

3. Mechanik starrer ausgedehnter Körper

3.1. Trägheitsmoment und Trägheitstensor

Ein **ausgedehnter Körper** besteht aus sehr vielen Massepunkten (Atomen) mit Massen m_i , $i = 1, 2, \dots, N$.

Wir nennen ihn **starr** wenn die Massepunkte eine feste unveränderliche räumliche Beziehung zueinander haben.

Die **Gesamtmasse** M beträgt

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \rightarrow \int_V \rho(\mathbf{r}) dV = \int_V \rho(\mathbf{r}) dx dy dz; \quad [\rho] = \text{kg m}^{-3}$$

Im letzten Schritt haben wir die **Summe** in ein **Volumenintegral** über die **Massedichte** $\rho(\mathbf{r})$ überführt.

Dies ist näherungsweise gerechtfertigt, weil die Massepunkte (die Atome) extrem klein sind im Vergleich zur Gesamtgröße eines makroskopischen Körpers.

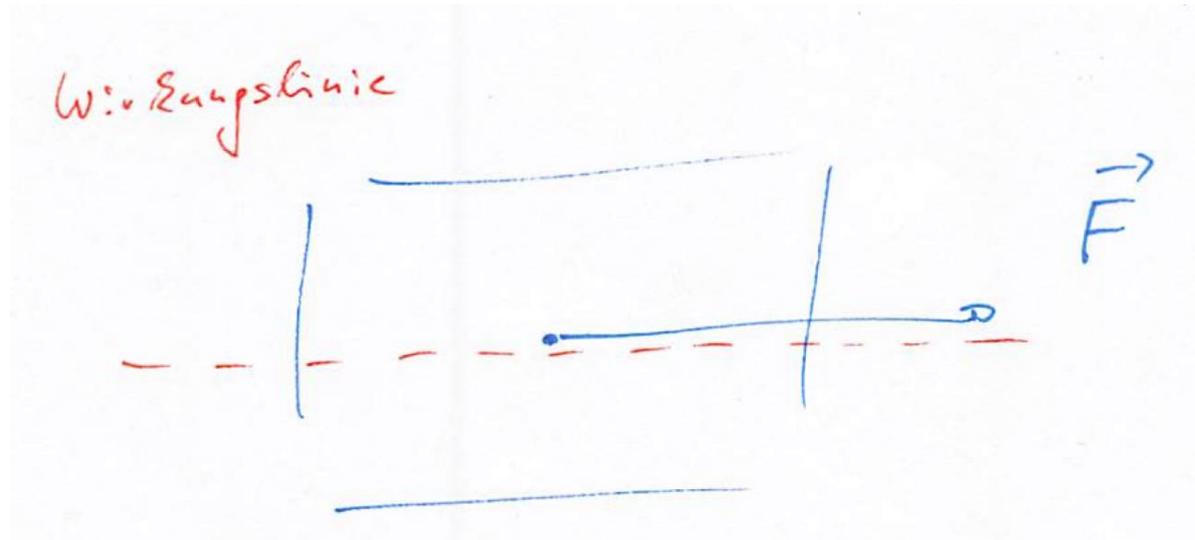
Der **Schwerpunkt** (siehe Kap. 2.1.4.) des starren Körpers resultiert aus der Summe bzw. dem Integral

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{M} \rightarrow \frac{\int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV}{M}$$

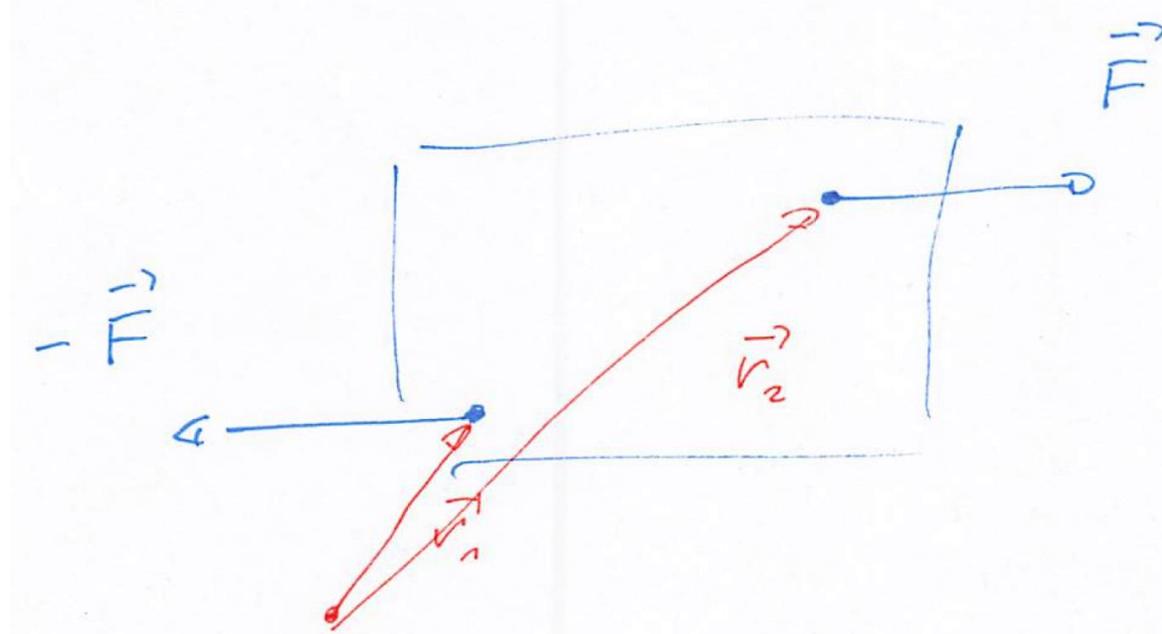
Vorlesungsexperiment

Bestimmung des Schwerpunkts im Schwerfeld der Erde.

Eine an den starren Körper angreifende **Kraft** kann beliebig entlang ihrer **Wirkungslinie** verschoben werden.



Für $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \text{const.}$ kann ein **Kräftepaar** beliebig verschoben werden



weil das **Drehmoment** $M = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_1 \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}$ konstant bleibt.

Die **gesamte kinetische Energie** lässt sich darstellen als die **Summe** aus der **kinetischen Energie** der Bewegung des **Schwerpunkts** und der **Rotationsenergie**.

Dies wollen wir jetzt ableiten.

Dazu zerlegen wir die Ortvektoren der Massepunkte (siehe Kap. 2.2.2.) im **Laborsystem**

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i$$

in den Schwerpunkt **R** und den Ortsvektor im **Schwerpunktsystem** \mathbf{r}'_i .

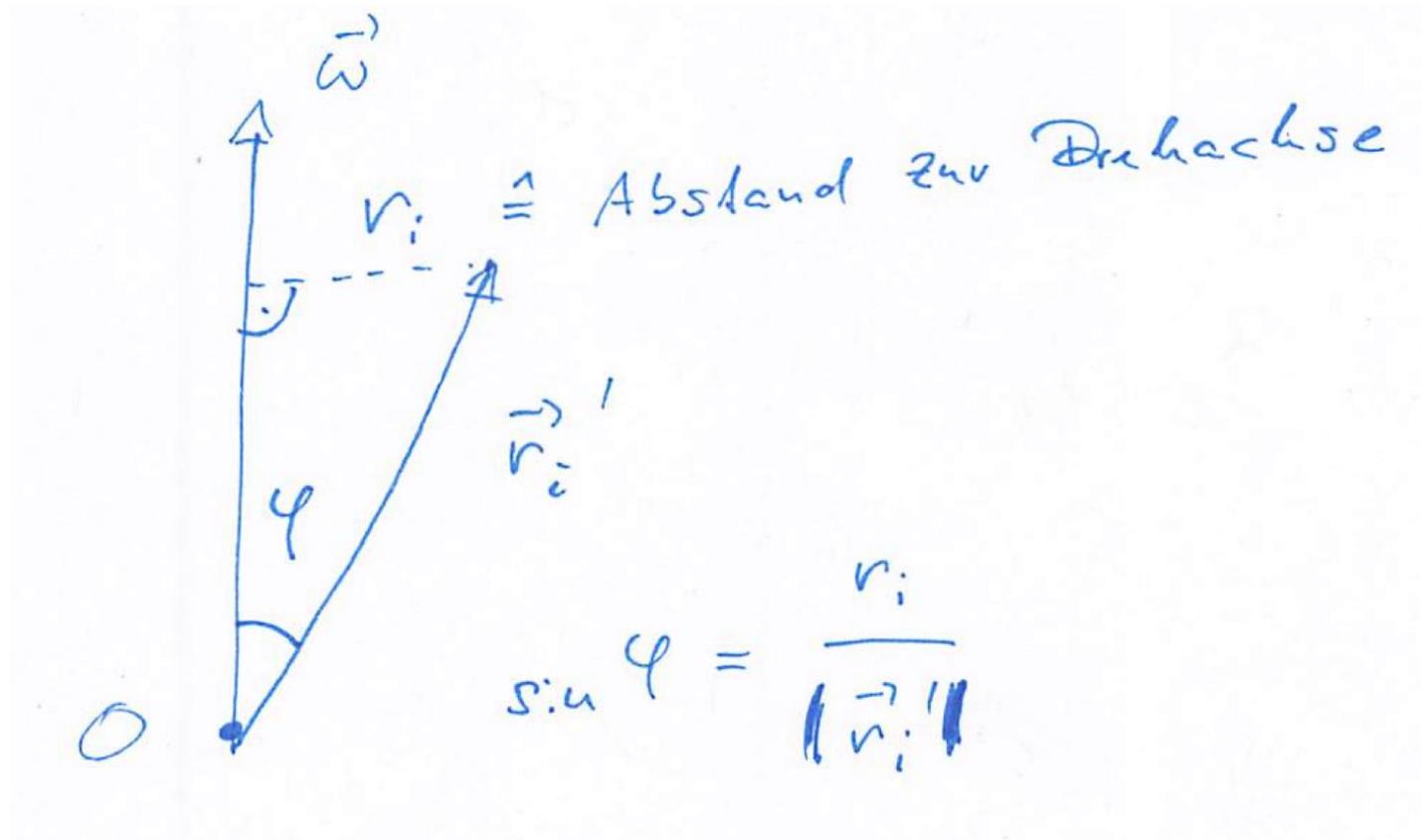
Der grüne Term ist gleich Null wegen

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} - M \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} - M \frac{\sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}}{M} = 0$$

Damit haben wir

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} M \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)^2$$

Grafisch:



Damit gilt

$$|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i| = |\boldsymbol{\omega}| \cdot |\mathbf{r}'_i| \cdot \sin \varphi = |\boldsymbol{\omega}| \cdot r_i$$

und wir erhalten

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} M \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \right) \boldsymbol{\omega}^2$$

$= \Theta \quad \text{Trägheitsmoment}$

Zusammenfassung: Die **gesamte kinetische Energie** lässt sich darstellen als die Summe aus der **kinetischen Energie** der **Schwerpunktbewegung** und der **kinetischen Energie** der **Rotation** des Körpers (Rotationsenergie)

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} M \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega^2$$

mit dem Abstand des Massepunktes i zur Drehachse r_i und dem **Trägheitsmoment** Θ

$$\Theta = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \rightarrow \int_V r^2 dm = \int_V \rho(\mathbf{r}) r^2 dV$$

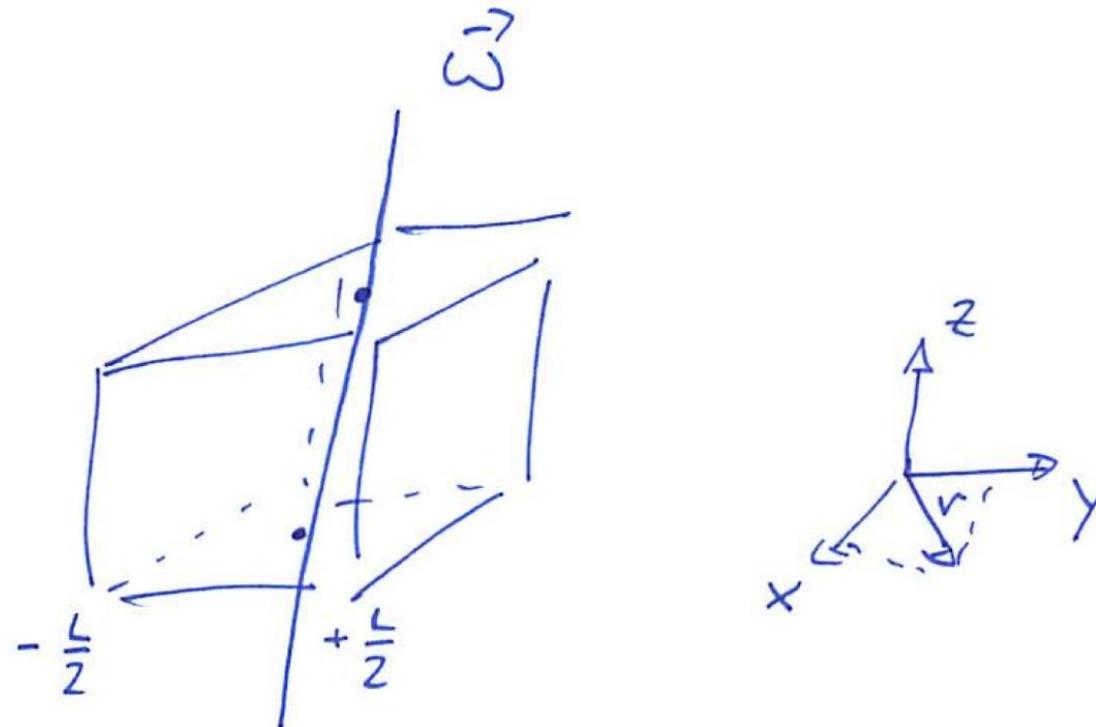
Das Trägheitsmoment hängt dabei nicht nur von der Gestalt des Körpers ab, sondern auch von der Drehachse.

Wir kommen hierauf weiter unten im Zusammenhang des **Satzes von Steiner** zurück.

Zunächst einmal wollen wir jedoch einige **Beispiele** für das **Trägheitsmoment** berechnen.

Beispiel: Trägheitsmoment eines homogenen Würfels mit Kantenlänge L

Die Drehachse ω gehe dabei durch die Würfelmitte (Schwerpunkt) und sei parallel zu \mathbf{e}_z

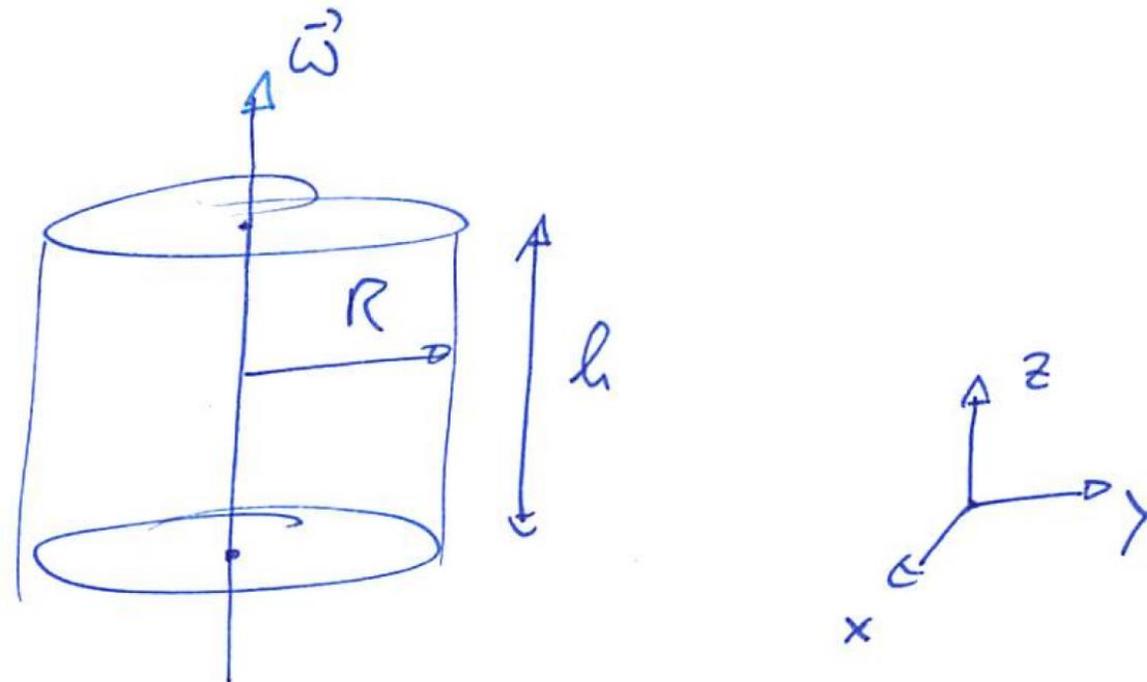


Damit wird das **Trägheitsmoment**

$$\begin{aligned}\Theta &= \int_V \rho r^2 dV = \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} (x^2 + y^2) dx dy dz = \rho L \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \rho L \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \left[\frac{1}{3} x^3 + y^2 x \right]_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dy = \rho L \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \left(\frac{2}{3} \left(\frac{L}{2} \right)^3 + y^2 L \right) dy \\ &= \rho L \left[\frac{2}{3} \left(\frac{L}{2} \right)^3 y + \frac{1}{3} y^3 L \right]_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} = \rho L \left(\frac{2}{3} \left(\frac{L}{2} \right)^3 L + \frac{2}{3} \left(\frac{L}{2} \right)^3 L \right) = \rho L^5 \frac{1}{6} = \frac{1}{6} ML^2 = \Theta\end{aligned}$$

Beispiel: Trägheitsmoment eines homogenen Vollzylinders

Die Drehachse ω sei identisch mit der Zylinderachse



Damit wird das **Trägheitsmoment**

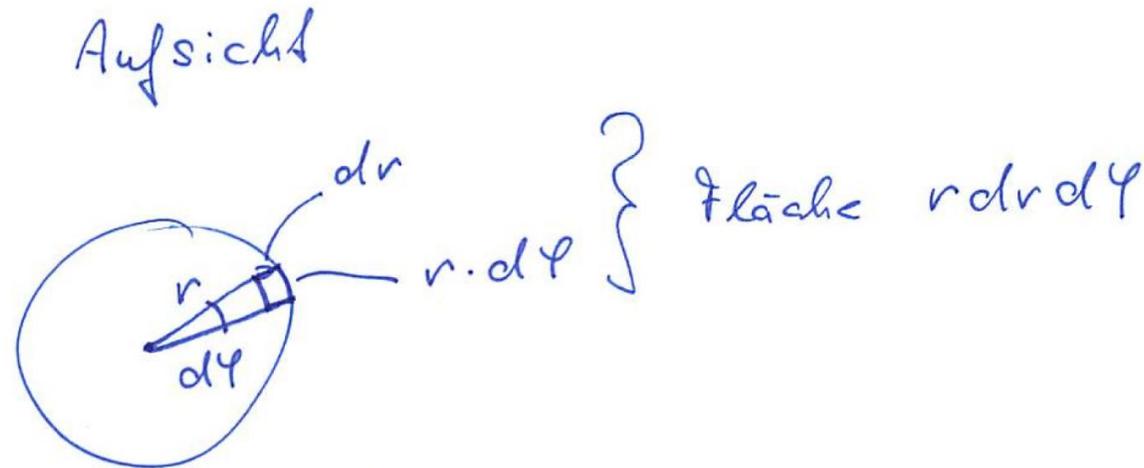
$$\Theta = \int_V \rho r^2 dV = \int_V \rho r^2 dx dy dz$$

Die Berechnung dieses Integrals ist möglich in kartesischen Koordinaten, aber qualvoll.

Verwende dem Problem angepasste Koordinaten.

Volumenintegrale in Zylinderkoordinaten

Wir betrachten ein infinitesimal kleines Flächen- bzw. Volumenelement



$$\Rightarrow \int dV = \int dx dy dz = \int r dr d\varphi dz$$

Damit wird das **Trägheitsmoment des homogenen Vollzylinders**

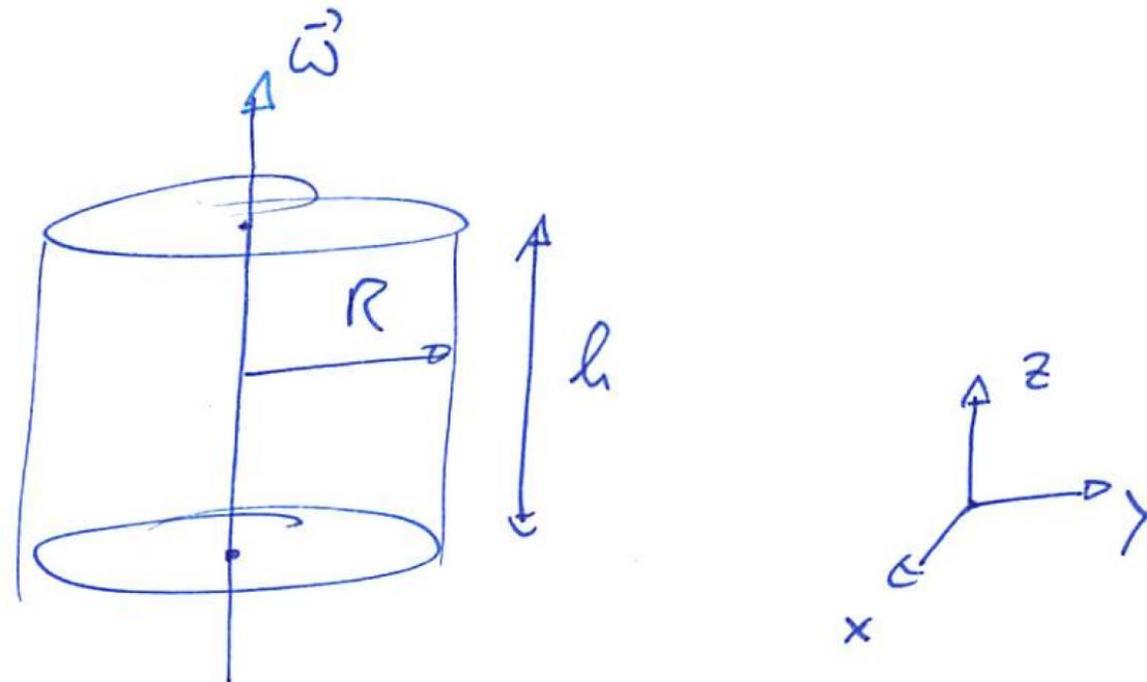
$$\begin{aligned}\Theta &= \int_V \rho r^2 dV = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h r^2 r dr d\varphi dz = \rho 2\pi h \int_0^R r^3 dr = \rho 2\pi h \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^R \\ &= \rho 2\pi h \frac{1}{4} R^4\end{aligned}$$

Mit der Massendichte $\rho = \frac{M}{\pi R^2 h}$

$$\Rightarrow \Theta = \frac{1}{2} MR^2$$

Beispiel: Trägheitsmoment eines Hohlzylinders mit dünner Wand

Die Drehachse ω sei identisch mit der Zylinderachse



Hier haben alle Massepunkte den gleichen Abstand, nämlich R , von der Drehachse.

Das macht die Bestimmung des **Trägheitsmoments des Hohlzylinders** besonders einfach

$$\Theta = MR^2$$

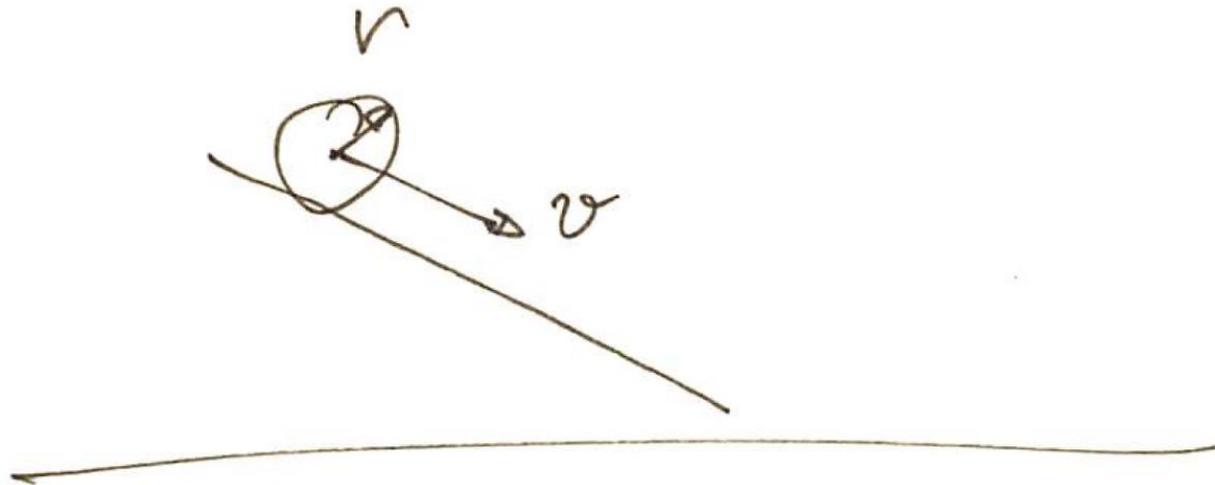
Dieses Trägheitsmoment ist **doppelt so groß wie das des Vollzylinders**.

Weitere Beispiele:

siehe <https://www.maschinenbau-wissen.de/skript3/mechanik/kinetik/295-haupttraegheitsmoment>

Beispiel: Nutzen des Trägheitsmoments

Betrachte Zylinder, die eine schiefe Ebene herunterrollen.



Aus dem Energieerhaltungssatz bekommen wir

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2$$

mit $v = \omega r$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(m + \frac{\Theta}{r^2} \right) v^2 = mgh \Rightarrow v^2 = \frac{2mgh}{m + \frac{\Theta}{r^2}}$$

Ein Hohlzylinder mit großem Trägheitsmoment rollt also langsamer als ein Vollzylinder (bei gleichem Radius und gleicher Masse).

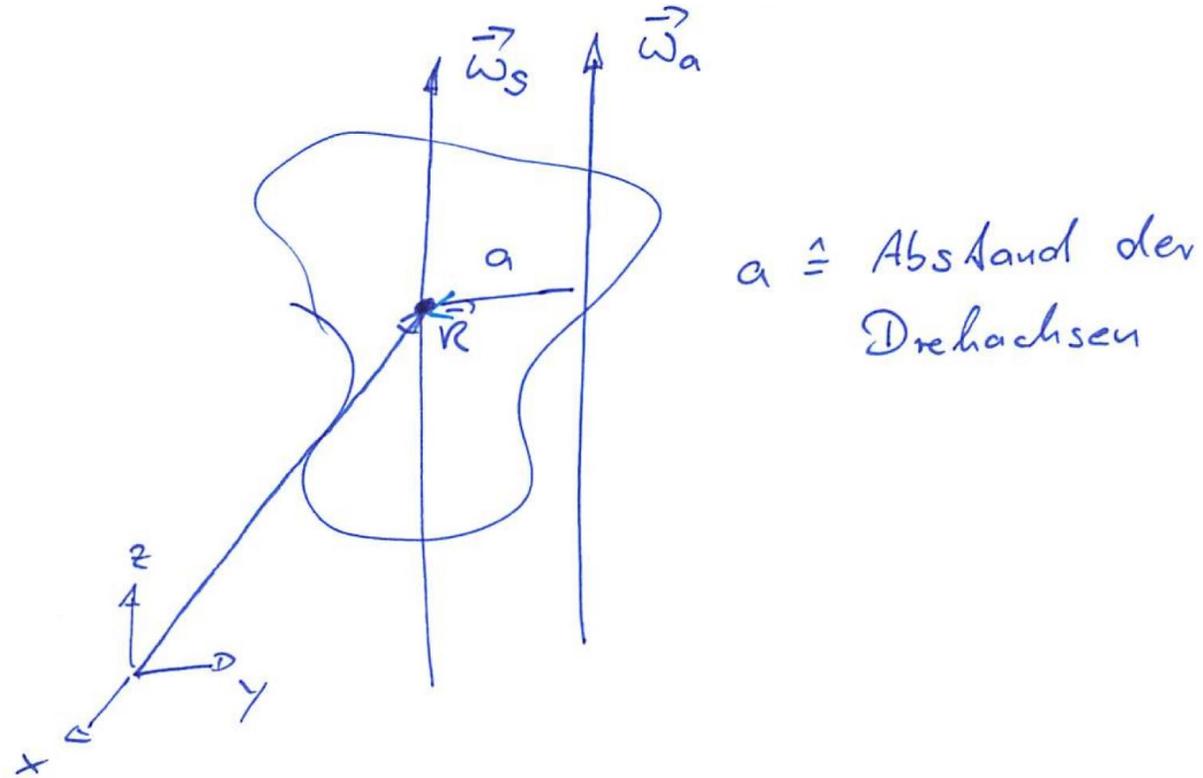
Vorlesungsexperiment

Zylinder rollen schiefe Ebene herunter.

Der Satz von Steiner

Die Berechnung des Trägheitsmoments hängt auch von der Drehachse ab und kann sehr mühselig sein. Der **Satz von Steiner** verbindet die Trägheitsmomente zugehörig zu verschiedenen Drehachsen.

$$|\boldsymbol{\omega}_S| = |\boldsymbol{\omega}_a| = \omega$$



Im Schwerpunktsystem ist die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}, S} = \frac{1}{2} \Theta_S \omega^2$$

Im System mit um $a = |\mathbf{a}|$ verschobener Drehachse kommt die Bewegungsenergie des Schwerpunkts hinzu

$$E_{\text{kin}, a} = \frac{1}{2} \Theta_S \omega^2 + \frac{1}{2} M \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)^2$$

Mit

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{a}$$

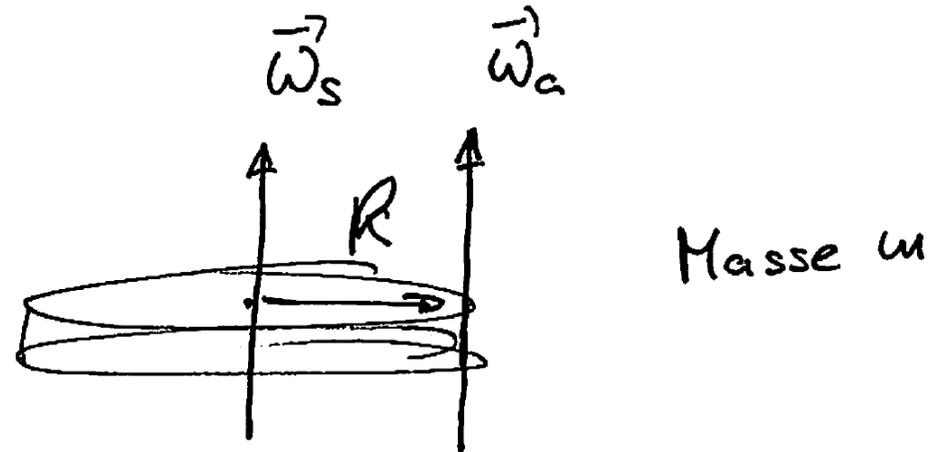
$$\Rightarrow E_{\text{kin}, a} = \frac{1}{2} \Theta_S \omega^2 + \frac{1}{2} M \omega^2 a^2 = \frac{1}{2} (\Theta_S + M a^2) \omega^2 = \frac{1}{2} \Theta_a \omega^2$$

mit

$$\Theta_a = \Theta_S + M a^2$$

Satz von Steiner

Beispiel: Vollzylinder, um $a = R$ verschobene Drehachse



$$\Theta_S = \frac{1}{2}MR^2 \quad \Rightarrow \quad \Theta_a = \Theta_S + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2 = 3\Theta_S$$

Der Trägheitstensor

Bei Drehbewegungen von Massepunkten (vgl. Kap. 2.2.) hatten wir

$$\mathbf{L} = \Theta \boldsymbol{\omega}; \quad \Theta = mr^2$$

Der Vektor des Drehimpulses und der Vektor der Winkelgeschwindigkeit zeigten also in die gleiche Richtung.

Dies ist i.A. beim starren ausgedehnten Körper **nicht** mehr der Fall.

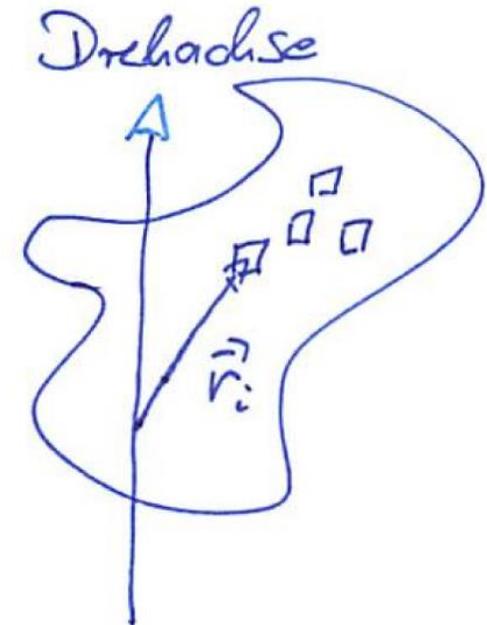
Das Trägheitsmoment wird zu einer Matrix, dem Trägheitstensor.

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$$

mit $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$

$$\Rightarrow \mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$$

Dieser Vektor \mathbf{L} zeigt i.A. **nicht** in die gleiche Richtung wie $\boldsymbol{\omega}$.



Berechne $\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{r}_i \times \begin{pmatrix} \omega_y z_i - \omega_z y_i \\ \omega_z x_i - \omega_x z_i \\ \omega_x y_i - \omega_y x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_i(\omega_x y_i - \omega_y x_i) - z_i(\omega_z x_i - \omega_x z_i) \\ z_i(\omega_y z_i - \omega_z y_i) - x_i(\omega_x y_i - \omega_y x_i) \\ x_i(\omega_z x_i - \omega_x z_i) - y_i(\omega_y z_i - \omega_z y_i) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (y_i^2 + z_i^2)\omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z \\ -x_i y_i \omega_x + (x_i^2 + z_i^2)\omega_y - y_i z_i \omega_z \\ -x_i z_i \omega_x - y_i z_i \omega_y + (x_i^2 + y_i^2)\omega_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^N m_i x_i y_i & -\sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \\ -\sum_{i=1}^N m_i x_i y_i & \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \\ -\sum_{i=1}^N m_i x_i z_i & -\sum_{i=1}^N m_i y_i z_i & \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{L} = \Theta \boldsymbol{\omega}$$

mit dem **Trägheitstensor** Θ (einer symmetrischen 3×3 Matrix), ...

... mit den drei **Trägheitsmomenten** (Diagonal-Elemente)

$$\Theta_{xx} = \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

$$\Theta_{yy} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2)$$

$$\Theta_{zz} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

und den drei **Deviationsmomenten** (Nicht-Diagonal-Elemente)

$$\Theta_{xy} = \Theta_{yx} = - \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i$$

$$\Theta_{yz} = \Theta_{zy} = - \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i$$

$$\Theta_{zx} = \Theta_{xz} = - \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i$$

Rotationsenergie dargestellt mit dem Trägheitstensor

Mit Hilfe des Trägheitstensors können wir die **Rotationsenergie** des starren Körpers in allgemeiner Form darstellen wie folgt

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2$$

mit

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} \omega_y z_i - \omega_z y_i \\ \omega_z x_i - \omega_x z_i \\ \omega_x y_i - \omega_y x_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E_{\text{kin}} &= \sum_{i=1}^N m_i \left((\omega_y z_i - \omega_z y_i)^2 + (\omega_z x_i - \omega_x z_i)^2 + (\omega_x y_i - \omega_y x_i)^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^N m_i (z_i^2 \omega_y^2 - 2y_i z_i \omega_y \omega_z + y_i^2 \omega_z^2 + x_i^2 \omega_z^2 - 2x_i z_i \omega_x \omega_z + z_i^2 \omega_x^2 + y_i^2 \omega_x^2 \\
&\quad - 2x_i y_i \omega_x \omega_y + x_i^2 \omega_y^2) \\
&= \frac{1}{2} (\Theta_{xx} \omega_x^2 + \Theta_{yy} \omega_y^2 + \Theta_{zz} \omega_z^2 + 2\Theta_{xy} \omega_x \omega_y + 2\Theta_{yz} \omega_y \omega_z + 2\Theta_{xz} \omega_x \omega_z) \\
&= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega}
\end{aligned}$$

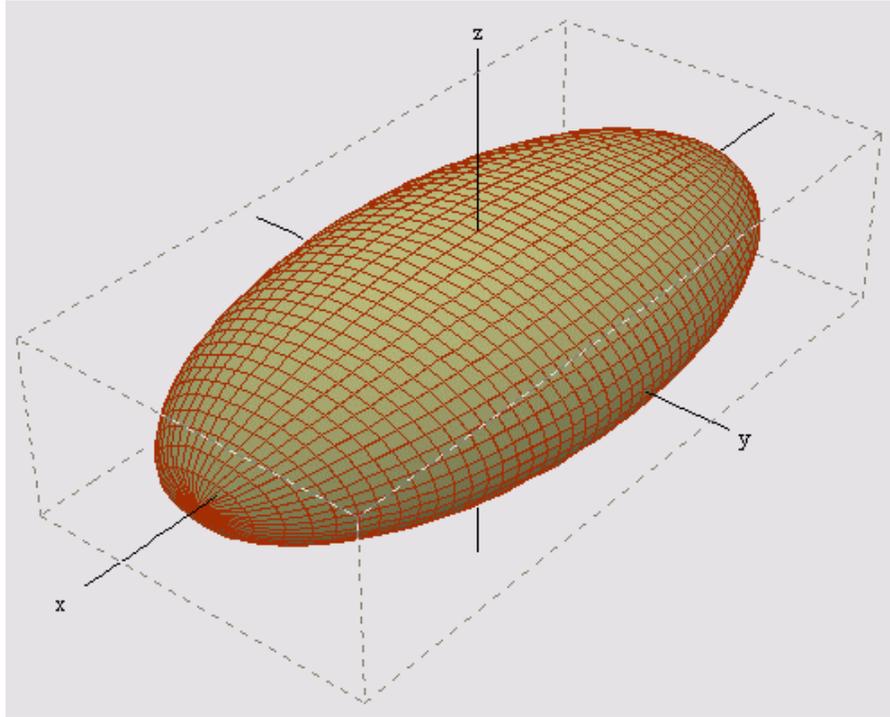
Zusammengefasst haben wir also die einfache quadratische Form für die Rotationsenergie des starren Körpers mit dem **Trägheitstensor** Θ

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \Theta \boldsymbol{\omega} \neq \frac{1}{2} \Theta \boldsymbol{\omega}^2$$

als **Verallgemeinerung** des Ausdrucks mit dem **Trägheitsmoment** Θ für eine bestimmte Drehachse

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \Theta \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \Theta \boldsymbol{\omega}^2$$

Dargestellt im ω -Raum ist die **Fläche konstanter Rotationsenergie** ein Ellipsoid, das **Trägheitsellipsoid** (für beliebig geformte Körper, auch z.B. für ein Automobil)



Ellipsoid mit drei paarweise ungleichen Halbachsen

Ist der Körper beispielsweise eine Kugel oder ein Würfel, so wird das Trägheitsellipsoid zu einer Kugel.

Hauptträgheitsachsen

Für **spezielle Drehachsen** können die Vektoren des Drehimpulses und der Winkelgeschwindigkeit in die gleiche Richtung zeigen.

Diese Richtungen bzw. Achsen nennt man **Hauptträgheitsachsen**.

Wenn eine Automechaniker*in einen Autoreifen „auswuchtet“ durch das Anbringen kleiner Massen, macht sie die Radachse zu einer Hauptträgheitsachse.

Ohne dieses Auswuchten treten Drehmomente auf, die die Radlager belasten und auf Dauer schädigen.

Vorlesungsexperiment

Rotationen mit und ohne „Unwucht“.

Mathematisch sind die **Hauptträgheitsachsen** (auch „Hauptachsen“) die **Eigenvektoren** des **Trägheitstensors**, sie folgen also der **Eigenwertgleichung**

$$\mathbf{L} = \mathbf{\Theta} \boldsymbol{\omega} = \lambda \boldsymbol{\omega} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{\Theta} - \lambda \mathbf{1}) \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$$

mit dem **Eigenwert** λ .

In drei Dimension gibt es im Allgemeinen drei linear unabhängige Hauptträgheitsachsen (und drei Eigenwerte), die oft mit Symmetrieachsen des Körpers zusammenfallen.

Koordinatentransformation auf das Hauptachsensystem

Für nicht-triviale (trivial heißt $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$) Lösungen muss gelten (siehe Kap. 2.1.11.)

$$\det(\boldsymbol{\Theta} - \lambda \mathbf{1}) = 0$$

Diese Determinante führt zu einem Polynom dritter Ordnung in λ , das i.A. drei verschiedene Lösungen hat, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Sind zwei oder drei Eigenwerte identisch, spricht man von einer **Entartung**.

Die dazu gehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3$ sind orthogonal (weil $\boldsymbol{\Theta}$ symmetrisch ist) und können normiert und als neue kartesische Basis verwendet werden.

Im Laborsystem schreiben wir

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

Mit den drei Hauptträgheitsachsen $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3$ schreiben wir den Vektor \mathbf{r}

$$\mathbf{r} = x_1\boldsymbol{\omega}_1 + x_2\boldsymbol{\omega}_2 + x_3\boldsymbol{\omega}_3$$

mit den drei Komponenten im kartesischen Hauptachsensystem x_1, x_2, x_3

In diesem Koordinatensystem hat der **Trägheitstensor** die besonders einfache **Diagonalform**

$$\Theta' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

weil gilt

$$\Theta' \omega_1 = \lambda_1 \omega_1, \quad \Theta' \omega_2 = \lambda_2 \omega_2, \quad \Theta' \omega_3 = \lambda_3 \omega_3$$

per Konstruktion.

3.2. Kreiselbewegungen

Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit ω ist die **Drehachse** der Drehbewegung.

Im Kapitel 3.1. hatten wir die **Drehachse** als **fest** bzw. als vorgegeben betrachtet.

Was passiert wenn sich die Drehachse frei einstellen kann?

Im **Kapitel 3.2.1.** beantworten wir diese Frage für den **kräftefreien** Kreisel.
Dies führt uns zur **Nutation**.

Im **Kapitel 3.2.2.** betrachten wir den Kreisel unter dem **Einfluss von Kräften**.
Dies führt uns zur **Präzession**.

3.2.1. Nutation

Wir unterstützen den Kreisel im Schwerpunkt. Im Schwerfeld der Erde ist dann das Drehmoment $\mathbf{M} = 0$ und der Drehimpuls des Kreisels ist konstant, $\mathbf{L} = \text{const.}$, also

$$\mathbf{L} = \mathbf{\Theta} \boldsymbol{\omega} = \text{const.}$$

Daraus folgt aber nicht, dass $\boldsymbol{\omega} = \text{const.}$, weil der Körper (der Kreisel) sich im Raum bewegt und sich sein Trägheitstensor $\mathbf{\Theta} = \mathbf{\Theta}(t)$ dabei zeitlich ändert.

Nur wenn die Drehachse mit einer Hauptträgheitsachse zusammenfällt gilt $\mathbf{\Theta} = \text{const.}$ und $\boldsymbol{\omega} = \text{const.}$ Diese Konfiguration wird im **Kurskreisel** angewendet.

Vorlesungsexperiment

Kurskreisel

Im **Laborsystem (= Inertialsystem)** ist das Problem sehr **kompliziert** wegen $\Theta = \Theta(t)$.
Wir haben die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\Theta \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}$$

Im **Hauptachsensystem** ist der Trägheitstensor hingegen per Konstruktion konstant und das Problem wird **einfacher**. Das Hauptachsensystem ist ein kartesisches Koordinatensystem, es ist aber **kein Inertialsystem**.

Erinnerung

Im Kapitel 2.2.3. (Rotierende Bezugssysteme) hatten wir die **Transformation auf das rotierende System** für den Geschwindigkeitsvektor kennen gelernt und dargestellt wie

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Für den **Drehimpulsvektor** erhalten wir analog durch die Ersetzung $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{L}$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d'\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$$

Wir erhalten die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d'\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{M}$$

$$= \frac{d'}{dt} (\boldsymbol{\Theta}' \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\Theta}' \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\Theta}' \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\Theta}' \boldsymbol{\omega})$$

Ausgeschrieben in Komponenten:

$$\lambda_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \lambda_3 \omega_3 - \omega_3 \lambda_2 \omega_2 = M_1$$

$$\lambda_2 \dot{\omega}_2 + \omega_3 \lambda_1 \omega_1 - \omega_1 \lambda_3 \omega_3 = M_2$$

$$\lambda_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \lambda_2 \omega_2 - \omega_2 \lambda_1 \omega_1 = M_3$$

Dieses Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\lambda_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \lambda_3 \omega_3 - \omega_3 \lambda_2 \omega_2 &= M_1 \\ \lambda_2 \dot{\omega}_2 + \omega_3 \lambda_1 \omega_1 - \omega_1 \lambda_3 \omega_3 &= M_2 \\ \lambda_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \lambda_2 \omega_2 - \omega_2 \lambda_1 \omega_1 &= M_3\end{aligned}$$

nennt man die **Eulerschen Kreiselgleichungen**.

Durch die Transformation auf das Hauptachsensystem sind dies drei gekoppelte **nichtlineare** Differentialgleichungen, deren Lösung i.A. auch nicht trivial ist.

Vorlesungsexperiment

Nutation

Für die reine Nutation haben wir $\mathbf{M} = 0$.

Weiterhin betrachten wir einen **symmetrischen Kreisel** mit $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, z.B. einen Zylinder. (Der Fall $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ist trivial, der Fall $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$ ist sehr komplex.)

Wir erhalten

$$\lambda_1 \dot{\omega}_1 + (\lambda_3 - \lambda_1) \omega_2 \omega_3 = 0$$

$$\lambda_2 \dot{\omega}_2 + (\lambda_1 - \lambda_3) \omega_1 \omega_3 = 0$$

$$\lambda_3 \dot{\omega}_3 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_3 = \text{const.} = c$$

$$\dot{\omega}_1 + \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_1} c \omega_2 = 0$$

$$\dot{\omega}_2 - \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_1} c \omega_1 = 0$$

Wir machen den Ansatz:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \cos(kt) \\ \sin(kt) \end{pmatrix}$$

Hierbei ist k die **Nutationsfrequenz**. Einsetzen in die erste Gleichung führt zu

$$-kA \sin(kt) + \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_1} c A \sin(kt) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_1} c$$

Einsetzen in die zweite Gleichung ist analog und führt zum identischen Ergebnis.

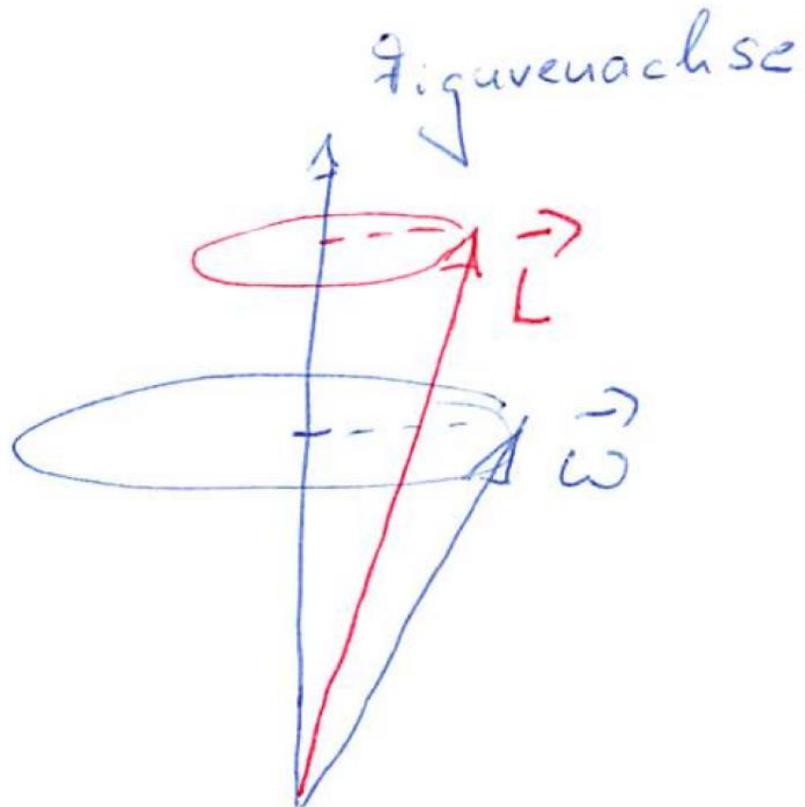
Dies bedeutet anschaulich, dass sich der Vektor $\boldsymbol{\omega}$ im Kreiselssystem um die 3-er Achse (die so genannte „Figurenachse“) auf einem Kegelmantel dreht.

Im Kreiselssystem dreht sich auch der Drehimpuls \mathbf{L} auf einem Kegelmantel um die Figurenachse, der Winkel mit der Figurenachse ist aber i.A. anders wegen

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\Theta}' \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \cos(kt) \\ A \sin(kt) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 A \cos(kt) \\ \lambda_1 A \sin(kt) \\ \lambda_3 c \end{pmatrix}$$

(die Komponenten #1 und #2 werden mit einem anderen Faktor multipliziert als #3)

Graphisch (im Kreiselssystem):



dargestellt ist der Fall $\lambda_3 > \lambda_1 = \lambda_2$

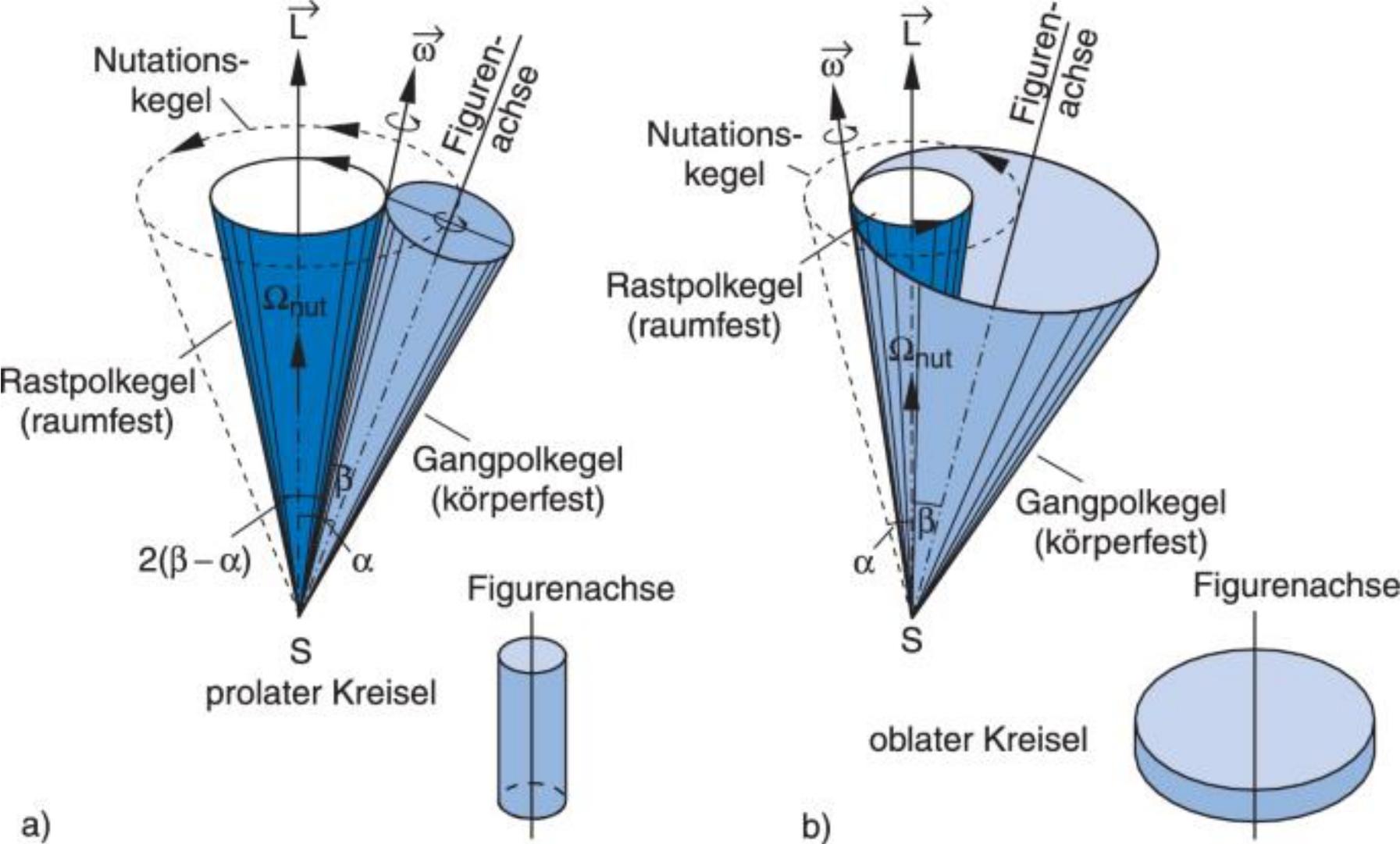
Wie sieht das Verhalten aus dem Laborsystem (= Inertialsystem) heraus gesehen aus?

Hier ist der Drehimpuls erhalten, also fest, wegen $\mathbf{M} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \text{const.}$

Daher drehen sich aus dem Inertialsystem heraus gesehen die Vektoren $\boldsymbol{\omega}$ und die Figurenachse um den festen Drehimpulsvektor.

Hierbei ist zu beachten, dass man eigentlich beim Hinschauen nur die Figurenachse „sieht“, weil sie unmittelbar mit dem kreiselnden starren Körper verknüpft ist.

Graphisch:



3.2.2. Präzession

Wenn wir den Kreisel **außerhalb seines Schwerpunktes** unterstützen $\Rightarrow \mathbf{M} \neq 0$.

Die Eulersche Kreiselgleichung (siehe Kap. 3.2.1.) gelten weiterhin.
Deren mathematische Lösung ist aber nicht einfach.

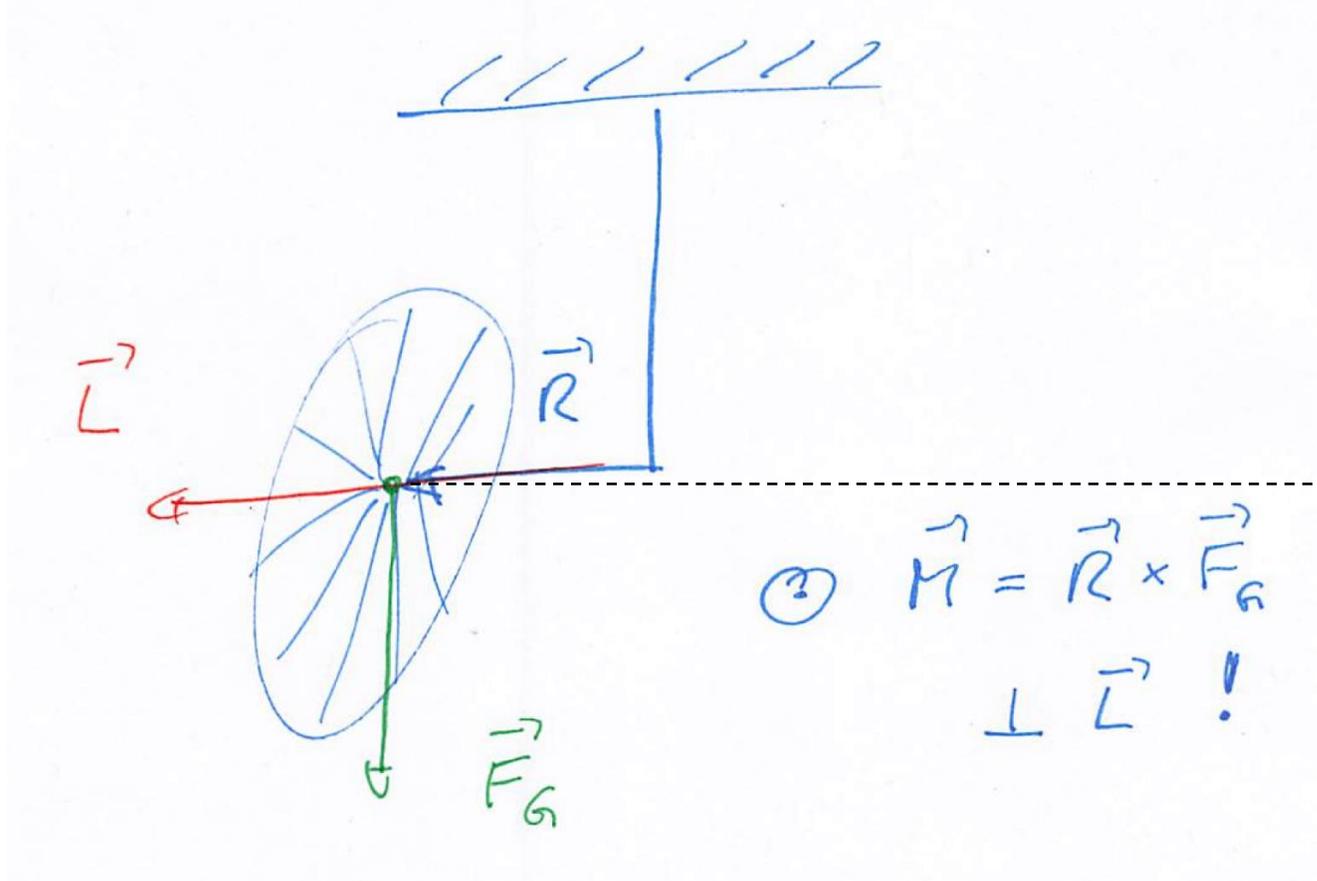
Wir betrachten daher im Folgenden nur ein **einfaches Beispiel im Schwerfeld der Erde**.

Vorlesungsexperiment

Präzession eines Motorradreifens.

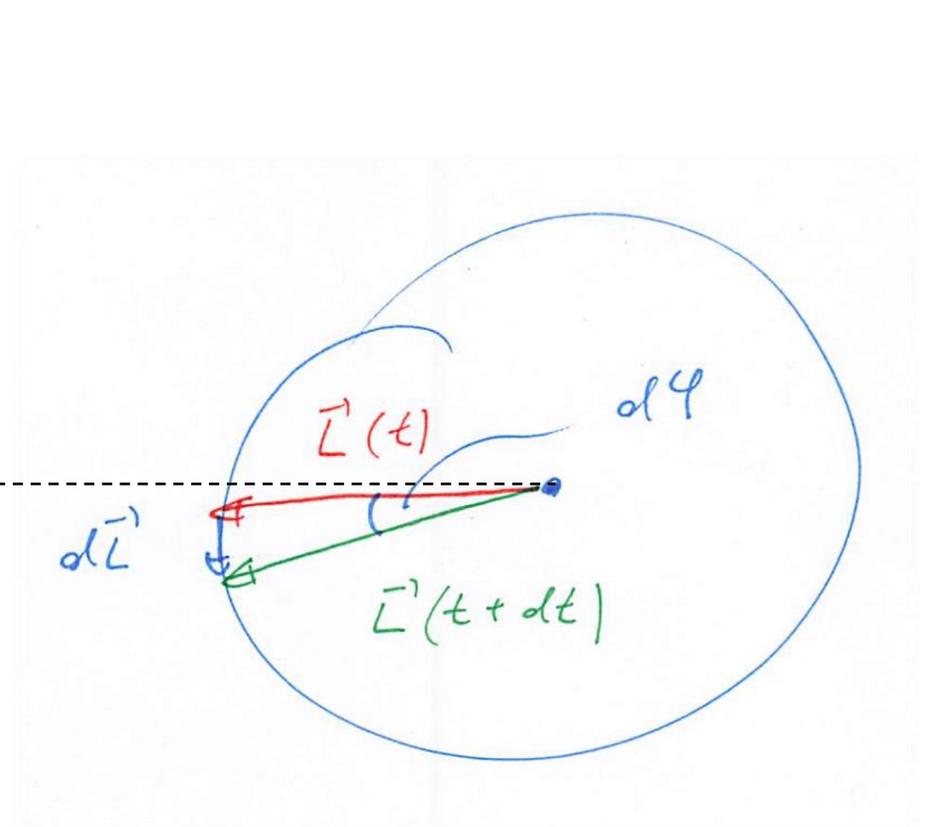
Beispiel:

Seitenansicht



$$\textcircled{?} \vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}_G$$
$$\perp \vec{L} !$$

Aufsicht



Im Zeitintervall dt dreht sich der Drehimpulsvektor um den Winkel $d\varphi$

$$d\varphi = \frac{dL}{L} = \frac{Mdt}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L} = \omega_p$$

mit der **Winkelgeschwindigkeit der Präzession** ω_p .

Die Präzession kann man als eine Ausweichbewegung interpretieren.

Vorlesungsexperiment

Präzession und Nutation können auch gemeinsam auftreten.