

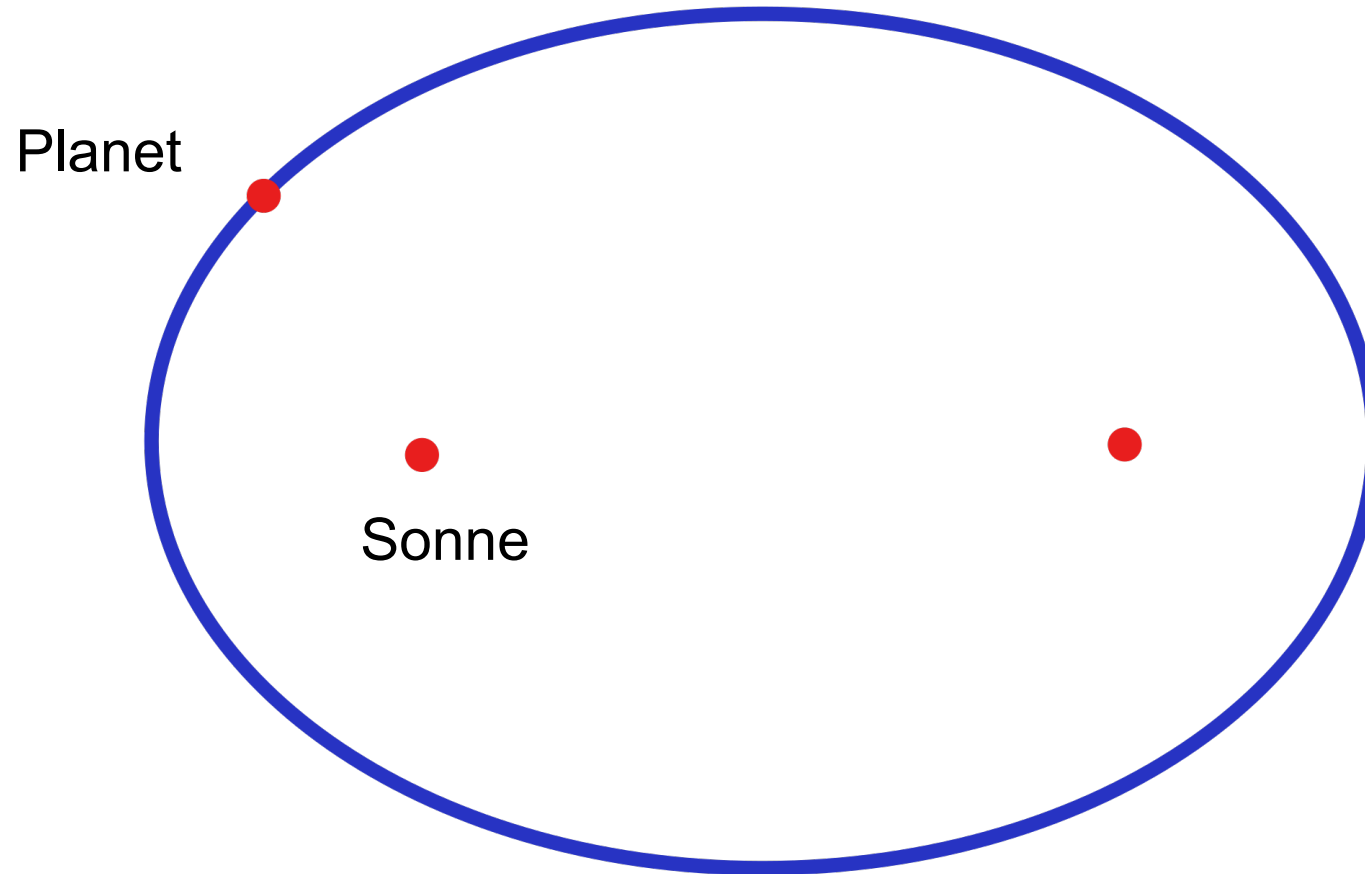
2.2.2. Keplerschen Gesetze und die Planetenbahnen

- Drei Gesetze die die Planetenbewegung mathematisch fassen (1609, 1619).
- Basierend auf Daten von Tycho Brahe zur Planetenbewegung.
- Bestätigung des heliozentrischen Systems nach Kopernikus für Planetenbewegung.
- Newton leitet die Gesetze aus den Bewegungsgleichungen für ein Zweikörperproblem ab.



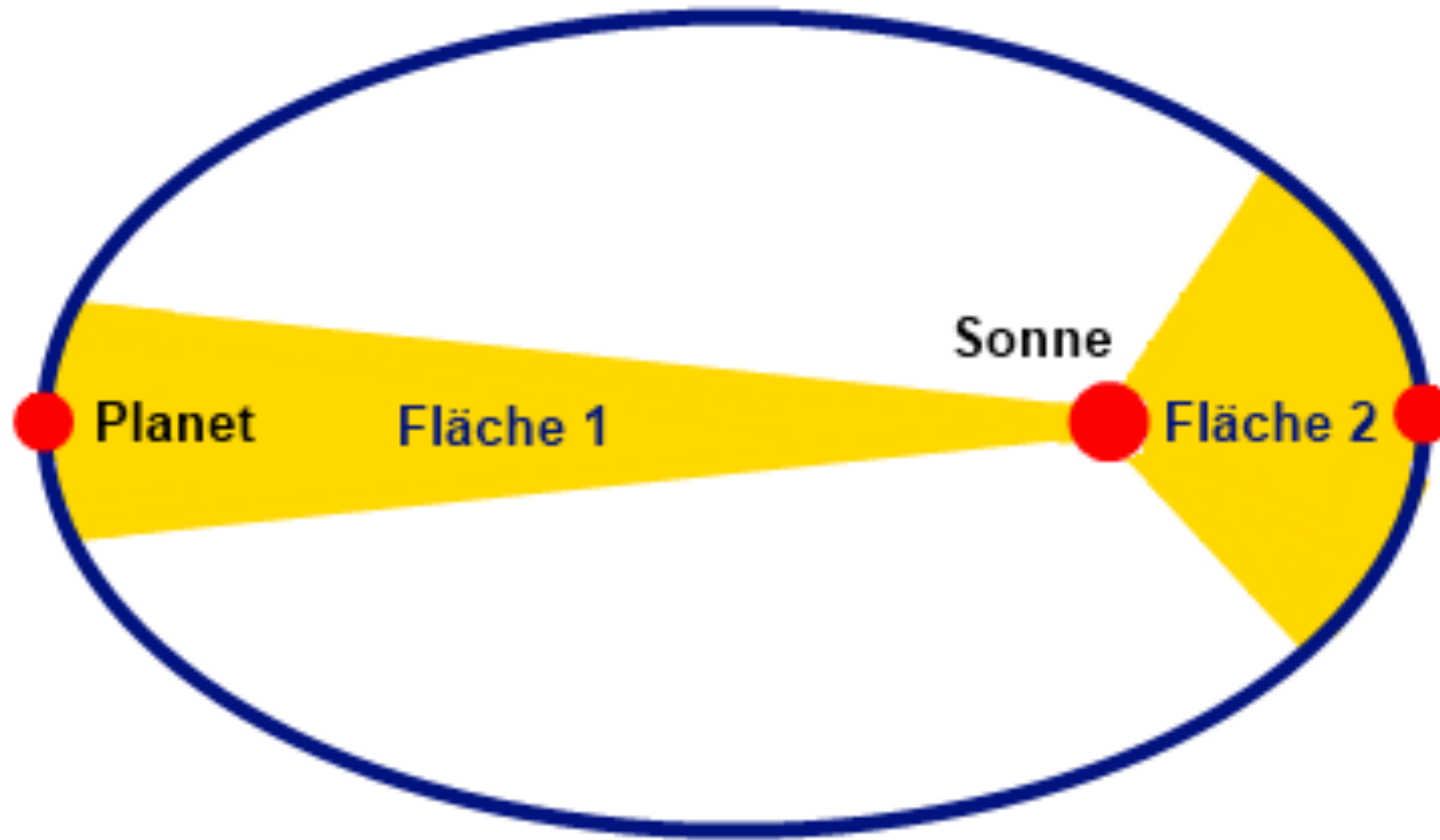
Kepler (1571-1630)

1. Keplersches Gesetz: Form der Planetenbahnen



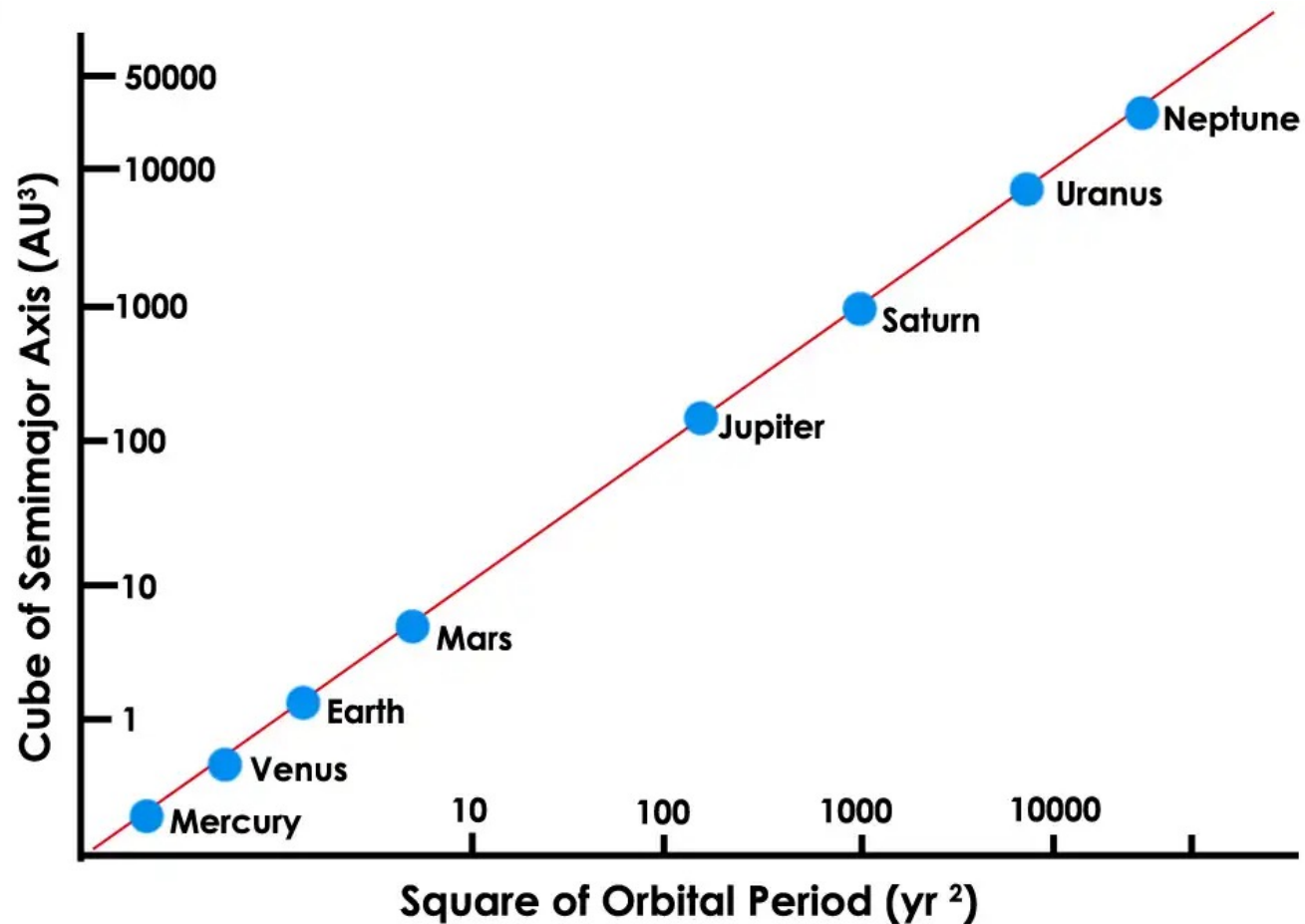
Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Keplersches Gesetz: Fläche der Planetenbahnen



Der Fahrstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

3. Keplersches Gesetz: Umlaufzeiten der Planeten



Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie Kuben der großen Halbachsen.

Setting der weiteren Betrachtungen

- Ziel: Herleitung dieser drei Gesetze aus den Newtonschen Bewegungsgleichungen.
- Wir behandeln zuerst das allgemeine Problem: Bewegung eines Teilchens in Zentralkraftfeld.
- Wir konkretisieren die dort gefundenen Lösungen später für das Gravitationsgesetz.
- Annahmen:
 1. Zweikörperproblem
 2. Planetenmasse sehr viel kleiner als Sonnenmasse $m \ll M$
 3. Große Masse befindet sich in Ruhe

■ Bewegungsgleichung zur Beschreibung der Planetenbewegung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad \text{mit} \quad \mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

■ Wir betrachten zunächst **allgemein eine Zentralkraft** ohne auf das konkrete Potential einzugehen mit den folgenden Eigenschaften

$$\mathbf{F} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \rightarrow \quad V(r) = - \int_{r_0}^r f(r') dr'$$

1. konservative Zentralkraft
2. Energie- und Drehimpulserhaltung
3. Bewegung in einer Ebene

■ Beschreibe Problem in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r \cos \phi \mathbf{e}_x + r \sin \phi \mathbf{e}_y = r \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_r &= \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\phi &= -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

■ Energieerhaltung: $\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r) = E$

■ Drehimpulserhaltung: $L = mr^2\dot{\phi} \rightarrow \dot{\phi} = \frac{L}{mr^2}$

■ Kombination: $\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}\right) + V(r) = E$

The diagram illustrates the combination of radial and rotational energy into the total energy equation. A light gray rounded rectangle contains the equation $\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E$. Three arrows point from labels below to terms in the equation: 'Radialenergie' points to $\frac{m}{2}\dot{r}^2$, 'Rotationsenergie' points to $\frac{L^2}{2mr^2}$, and 'potentielle Energie' points to $V(r)$.

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E$$

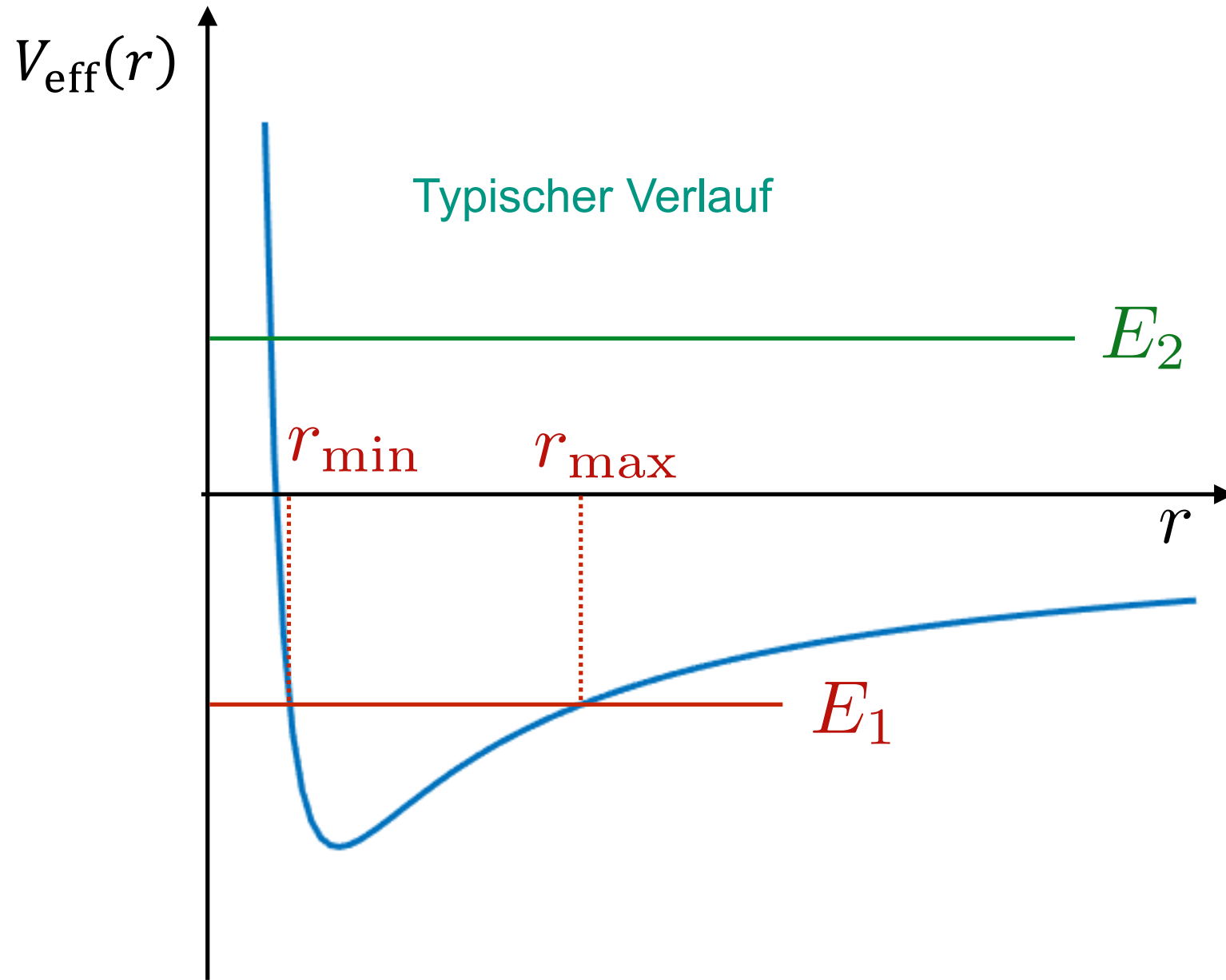
Radialenergie Rotationsenergie potentielle Energie

■ Effektives Potential: $V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$

■ Betrachtungen können zurückgeführt werden auf eine 1D lineare Bewegung

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = E \quad \rightarrow \quad \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - V_{\text{eff}}(r)]}$$

■ Bewegung ist nur möglich in Raumgebieten, in denen das **effektive Potential kleiner ist als die Energie**.



z.B. Gravitationspotential

Kleine Radien: $\propto \frac{1}{r^2}$

Große Radien: $\propto -\frac{1}{r}$

Charakteristische Fälle

a) ■ Energie: $E_1 \rightarrow r_{\min} < r < r_{\max}$

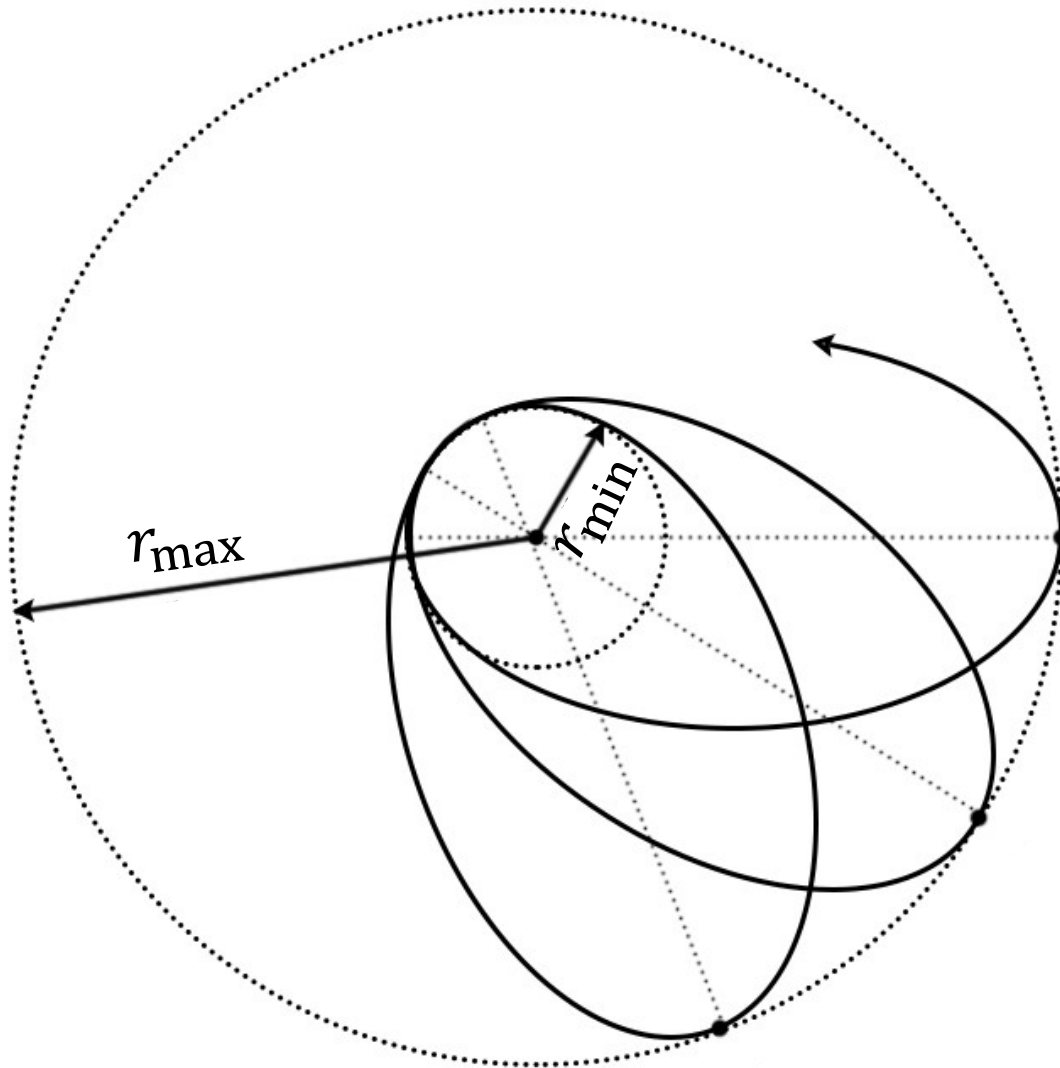
■ Teilchen beschreibt periodische Bewegung zwischen beiden Abständen.

Forderung : $V_{\text{eff}}(r) < E$ für $V_{\text{eff}}(r) = E \rightarrow \dot{r} = 0$

■ Definition des Umkehrpunkt an dem Teilchengeschwindigkeit verschwindet.

■ Das Teilchen wird zwischen diesen beiden Abständen oszillieren.

Rosettenbahnen



- Im Allgemeinen gibt es keine geschlossene Bahnkurve.
- Die Bewegung erfolgt auf einer Rosette.
- Geschlossene Bahnkurven nur für den Spezialfall, dass das Potential $\propto \frac{1}{r}$ oder $\propto r^2$ ist .
- Dann beschreibt die Bahnkurve eine Ellipsen.

Charakteristische Fälle

- b) ■ Energie E_2 größer als das Potential im unendlichen: $E \geq V_{\text{eff}}(\infty)$
- Teilchen bewegt sich im Raumgebiet $r_{\text{min}} < r$.
- Bewegung aus dem Unendlichen führt zu Umkehr am Umkehrpunkt $[E = V_{\text{eff}}(r_{\text{min}})]$ und einer Bewegung zurück ins Unendliche.
- Am Umkehrpunkt ändert sich das Vorzeichen der Geschwindigkeit.

$$E = V_{\text{eff}}(\infty)$$

Bewegung ist eine **Parabel**

$$E > V_{\text{eff}}(\infty)$$

Bewegung ist eine **Hyperbel**

Lösung der Bewegungsgleichung

- Separation der Variablen der Bewegungsgleichung führt zu folgender Gleichung

$$t = \int \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V_{\text{eff}}(r')]}} + \text{constant}$$

- Üblicher Weg der Lösung: $t(r) \rightarrow r(t) \rightarrow \phi(t)$


aus Drehimpulserhaltung

- Hier: berechnen explizit $\phi(r)$ um dann $r(\phi)$ auszurechnen

Lösung der Bewegungsgleichung

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \frac{L}{mr^2}$$

$$\frac{dr}{d\phi} = \dot{r} \frac{mr^2}{L} = \frac{mr^2}{L} \sqrt{\frac{2}{m} [E - V_{\text{eff}}(r)]}$$

■ Trennung der Variablen:

$$d\phi = \frac{L}{m} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{m} [E - V_{\text{eff}}(r)]}}$$

Lösung der Bewegungsgleichung

$$\phi = \frac{L}{m} \int \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{2}{m} [E - V_{\text{eff}}(r')]}}$$

- Für gegebenes Potential $V(r)$ liefert uns die Lösung dieser Gleichung $\phi(r)$. Wir haben so die Bahnkurve berechnet.
- Diese Gleichung kann invertiert werden, um die Bahnkurve $r(\phi)$ zu definieren. Zusammen mit der obigen Lösung von $t(r)$ bzw. $r(t)$ ist dann auch $\phi(t)$ bestimmt.

Diskussion

- Die Rolle des Drehimpuls ist wichtig. $\frac{L^2}{2mr^2}$ im effektiven Potential, für $L \neq 0$, ist entscheiden dafür, dass der Massepunkt nicht ins Zentrum des Kraftfeldes gelangt.
- Dieser Term wird häufig als Zentrifugalenergie bezeichnet.
- Das Teilchen fällt ins Zentrum der Zentralkraft, wenn das radiale Potential für kleine Radien genügend schnell gegen $-\infty$ divergiert.

Welche Divergenz ist akzeptabel?

- Betrachten Bahnkurve eines Teilchens, welche dem Koordinatenursprung entgegenstrebt $r \rightarrow 0$.
- Quadrat der Geschwindigkeit muss positiv bleiben

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} [E - V(r)] - \frac{L^2}{m^2 r^2} > 0 \quad \rightarrow \quad r^2 V(r) + \frac{L^2}{2m} < E r^2$$

- r kann nur dann 0 werden wenn die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$r^2 V(r) \Big|_{r \rightarrow 0} \leq -\frac{L^2}{2m}$$

- Teilchen fällt nicht ins Zentrum wenn: $V(r) = -\frac{\alpha}{r^n} \quad \rightarrow \quad n < 2$

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^2} \quad \rightarrow \quad \alpha \geq \frac{L^2}{2m}$$

Planetenbewegung

- Betrachte jetzt explizit das Gravitationsfeld:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -mg \frac{R^2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

- Ähnliche bei einem Coulombkraftfeld:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \pm \frac{Ze^2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

- Zugehöriges Potential:

$$V(r) = -G \frac{mM}{r}$$

- Effektives Potential:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - G \frac{mM}{r}$$

- Bewegungsgleichung

(aus Energie- und Impulserhaltung)

$$\frac{m}{2} \dot{r}^2 - G \frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = E$$

Beginnen mit allgemeiner Diskussion der Bewegung ohne Lösung der Bewegungsgleichung

■ Potentialminimum:
$$\frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr} = 0 \rightarrow \frac{L^2}{mr_0^3} = G \frac{mM}{r_0^2}$$

$$r_0 \equiv k = \frac{L^2}{Gm^2M} \rightarrow V_{\text{eff}}(k) = -\frac{G^2m^3M^2}{2L^2} = -\frac{GmM}{2k}$$

- Position des Potentialminimum ist proportional zum Quadrat des Drehimpulses.
- Bei diesem Abstand besitzt das Teilchen die größte Radialgeschwindigkeit.
- Weitere Diskussion verlangt Fallunterscheidung bezüglich der Energie.

a) $V_{\text{eff}}(k) \leq E < 0$ Diese Forderung ist identisch zu $-1 \leq \frac{2Ek}{GmM} < 0$

Das Teilchen führt eine periodische Bewegung in radialer Richtung zwischen noch **zu bestimmenden Umkehrpunkten** durch.

Spezialfall: $V_{\text{eff}}(k) = E \rightarrow \dot{r} = 0$

→ minimal mögliche Energie, das Teilchen wird dann eine Kreisbewegung vollziehen

b) $0 \leq E$ minimal mögliche Energie für eine Bewegung

Teilchen führt die früher besprochene Bewegung aus (Hyperbel oder Parabel)

Umkehrpunkte

■ Per Definition:

$$V_{\text{eff}}(r_{\text{ex}}) = E$$

$$V_{\text{eff}}(r_{\text{ex}}) = \frac{L^2}{2mr_{\text{ex}}^2} - G \frac{mM}{r_{\text{ex}}} = E$$

$$\rightarrow \frac{1}{r_{\text{ex}}^2} - 2G \frac{m^2 M}{L^2} \frac{1}{r_{\text{ex}}} - \frac{2m}{L^2} E = 0$$

$$\text{mit } k = \frac{L^2}{Gm^2 M} \rightarrow \frac{2m}{L^2} = \frac{2}{kGmM}$$

$$\text{ergibt sich: } \frac{1}{r_{\text{ex}}^2} - \frac{2}{k} \frac{1}{r_{\text{ex}}} - \frac{1}{k^2} \frac{2Ek}{GmM} = 0$$

- Lösung für Umkehrpunkte:

$$\frac{1}{r_{\text{ex}}} = \frac{1}{k} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2Ek}{GmM}} \right] = \frac{1}{k} (1 \pm \epsilon)$$

- Die Exzentrizität ϵ ist definiert als
(Bedeutung des Wortes wird später klar)

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ek}{GmM}}$$

- explizite Koordinaten für Umkehrpunkte: $\frac{1}{r_{\text{min}}} = \frac{1}{k} (1 + \epsilon)$ und $\frac{1}{r_{\text{max}}} = \frac{1}{k} (1 - \epsilon)$

$$r_{\text{min}} = \frac{r_0}{1 + \epsilon}$$

und

$$r_{\text{max}} = \frac{r_0}{1 - \epsilon}$$

- Spezialfall: $\epsilon = 0$ wird erreicht bei $E = -\frac{GmM}{2k}$
- Die Energie entspricht dann gerade der minimalen Energie, welche dem Minimum des effektiven Potentials entspricht.
- Wir hatten bereits diskutiert, dass die Bewegung des Teilchens dann eine Kreisbahn ist. Dies wird reflektiert durch die Tatsache, dass die Umkehrpunkte zusammenfallen.
- Begrenzte periodische Bewegung: $0 < \epsilon < 1$
- Umkehrpunkt im Unendlichen: $\epsilon = 1$
- Unbegrenzte Bewegung: $\epsilon \geq 1$

Lösen der Bewegungsgleichung

- Prinzipiell müssen wir folgende Gleichung lösen:

$$\phi = \frac{L}{m} \int \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{2}{m} [E - V_{\text{eff}}(r')]}}$$

- Lösung dieser Gleichung allgemein kompliziert und für das spezifische Problem nicht ganz günstig.
- Alternativer Weg mit Einführung des **reziproken Abstandes** s :

$$s = \frac{1}{r} \text{ für diesen lösen wir dann } s(\phi) \text{ und dann } r(\phi)$$

- Ausnutzung von Drehimpulserhaltung: $L = mr^2\dot{\phi}$

$$\frac{ds}{d\phi} = s' = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{d\phi} = \frac{ds}{dt} \frac{1}{\dot{\phi}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{mr^2}{L}$$

$$= -\frac{1}{r^2} \dot{r} \frac{mr^2}{L} = -\frac{m}{L} \dot{r}$$

$$\rightarrow \dot{r} = -\frac{L}{m} s'$$

- Einsetzen in den Energiesatz: $\frac{m}{2} \dot{r}^2 - G \frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = E$

■ Ergibt dann:
$$\frac{L^2}{2m} (s'^2 + s^2) - GmMs = E$$

$$s'^2 + s^2 - 2 \frac{Gm^2 M}{L^2} s = \frac{2mE}{L^2}$$

$$s'^2 + s^2 - \frac{2}{k} s = \frac{2mE}{L^2}$$

■ Diese Gleichung differenzieren wir ein weiteres Mal nach ϕ und erhalten:

$$s''s' + ss' - \frac{1}{k}s' = 0 \quad \rightarrow \quad s'' + s - \frac{1}{k} = 0$$

Finale Bewegungsgleichung eines Teilchens im Gravitationsfeld.

Im letzten Schritt haben wir streng genommen s' ausgeklammert haben, so dass $s' = 0$ ebenfalls eine Lösung der Ursprungsdifferentialgleichung ist.

Diese Lösung brauchen wir aber nicht weiter zu berücksichtigen, da sie in der im Folgenden dokumentierten inhomogenen Lösung enthalten ist.

- Die Lösung setzt sich zusammen aus der Lösung der homogenen und der inhomogenen Differentialgleichung:

$$s(\phi) = s_{\text{homogen}}(\phi) + s_{\text{inhomogen}}(\phi)$$

- Lösung der homogenen Gleichung: $s_{\text{homogen}}(\phi) = A \sin \phi + B \cos \phi$

- Lösung der inhomogenen Gleichung: $s_{\text{inhomogen}}(\phi) = \frac{1}{k}$

- Gesamtlösung:

$$s(\phi) = A \sin \phi + B \cos \phi + \frac{1}{k}$$

Bestimmung der Integrationskonstanten

- Für abschließende Lösung: Bestimmung der Integrationskonstanten A und B
- **Festlegung:** $\phi = 0$ entspricht dem sonnennächsten Punkt $r_{\min} \rightarrow s_{\max}$
- Dort verschwindet die Änderung des inversen Abstandes als Funktion des Winkels bzw. die Geschwindigkeit ändert ihr Vorzeichen
(gilt für periodische Bewegung des Teilchens und für Bewegung aus dem Unendlichen)

$$\rightarrow s'(0) \equiv 0 = A$$

- Zweite Integrationskonstante: aus der Definition des Mindestabstandes

$$s(\phi = 0) \equiv \frac{1}{r_{\min}} = \frac{1 + \epsilon}{k} = \frac{1}{k} + B \rightarrow B = \frac{\epsilon}{k}$$

Endgleichung der Bewegung

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k} (1 + \epsilon \cos \phi)$$

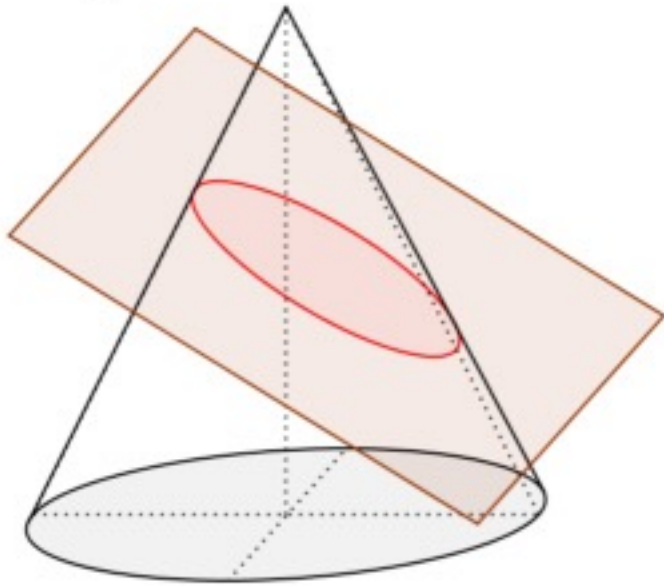
bzw.

$$r = \frac{k}{1 + \epsilon \cos \phi}$$

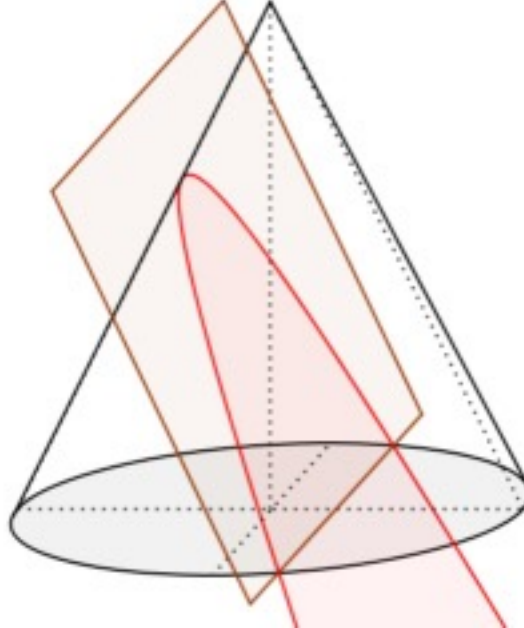
$$\text{mit } \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ek}{GmM}} \quad \text{und} \quad k = \frac{L^2}{Gm^2M}$$

- Dies ist die Gleichung für einen Kegelschnitt in ebenen Polarkoordinaten.
- Die Energie ist definiert über die Exzentrizität der Bahnform.
- Der Drehimpuls definiert den Ort größter Geschwindigkeit ($\phi = \pi/2$)

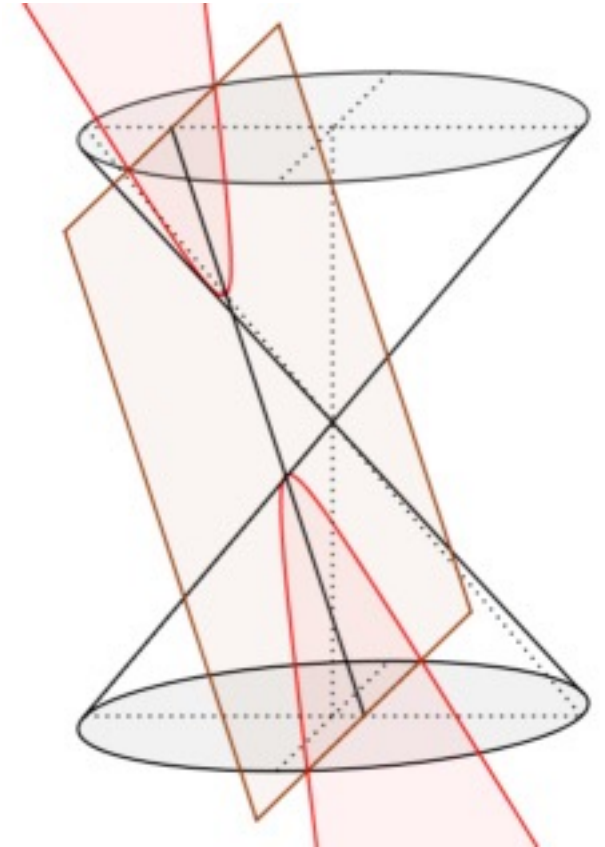
Diskussion der Bahnformen



Ellipse



Parabel



Hyperbel

Diskussion der Bahnformen

a) $\epsilon = 0 \rightarrow$ die Bahnform ist ein Kreis, stellt sich ein bei $E = -\frac{GmM}{2k} = -\frac{G^2 m^3 M}{2L^2}$

b) $0 < \epsilon < 1 \rightarrow$ die Bahnform ist eine Ellipse, stellt sich ein bei $-\frac{GmM}{2k} < E < 0$

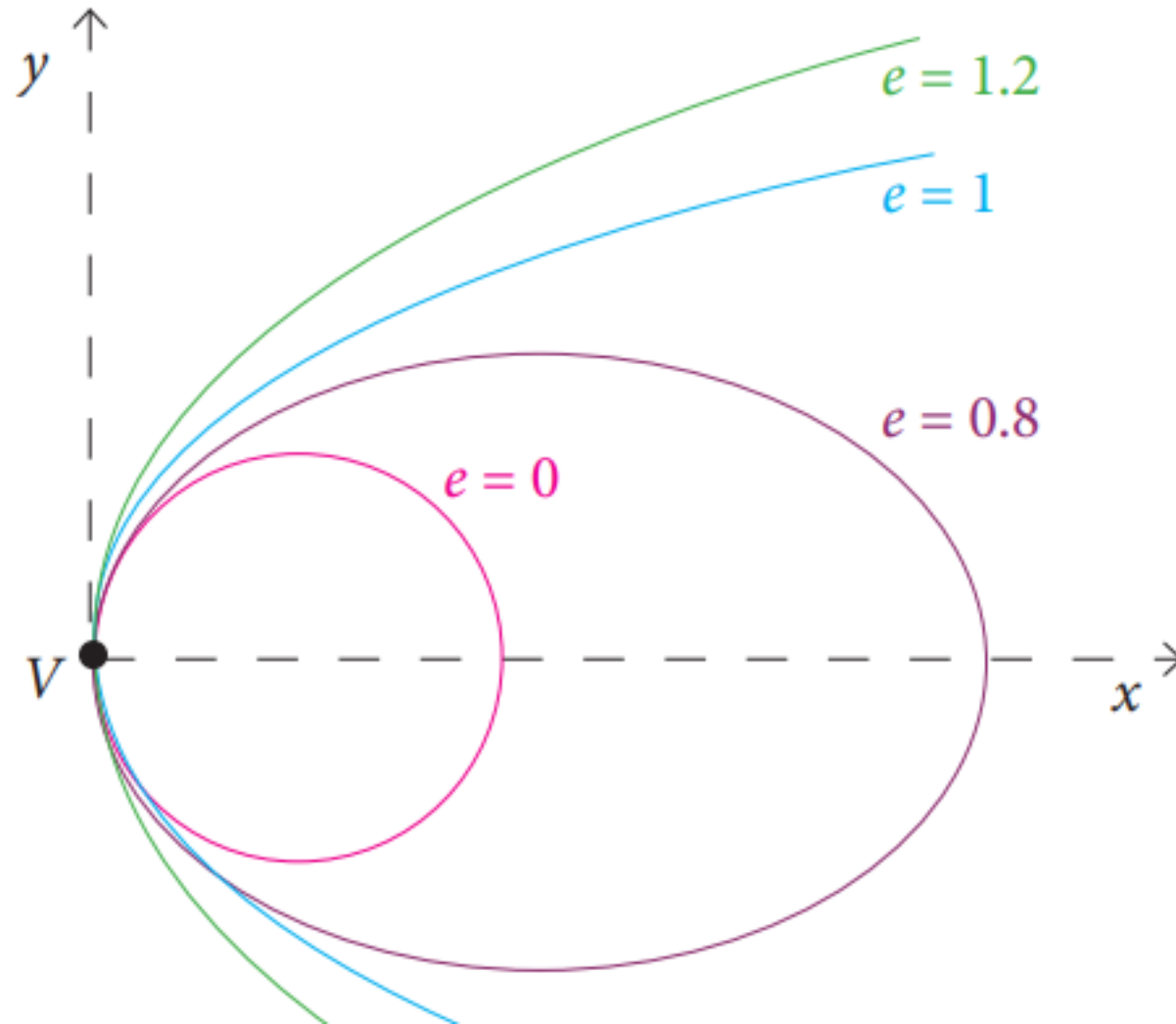
1. Keplersches Gesetz

c) $\epsilon = 1 \rightarrow$ die Bahnform ist eine Parabel, stellt sich ein bei $E = 0$

d) $1 < \epsilon \rightarrow$ die Bahnform ist eine Hyperbel, stellt sich ein bei $0 < E$

Problem der Planetenbewegung gelöst!

Diskussion der Bahnformen



Explizite Zeitabhängigkeit

- Unter Umständen möchte man explizit die Zeitabhängigkeit berechnen. Dazu nehmen wir die Gleichung

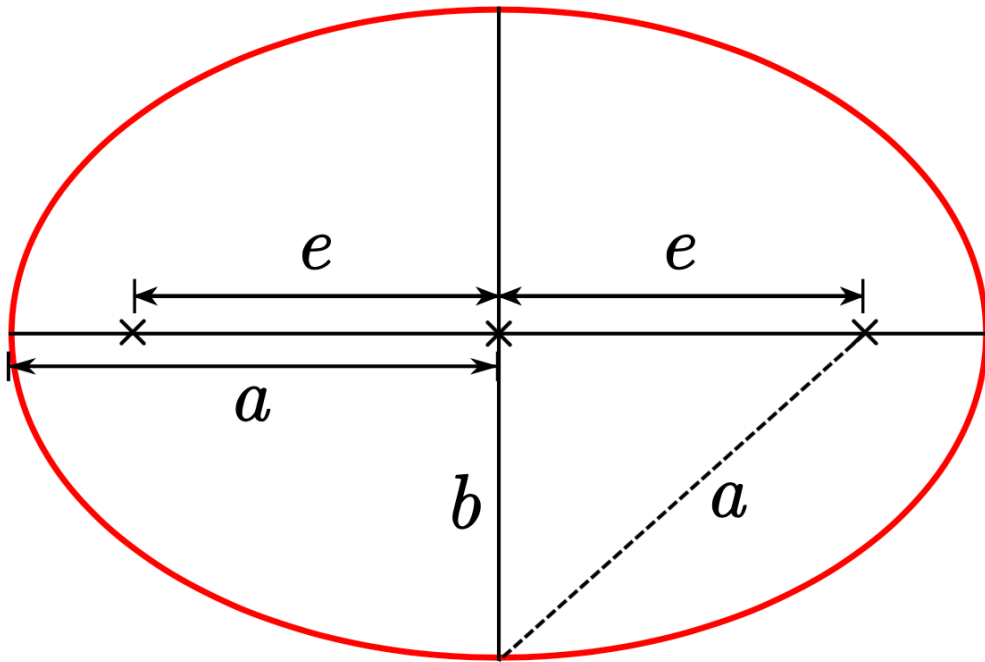
$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{mr^2(\phi)}$$
$$\rightarrow t(\phi) = \frac{m}{L} \int r^2(\phi') d\phi' + \text{constant}$$

- Nach Lösen dieser Gleichung haben wir $t(\phi)$. Die Umkehrfunktion liefert dann $\phi(t)$.
- Diesen Ausdruck können wir dann in $r(\phi)$ einsetzen und wir erhalten einen explizite Zusammenhang für $r(t)$.

Diskussion der Bewegungsform:

a) Ellipse

- Ellipse: geometrischer Ort aller Punkte, für die die Summe der Abstände von zwei Brennpunkten konstant ($= 2a$) ist.
- Schwere Masse die Gravitationsfeld erzeugt: befindet sich in einem der Brennpunkte.



- Ellipse: $b^2 = a^2 - e^2$

- Sonnennächster Punkt:

$$r_{\min} = r(\phi = 0) = a - e = \frac{k}{1 + \epsilon}$$

- Sonnenfernster Punkt:

$$r_{\max} = r(\phi = \pi) = a + e = \frac{k}{1 - \epsilon}$$

- Wir können k in beiden Gleichungen isolieren und erhalten so einen Ausdruck für die Exzentrizität als Funktion der Größe der Ellipse:

$$\epsilon = \frac{e}{a}$$

- Für einige der genannten Größen der Ellipse erhalten wir die folgenden Ausdrücke:

$$r_{\min} = a - e = a(1 - \epsilon)$$

$$b^2 = a^2 - e^2 = a^2(1 - \epsilon)(1 + \epsilon) = a(1 + \epsilon)r_{\min} = ak$$

- Verhältnis der Halbachsen: $\frac{b^2}{a} = (1 + \epsilon)r_{\min} \rightarrow \frac{b^2}{a} = \frac{L^2}{Gm^2M}$

- Unser Ziel ist es, die **Halbachsen als Funktion von Energie und Drehimpuls auszudrücken**. Wir betrachten dafür den Energiesatz bei $\phi = 0$

- Wir betrachten als erstes: $\dot{r}(\phi = 0) = \dot{r}_{\min} = -\frac{L}{m}s'(\phi = 0) = 0$

$r_{\min}$ ist gerade ein Umkehrpunkt

- Energiesatz: $E = \frac{m}{2}\dot{r}_{\min}^2 - \frac{GmM}{r_{\min}} + \frac{L^2}{2mr_{\min}^2} = GmM \left(\frac{k}{2r_{\min}^2} - \frac{1}{r_{\min}} \right)$ mit $k = \frac{L^2}{Gm^2M}$

- Mit $a^2 - e^2 = ak$ erhalten wir (nach einigem Umformen): $E = -\frac{GmM}{2a}$

- Zusammen mit $\frac{b^2}{a} = \frac{L^2}{Gm^2M}$ erhalten wir dann für die große und kleine Halbachse als Funktion der Energie und des Drehimpulses:

$$a = -\frac{GmM}{2E} \quad \text{und} \quad b = \frac{|L|}{\sqrt{2mE}}$$

- Die große Halbachse ist durch die Energie festgelegt, die kleine Halbachse durch Energie und Drehimpuls.
- Zum Schluss berechnen wir die Umlaufzeiten und setzen diese ins Verhältnis mit den Längen der Halbachsen.

- Beginnen hier mit dem Flächensatz:

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{1}{2m} \mathbf{L} \rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{1}{2m} L$$

- Separation der Variablen und integriert über die gesamte Fläche einer Ellipse ($A = \pi ab$) ergibt mit T als der Umlaufzeit

$$f = \pi ab = \frac{LT}{2m} \rightarrow T = \frac{2\pi mab}{L}$$

$$\rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \left(\frac{2\pi mb}{L} \right)^2 \frac{1}{a} = \left(\frac{2\pi m}{L} \right)^2 \frac{L^2}{Gm^2 M} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{constant}$$

- Hier sehen wir das dritte Keplersche Gesetz:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constant}$$

Praktische Konsequenzen: Kosmische Geschwindigkeiten

- Die kosmischen Geschwindigkeiten sind in der Raumfahrt von großer Bedeutung.
- Es gibt zwei davon:
 - (a) Mindestgeschwindigkeit einer Rakete die diese tangential zur Erde besitzen muss, um auf eine kreisförmige Umlaufbahn geschickt zu werden.
 - (b) Mindestgeschwindigkeit einer Rakete die diese tangential zur Erde besitzen muss, um das Schwerefeld der Erde vollständig zu verlassen.

In den folgenden Gleichungen ist M nicht mehr die Masse der Sonne sondern die der Erde.
 m ist entsprechend die Masse der Rakete bzw. des Satelliten.

- Ein Teilchen kann alle Punkte erreichen, in denen das effektive Potential kleiner ist als die gesamte Energie:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - G \frac{mM}{r} < E$$

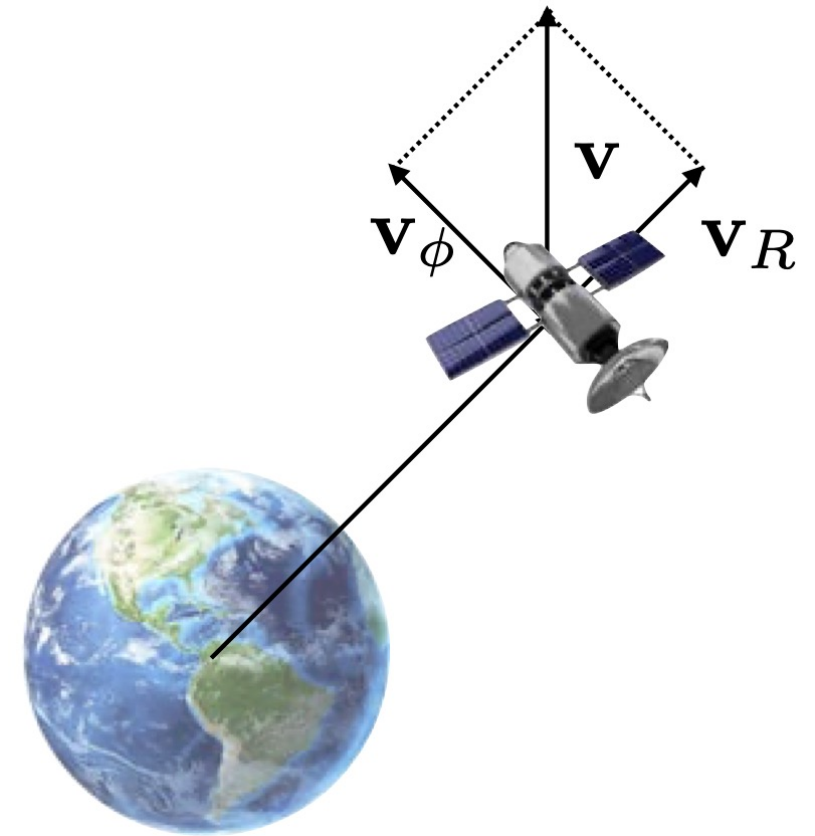
- Erinnerung: Drehimpuls hat abstoßende Wirkung, die dominant wird für kleine Radien. Ohne Drehimpuls wäre jeder Versuch eine Rakete zu starten sinnlos, da sie direkt zum Massepunkt gezogen würde.
- Der notwendige Drehimpuls ist abhängig von der Entfernung R zwischen der Erde und dem Satelliten.
- Je weiter weg der Startpunkt ist, desto geringer der notwendige Drehimpuls.

- Welche Anfangsgeschwindigkeit ist nötig?
- Müssen Satelliten in das Raumgebiet bringen, in dem effektives Potential kleiner ist als die Energie.

$$R < r_{\min} = \frac{k}{1 + \epsilon} = \frac{L^2}{Gm^2M} \frac{1}{1 + \epsilon}$$

$$\rightarrow L^2 > Gm^2MR(1 + \epsilon)$$

mit R hier der Erdradius, von wo aus der Satellit starten soll.



- Zur Berechnung der Tangentialgeschwindigkeit benutzen wir den Drehimpulserhaltungssatz:

$$L^2 = m^2 R^4 \dot{\phi}^2 = m^2 R^2 v_{\phi}^2 \rightarrow v_{\phi}^2 > (1 + \epsilon) \frac{GM}{R}$$

- Zwei mögliche Betrachtungen:
 - (a) Für $E < 0$ führt Satellit periodische Bewegung durch: erste kosmische Geschwindigkeit
 - (b) Für $E = 0$ fliegt Satellit entlang einer Parabel, auf der er das Schwerfeld der Erde verlassen wird: zweite kosmische Geschwindigkeit.

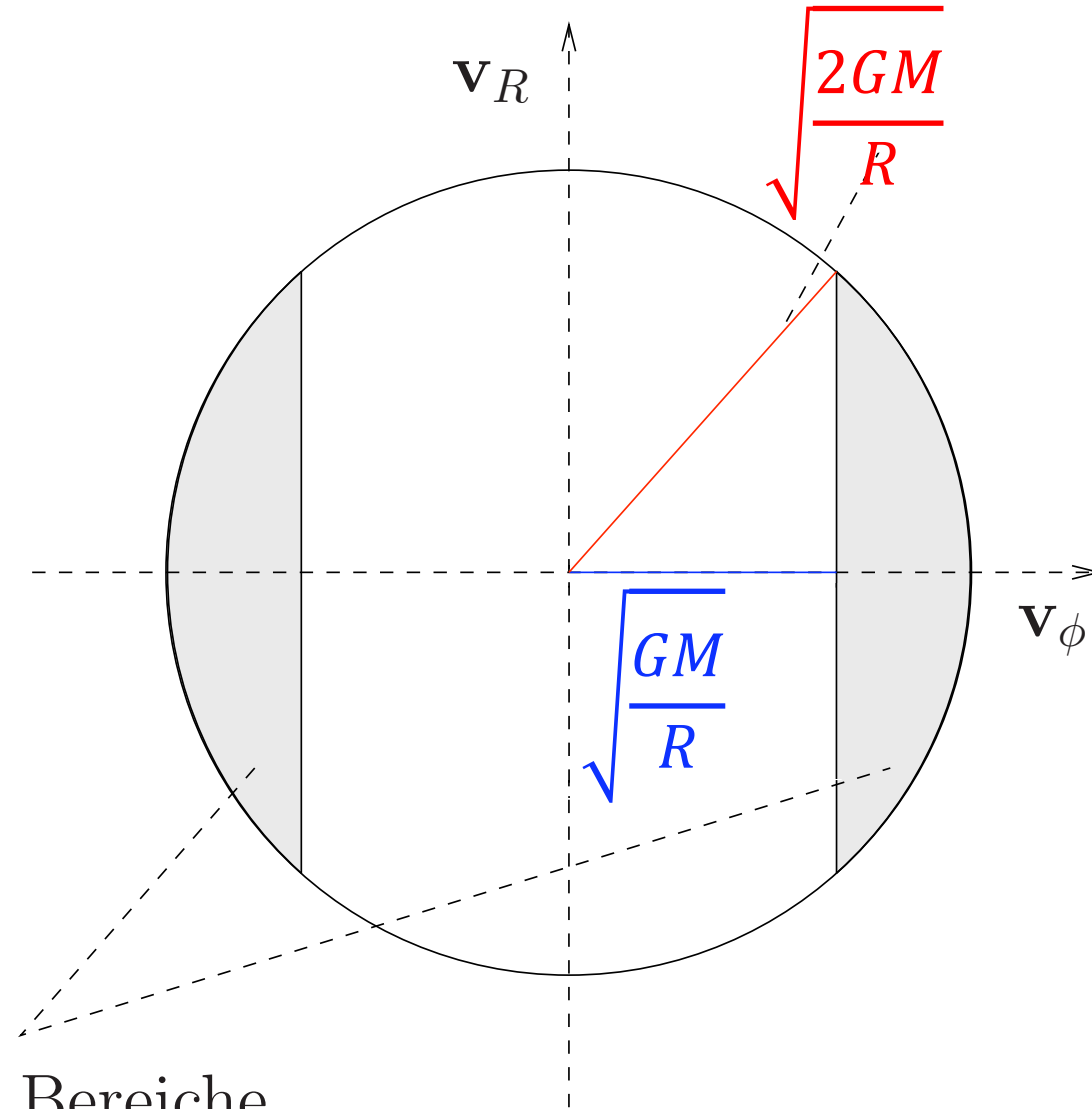
■ In jedem Fall $E \leq 0$: $E = \frac{m}{2} v^2 - G \frac{mM}{R} \leq 0 \rightarrow v^2 = v_r^2 + v_\phi^2 \leq \frac{2GM}{R}$

- Für die erste kosmische Geschwindigkeit soll wenigstens eine stabile Umlaufbahn in Form einer Kreisbahn erreicht werden ($\epsilon = 0$).

$$v_\phi^2 > (1 + \epsilon) \frac{GM}{R} \rightarrow v_1 > \sqrt{\frac{GM}{R}} \rightarrow v_1^{\text{Erde}} = 7.9 \text{ km/s}$$

- Für die zweite kosmische Geschwindigkeit soll eine Parabel erreicht werden ($\epsilon = 1$).

$$v_\phi^2 > (1 + \epsilon) \frac{GM}{R} \rightarrow v_2 > \sqrt{\frac{2GM}{R}} \rightarrow v_2^{\text{Erde}} = 11.2 \text{ km/s}$$



erlaubte Bereiche

Jupyter Notebook

- In diesem Beispiel werden wir das Zweikörperproblem numerisch studieren.

Bewegungsgleichung als Zwei-Körper Problem

Erinnerung:

■ Schwerpunktkoordinate: $\mathbf{r}_S = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$

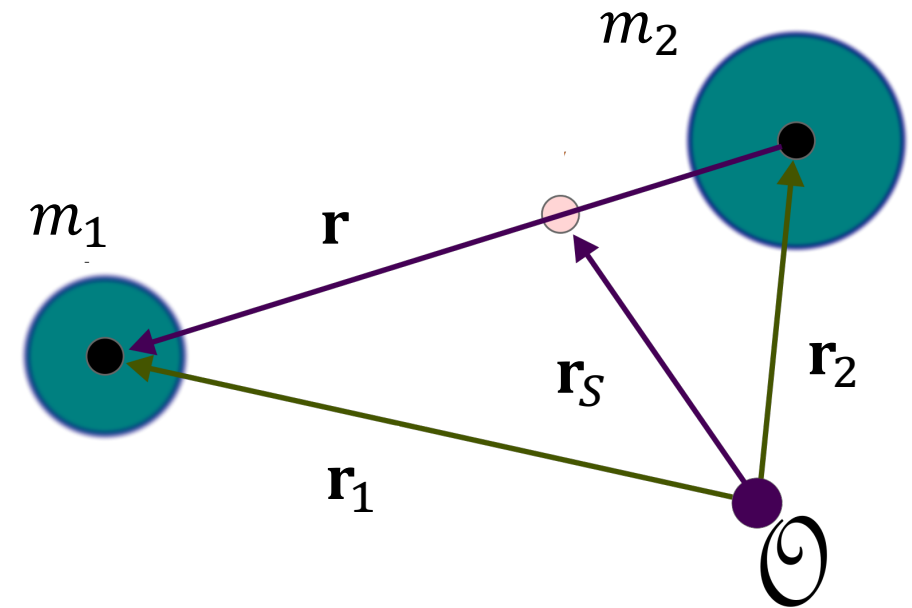
■ Relativkoordinate: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$

■ Gesamtmasse: $M = m_1 + m_2$

■ Reduzierte Masse: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

■ Geschwindigkeiten: $\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_S + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}$ und $\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_S - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}$

■ Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_S^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2$



- Zwei-Körper-Problem: sechs Bewegungsgleichungen für sechs Freiheitsgrade. Dies sind Differentialgleichungen zweiter Ordnung → 12 Integrationskonstanten.
- Abgeschlossenes System: Energieerhaltung, Impulserhaltung und Drehimpulserhaltung
- 10 Konstanten dadurch fixiert: Energie, 6 Orts- und Geschwindigkeitskomponenten des Massenmittelpunkts und 3 Komponenten des Drehimpulses.
- restlichen 2 Konstanten können noch analytisch bestimmt werden
- Drei-Körperproblem: 8 zu bestimmende Konstanten → analytisch nicht möglich

- Bei Betrachtung der Wechselwirkung zweier Teilchen: nur innere Kräfte.
- Wir betrachten die Gravitationskraft, was eine Zentralkraft ist. Für die Bewegungsgleichung der Schwerpunktkoordinate gilt dann

$$M\ddot{\mathbf{r}}_S = 0$$

- Wählen ein Inertialsystem als Bezugssystem, in dem die Schwerpunktskoordinate den Ursprung bildet: $\mathbf{r}_S = 0$. Dann gilt $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$.

- Gravitationspotential:
$$V_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

- Gradient relativ zur ersten Koordinate:
$$\text{grad}_1 \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = -\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

- Gradient relativ zur zweiten Koordinate:
$$\text{grad}_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

- Kraft, welche die beiden Teichen gegenseitig aufeinander ausüben:

$$\mathbf{F}_{12} = -Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = -\mathbf{F}_{21}$$

- Bewegungsgleichung für die Relativkoordinate:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \frac{1}{m_1} m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} - G \frac{1}{m_2} m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\ &= -G \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -G \frac{1}{\mu} \mu (m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{r^3}\end{aligned}$$

■ Abschließende Bewegungsgleichung:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -G\mu(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

- Diese Gleichung beschreibt die Bewegung eines Massepunktes mit der Masse μ im Feld eines Zentralkörpers mit der Masse $m_1 + m_2$.
- Unter der Annahme, dass eine der Massen sehr viel größer ist als die andere, entspricht die reduzierte Masse gerade der Masse des leichteren Körpers und die Masse des Zentralkörpers ist gerade die Masse des schwereren Körpers.
- Lösungen: Kegelschnitte. Diesmal für die Relativkoordinate $\mathbf{r}$.

- Für die Absolutkoordinaten der beiden Teilchen ergeben sich wieder Kegelschnitte:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2} \mathbf{r} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2} \mathbf{r}$$

- Geometrisch ähnliche Bahnen, aber gewichtet mit den entsprechenden Massen.
- Es gilt: $\left| \frac{\mathbf{r}_1}{\mathbf{r}_2} \right| = \frac{m_2}{m_1}$. Für $m_2 \gg m_1$ folgt $|\mathbf{r}_2| \approx 0$. Schwere Masse verharrt im Schwerpunkt.

- Keplersche Gesetze: Bewegungen auf Ellipse, Flächengeschwindigkeit konstant

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

$$\rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)} a^3 = \frac{4\pi^2}{Gm_2(1+\frac{m_1}{m_2})} a^3$$

- Drittes Keplersches Gesetz: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_2(1+\frac{m_1}{m_2})}$

Wir haben hier im Verhältnis also eine kleine Korrektur, welche von der Masse des Planeten m_1 abhängt.