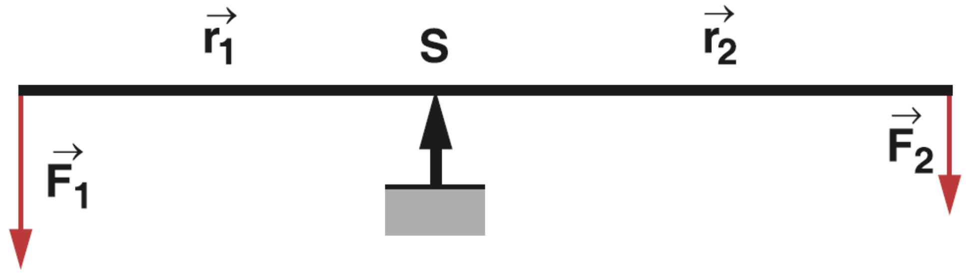


Abb.: Demtröder, Mechanik und Wärme

Mit $M_1 + M_2 = 0$ erhalten wir das Hebelgesetz

$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

> Ungleiche Gewichte stehen im Gleichgewicht in Abständen, die sich umgekehrt verhalten wie die Gewichte.
>
> Archimedes, um 250 v.Chr.

- Verallgemeinerung des Hebelgesetzes

Für die Summe der Drehmomente haben wir erhalten

$$M_{\text{ges}} = M_1 + M_2 = r_1 F_1 + r_2 F_2 = (m_1 r_1 + m_2 r_2) \cdot g$$

Der Schwerpunkt beider Massen ist gegeben durch (vgl. Kap. 2.1.4)

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Das gesamte Drehmoment $\mathbf{M}_{\text{ges}}$ verschwindet also dann, wenn der Auflagepunkt S (hier Ursprung des KS) im Schwerpunkt $\mathbf{R}$ der beiden Massen liegt. Allgemein:

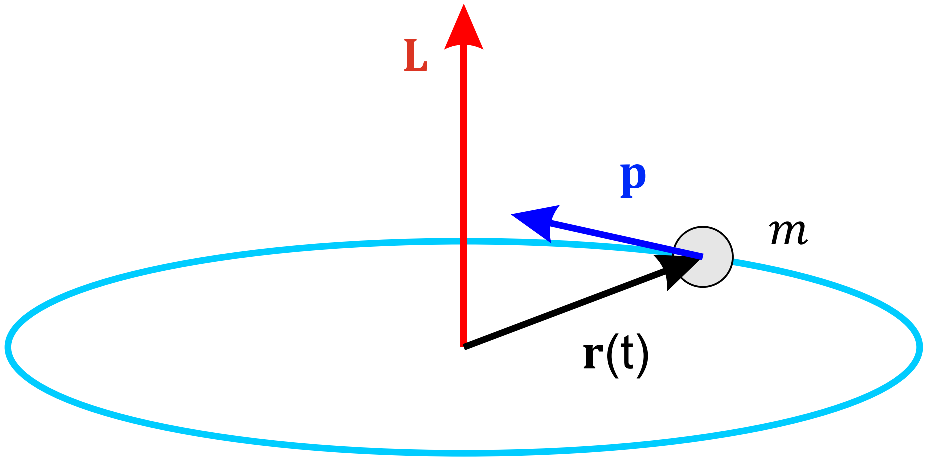
> Wenn ein Körper um eine Achse durch den Schwerpunkt $\mathbf{R}$ drehbar aufgehängt ist, bleibt er in jeder Lage stabil, da das gesamte Drehmoment, das durch sein Gewicht ausgeübt wird, Null ist.

- Beispiel: Drehimpuls für Kreisbewegung mit $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}$

$$\mathbf{L} = m\,\mathbf{r}\times\mathbf{v} = m\,\mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

$$= m\,[(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})\,\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\,\mathbf{r}]$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{L} = mr^2\,\boldsymbol{\omega}$$



Mit dem Trägheitsmoment eines Teilchens

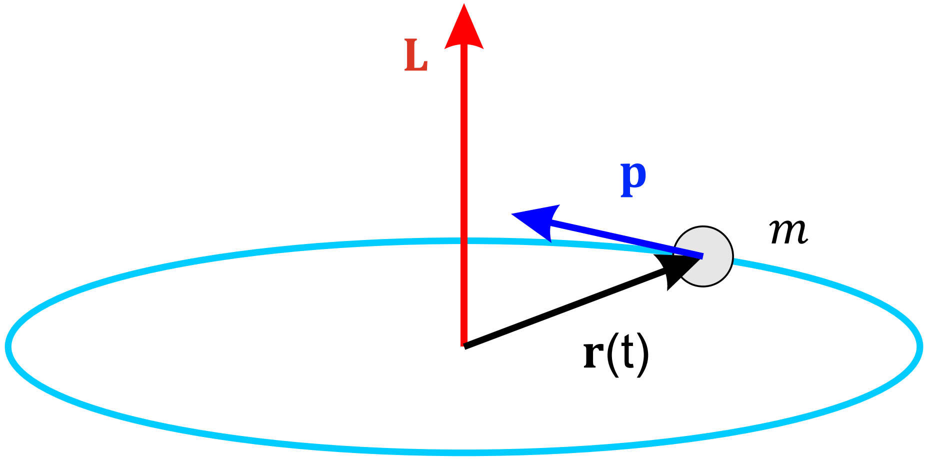
$$J = m\,r^2$$

erhält man dann den Ausdruck

$$\mathbf{L} = J\,\boldsymbol{\omega}$$

entspricht hinsichtlich der Form $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$

- Beispiel: kinetische Energie für Kreisbewegung mit $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}$



$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} m \,(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2$$

$$= \frac{1}{2} m \,(\omega\, r)^2$$

$$= \frac{1}{2} (m r^2)\, \omega^2$$

$$\boxed{E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} J\, \omega^2}$$

entspricht hinsichtlich der Form $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m\, v^2$

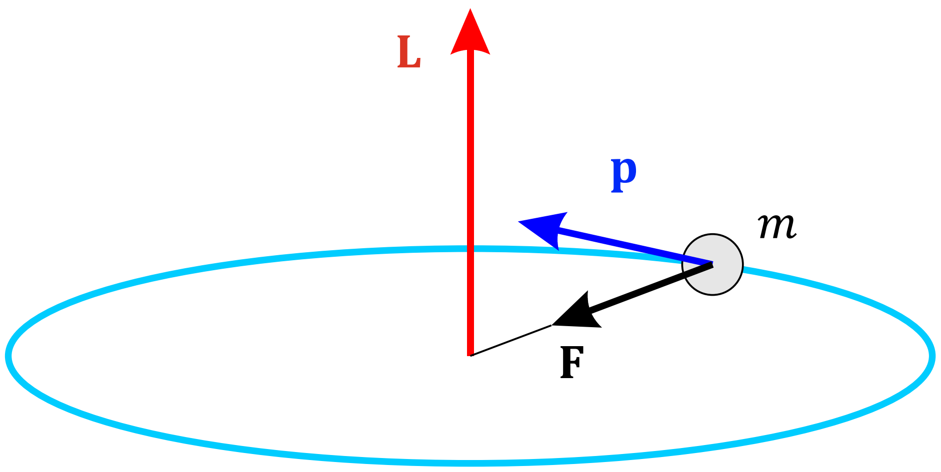
- Damit in diesem Beispiel das Teilchen auf der Kreisbahn bleibt, muss eine Kraft $\mathbf{F}$ auf das Teilchen wirken, die zum Mittelpunkt Z der Kreisbahn gerichtet ist.

Wie groß ist dann das wirkende Drehmoment?

Feststellung: $\mathbf{F}$ ist eine Zentralkraft mit

$$\mathbf{F} = -F \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = -(\mathbf{r}\times\mathbf{r}) \cdot \frac{F}{r} = 0$$



Die Kraft F übt kein Drehmoment aus und der Drehimpuls $\mathbf{L}$ ist konstant.

> Erinnerung: Auch die von $\mathbf{F}$ geleistete Arbeit ist Null (vgl. Kap. 2.1.6)

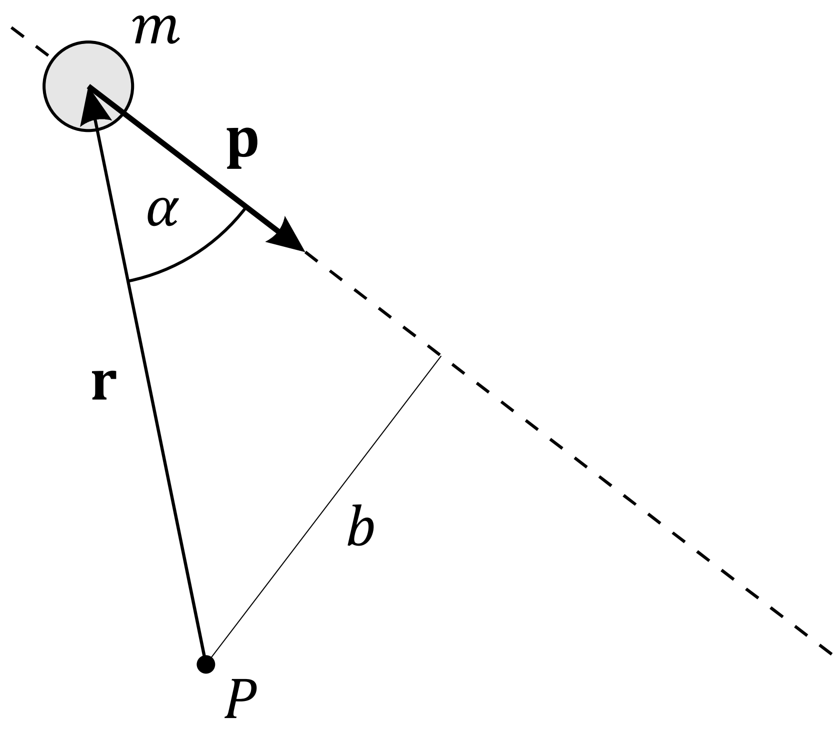
- Beispiel: Drehimpuls für Teilchen mit konstantem Impuls $\mathbf{p}$

Ein Teilchen bewege sich entlang einer geraden Linie mit konstanter Geschwindigkeit. Es passiert einen Punkt P im kürzestem Abstand b.

Der Betrag des Drehimpuls $\mathbf{L}$ bzgl. des Punktes P ist dann

$$L = |\mathbf{r}\times\mathbf{p}|$$

$$= r\,p\sin\alpha = b\,p$$



Der Drehimpuls hängt also vom Bezugspunkt P ab und ist im Allgemeinen nicht Null.

Nur für den Spezialfall $b = 0$, wenn die Teilchenbahn den Punkt P enthält, verschwindet der Drehimpuls.