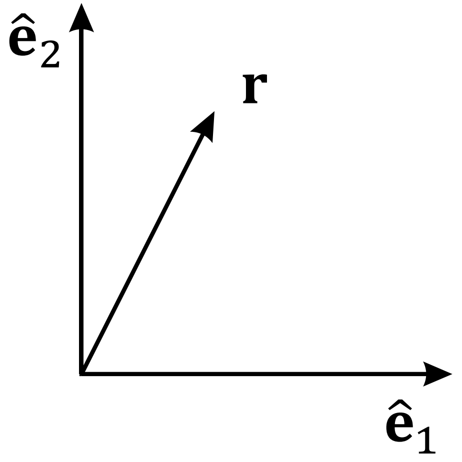
2.2.3 Rotierende Bezugssysteme und Scheinkräfte

- Beschleunigte Bezugssysteme sind keine Inertialsysteme!
- Als ein Beispiel betrachten wir im Folgenden rotierende Bezugssysteme. Diese sind besonders wichtig, da die Erde, und damit unser eigenes Bezugssystem, rotiert.
- Wir hatten schon festgestellt, dass die Newtonschen Gesetze in beschleunigten Systemen nicht gelten. Wir werden einen Weg zeigen, sie trotzdem anwenden zu können.
- Zu diesem Zweck bestimmen wir zunächst die Koordinatentransformation zwischen einem ruhenden und einem rotierenden System. Der Einfachheit halber legen wir die Rotationsachse in den gemeinsamen Ursprung der Koordinatensysteme.

- Das rotierende System bewege sich bzgl. des Inertialsystems mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, $\omega = \text{const}$.



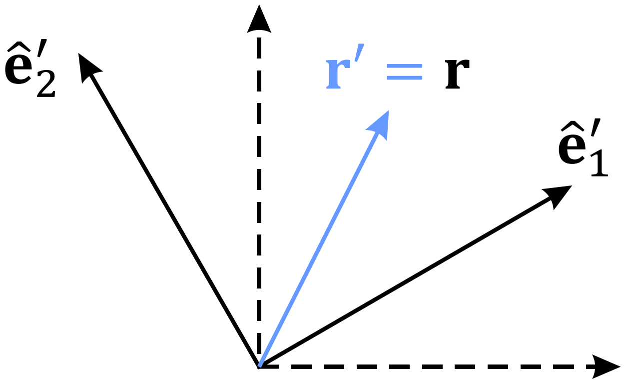
Inertialsystem

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \, \hat{\mathbf{e}}_i$$

Aus dem Inertialsystem gesehen, gilt

$$\hat{\mathbf{e}}_i' = \hat{\mathbf{e}}_i'(t)$$

(Der Vektor $\mathbf{r}$ hat auch eine Komponente in Richtung $\hat{\mathbf{e}}_3$)



Rotierendes System

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' = \sum_{i=1}^{3} x_i' \, \hat{\mathbf{e}}_i'$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \, \hat{\mathbf{e}}_3'$$

Ortsvektoren im rotierenden System haben andere Koeffizienten x_i als im Inertialsystem aber $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$.

Achtung: $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$ und $\mathbf{a} \neq \mathbf{a}'$!

- Es folgt für die zeitliche Ableitung von $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ im Inertialsystem

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\mathrm{d}x_i'}{\mathrm{d}t}\right)\hat{\mathbf{e}}_i' + \sum_{i=1}^{3} x_i' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_i'$$

- Die erste Summe ist die zeitliche Ableitung von $\mathbf{r}$ im rotierenden System ($\hat{\mathbf{e}}_i'$ hier ortsfest)

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{d}t}\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\mathrm{d}x_i'}{\mathrm{d}t}\right)\hat{\mathbf{e}}_i'$$

- Für die zweite Summe gilt mit der Relation aus Kap. 2.2.1.1 für rotierende Systeme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_i' = \boldsymbol{\omega}\times\hat{\mathbf{e}}_i' \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{3} x_i' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_i' = \sum_{i=1}^{3} x_i' \cdot \boldsymbol{\omega}\times\hat{\mathbf{e}}_i' = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

- Insgesamt erhalten wir so

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r} = \frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{d}t}\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

und somit

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

- Wir wenden dieses Ergebnis nun an auf das 2. Newtonsche Gesetz im Inertialsystem

$$F = m\,\mathbf{a} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}$$

Für die zeiliche Ableitung des Vektors $\mathbf{v}$ gilt dasselbe wie oben für $\mathbf{r}$, also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{d}t}\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

$$= \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

- Also ist die scheinbare Beschleunigung im rotierenden System ($\mathbf{r} = \mathbf{r}'$)

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - 2 \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

- Für die scheinbare Kraft $\mathbf{F}' = m\,\mathbf{a}'$ im rotierenden System erhalten wir somit

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{Coriolis}} + \mathbf{F}_{\text{Zentrifugal}}$$

mit den Scheinkräften

$$\mathbf{F}_{\text{Coriolis}} = -2 \cdot m\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

$$\mathbf{F}_{\text{Zentrifugal}} = -m\,\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

- Beispiel: Im Inertialsystem bewege sich ein Teilchen kräftefrei in der Ebene senkrecht zu $\boldsymbol{\omega}$, also $\mathbf{r}' \perp \boldsymbol{\omega}$. Dann folgt $\mathbf{v}' \perp \boldsymbol{\omega}$ und

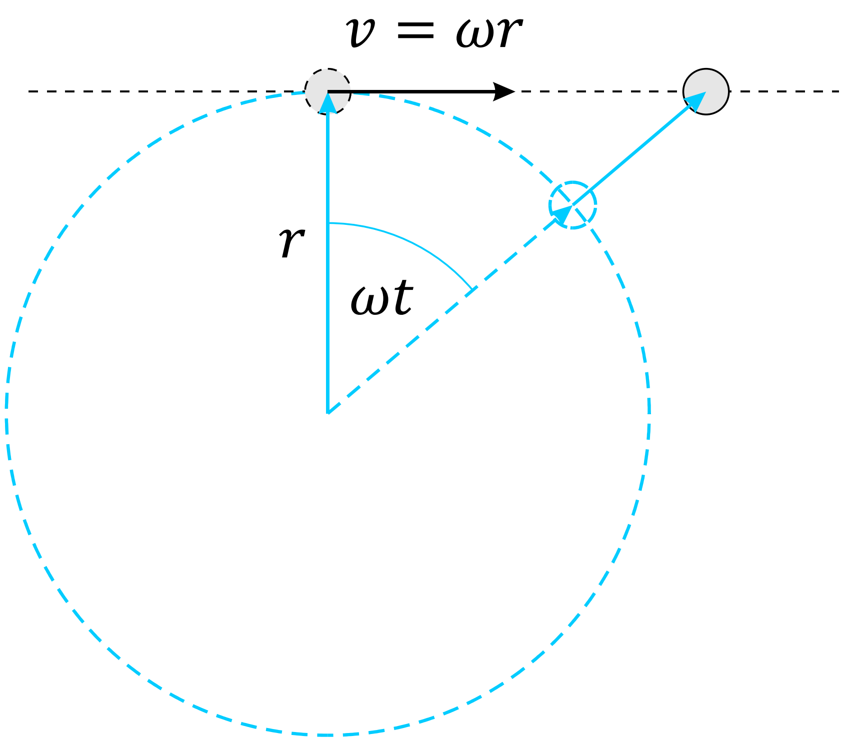
$$\mathbf{F}_{\text{Zentrifugal}} = -m\,\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}') = +\omega^2 r'\hat{\mathbf{r}}' \qquad \text{in radialer Richtung } \hat{\mathbf{r}}'$$

$$\mathbf{F}_{\text{Coriolis}} = -2\cdot m\,(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}') \quad = -2m\omega \mathrm{v}'\hat{\mathbf{v}}'_{\perp} \qquad \text{in Richtung } \hat{\mathbf{v}}'_{\perp} \text{ senkrecht zu } \mathbf{v}'$$

Für einen Beobachter im rotierenden System bewegt sich das Teilchen auf einer gekrümmten Bahn. Auf der Basis der Newtonschen Gesetze kann er die Bewegung mit Zentrifugal- und Corioliskraft vorhersagen.

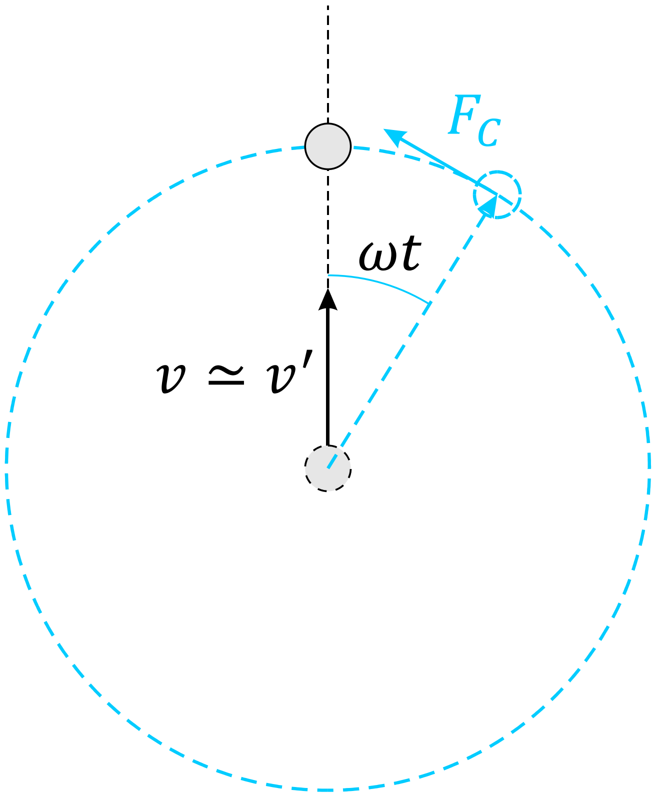
Nur Zentrifugalkraft

$(v' = 0)$



Nur Corioliskraft

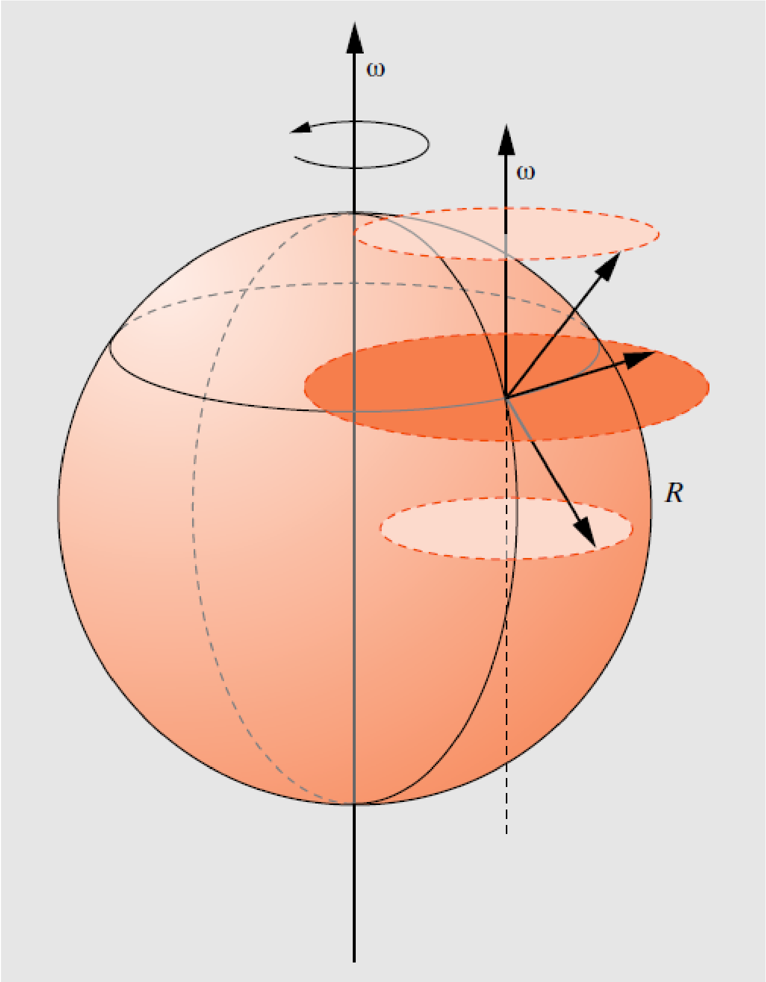
$(v' \simeq v \gg \omega r)$



- **Beispiel**: Bezugssystem Erde - in 3D sind die Scheinkräfte komplizierter.
  - Die Drehache fällt nur an den Polen mit der Senkrechten auf die Erdoberfläche zusammen.
  - Demzufolge haben Zentrifugal- und Corioliskraft mehrere Richtungskomponenten im Laborsystem, die breitengradabhängig sind.
  - Nutzen: Die Abhängigkeit wird verwendet, um den Aufenthaltsort (Breitengrad Θ) zu messen,

    → z.B. Foucaultsches Pendel (Foucault, 1851)

    Die Drehung der Pendelebene wird durch die Horizontalkomponente der Corioliskraft verursacht, $F_{\mathrm{C,horiz.}} \sim \omega \sin \Theta$.



Meschede-Gerthsen, Abb. 1.42