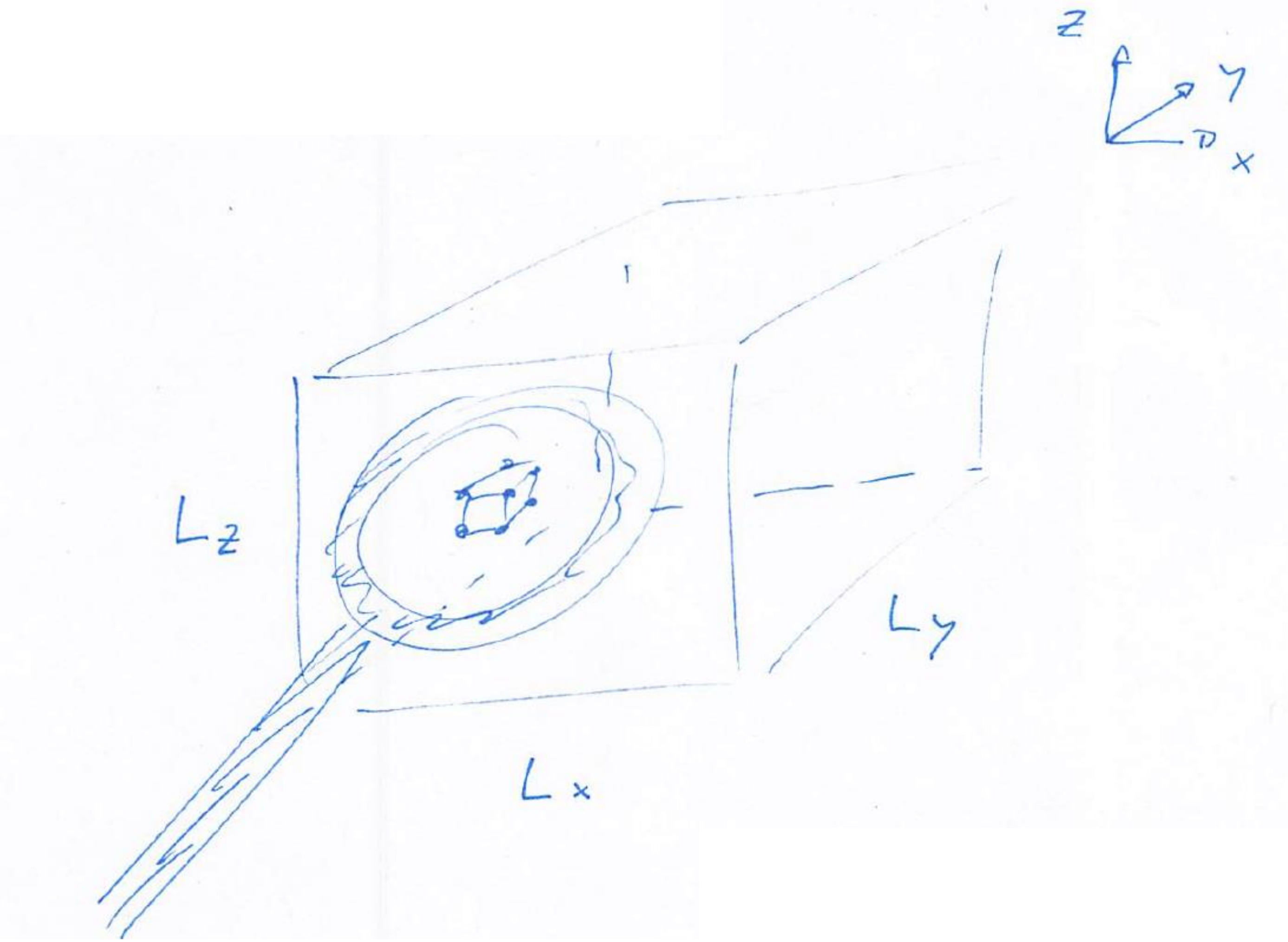
4. Mechanik elastischer ausgedehnter Körper
4.1. Die Elastizitätsmoduln

- Makroskopische Körper (z.B. Kristalle, Gläser, Gummi) sind aus sehr vielen Atomen aufgebaut (Größenordnung Avogadro-Zahl $N_A = 6.02214076 \cdot 10^{23}$).
  Zwischen jedem Paar von Atomen wirken Kräfte.
- Idee: Verwende wieder Taylor-Reihenentwicklung bis zur ersten Ordnung.
  Dies führt zu Verallgemeinerungen des Hookeschen Gesetzes.

> Die Avogadro-Zahl ist eine Naturkonstante, die in der Thermodynamik im Zusammenhang mit der Basisgröße Mol systematisch eingeführt wird. Sie wird auch im Kapitel 6 dieser Vorlesung wieder auftauchen.

Vorlesungsexperiment


z
y
x
Lz
Ly
Lx


Atome
Kräfte

- N_A Atome führen zu $3N_A$ Eigenschwingungen.

> In der Festkörperphysik werden Sie Möglichkeiten kennenlernen, diese (vielen) Eigenschwingungen (die „Phononen“) und deren Eigenfrequenzen sinnvoll zu klassifizieren und mit ihnen umzugehen.

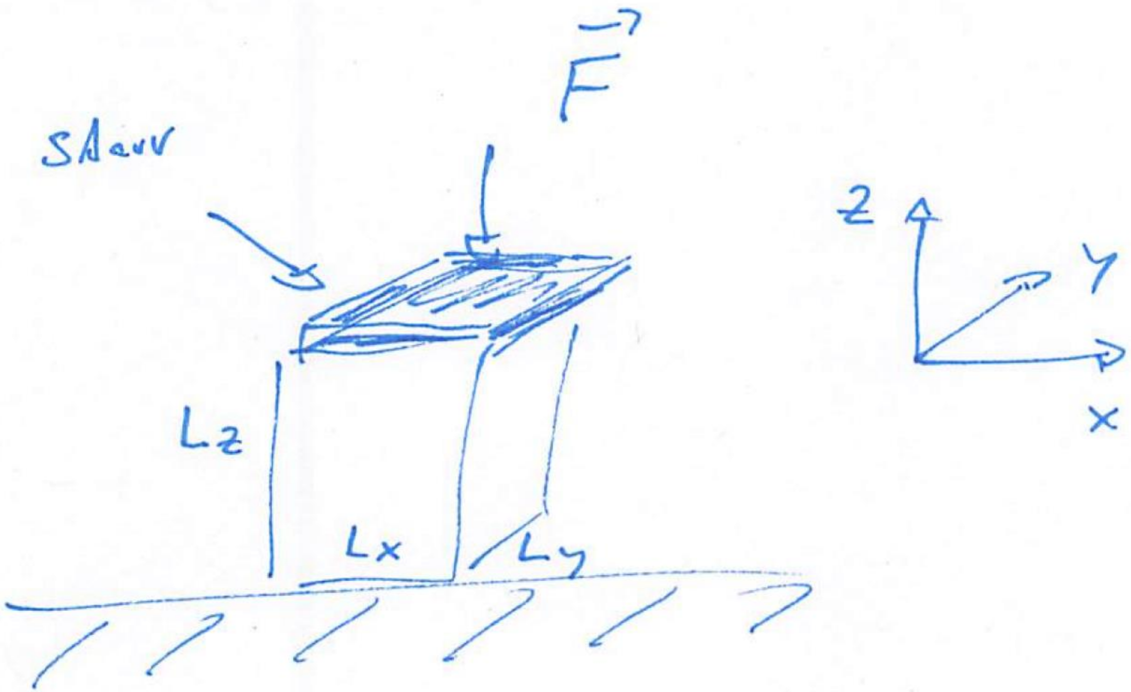
- An dieser Stelle sind wir an einer vereinfachten Beschreibung interessiert.
  Wir betrachten zunächst 3D, aber nur den statischen Fall und nur Materialien mit isotropen elastischen Eigenschaften (also z.B. keine Kristalle).

> Im Kap. 4.2. betrachten wir den dynamischen Fall, aber nur 1D.

- **Ziel:** Definition von elastischen Materialparametern (also von Parametern, die *nicht* von Form und/oder Größe des betrachteten Körpers abhängen).
- Für Materialien mit isotropen Eigenschaften in drei Dimensionen reichen hierfür **zwei** der folgenden vier Größen aus (ohne Beweis):
  - Youngsches Modul E (auch Elastizitätsmodul oder E-Modul)
  - Poissonzahl ν (auch Querkontraktionszahl)
  - Schermodul G (auch Gleitmodul oder G-Modul oder Schubmodul)
  - Kompressionsmodul B (= Kehrwert der Kompressibilität κ)

> Leider werden in der Literatur die Buchstaben hierzu nicht einheitlich verwendet.
>
> Ohne Isotropie benötigt man in 3D im Allgemeinen 21 unabhängige elastische Parameter.

- Das Youngsche Modul E kann man auffassen als die direkte Verallgemeinerung der Federkonstanten im Hookeschen Gesetz



Hierbei ändert sich nicht nur L_z, sondern auch L_x und L_y (siehe Poissonzahl).

- Hookesches Gesetz: $F = +D\Delta L_z$, wobei hier die Vorzeichenkonvention so ist, dass eine Kontraktion des Materials bzw. eine Verkürzung $\Delta L_z > 0$ entspricht.

- Die Federkonstante D schreiben wir als („Parallel- bzw. Serienschaltung von Federn“)

$$D = E\,\frac{L_x L_y}{L_z} \quad \Rightarrow [E] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa}\ (\mathrm{Pascal})$$

- Damit wird die Hookesche Kraft

$$F = E\,\frac{L_x L_y}{L_z}\,\Delta L_z$$

Mit der Definition für die mechanische Spannung

$$\sigma = \frac{F}{L_x L_y} \qquad \Rightarrow [\sigma] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa}\ (\mathrm{Pascal})$$

und der Definition für die mechanische Dehnung

$$\epsilon = \frac{\Delta L_z}{L_z} \qquad \Rightarrow [\epsilon] = 1$$

erhalten wir

$$\sigma = E\,\epsilon$$

mit dem Youngschen Modul

$$E = D\,\frac{L_z}{L_x L_y}$$

> Ersetzt man in der obigen Gleichung die Spannung durch den Spannungstensor (Rang 2), die Dehnung durch den Dehnungstensor (Rang 2), das Youngsche Modul durch den Elastizitätstensor (Rang 4) und das Produkt durch eine zweifache Kontraktion, so erhält man die konstituierende Gleichung der klassischen Cauchy-Elastizität.

- Beispiele:

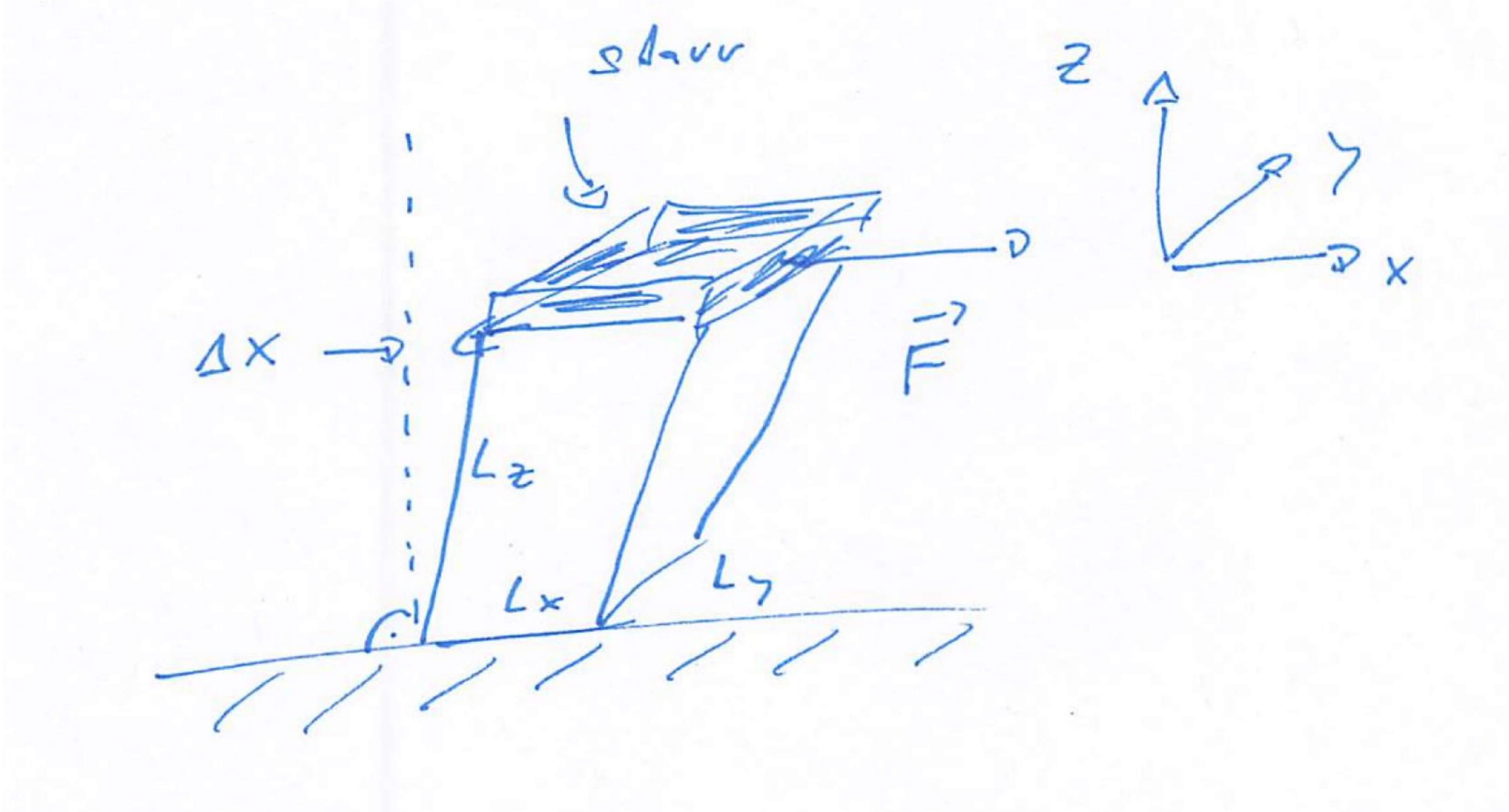
Gummi:	$E = 0.01 - 0.1\ \mathrm{GPa}$
Aluminium:	$E = 69\ \mathrm{GPa}$
Diamant:	$E = 1100\ \mathrm{GPa}$

- Die Poissonzahl ist wie folgt definiert:

$$\nu = -\frac{\frac{\Delta L_x}{L_x}}{\frac{\Delta L_z}{L_z}} = -\frac{\frac{\Delta L_y}{L_y}}{\frac{\Delta L_z}{L_z}} \qquad \Rightarrow [\nu] = 1$$

- „Meistens“ gilt $\nu > 0$, d.h., das Material dehnt sich entlang der *x*- und *y*-Achse seitlich aus wenn man es entlang der *z*-Achse zusammendrückt.
- Bei einem Weinkorken gilt $\nu \approx 0$.
- Für isotrope Materialien in 3D gilt $\nu \in [-1, 0.5]$ (ohne Beweis).
- Für inkompressible Materialien (siehe unten) gilt $\nu = 0.5$ (ohne Beweis).
- Materialien mit $\nu < 0$ heißen Auxetika.

- Das Schermodul G ist wie folgt definiert:

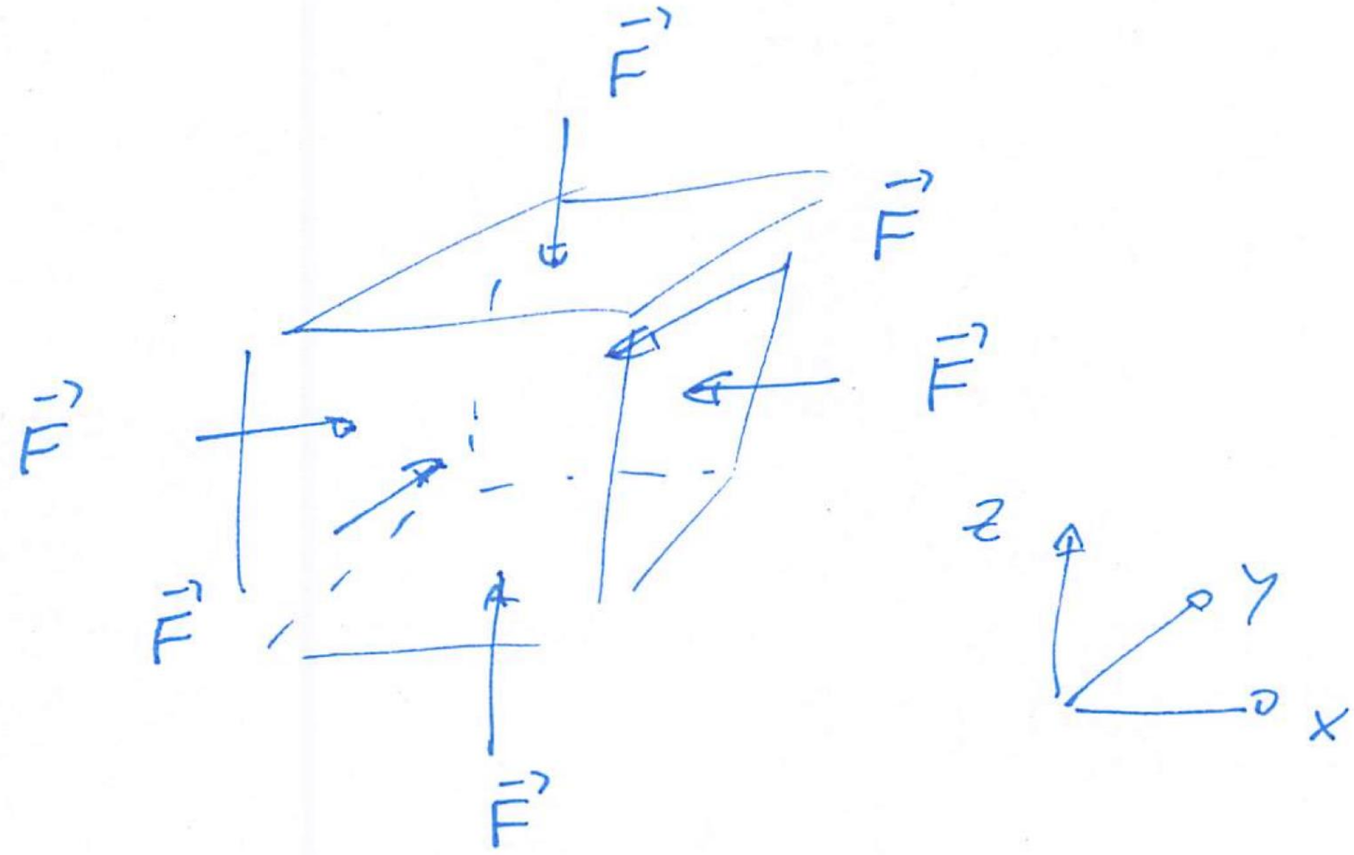


mit der Kraft

$$F = G\,\frac{L_x L_y}{L_z}\,\Delta x \qquad \Rightarrow [G] = \mathrm{Pa}$$

und dem Schermodul G.

- Das Kompressionsmodul B ist wie folgt definiert:



wobei der Druck P auf die Seitenflächen gegeben ist durch

$$P = \frac{F}{A} = \frac{F}{L_x L_y} = \cdots \qquad \Rightarrow [P] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa}$$

Hierbei ist F die Normalkomponente der Kraft bzgl. der Fläche.

Das Kompressionsmodul ist dann gegeben durch $B = \kappa^{-1}$

mit der Kompressibilität κ

$$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta P} \to -\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P} \qquad \Rightarrow [\kappa] = [B]^{-1} = \mathrm{Pa}^{-1}$$

Materialien mit $\kappa = 0$ bzw. $B \to \infty$ nennt man inkompressibel.
Ihre Form kann sich ändern, ihr Volumen hingegen nicht.

Materialien mit einer großen Kompressibilität kann man „leicht zusammendrücken".

- Es gelten die Zusammenhänge (ohne Beweis) zwischen den vier elastischen Materialparametern (von denen wie gesagt nur zwei unabhängig sind):

$$B = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

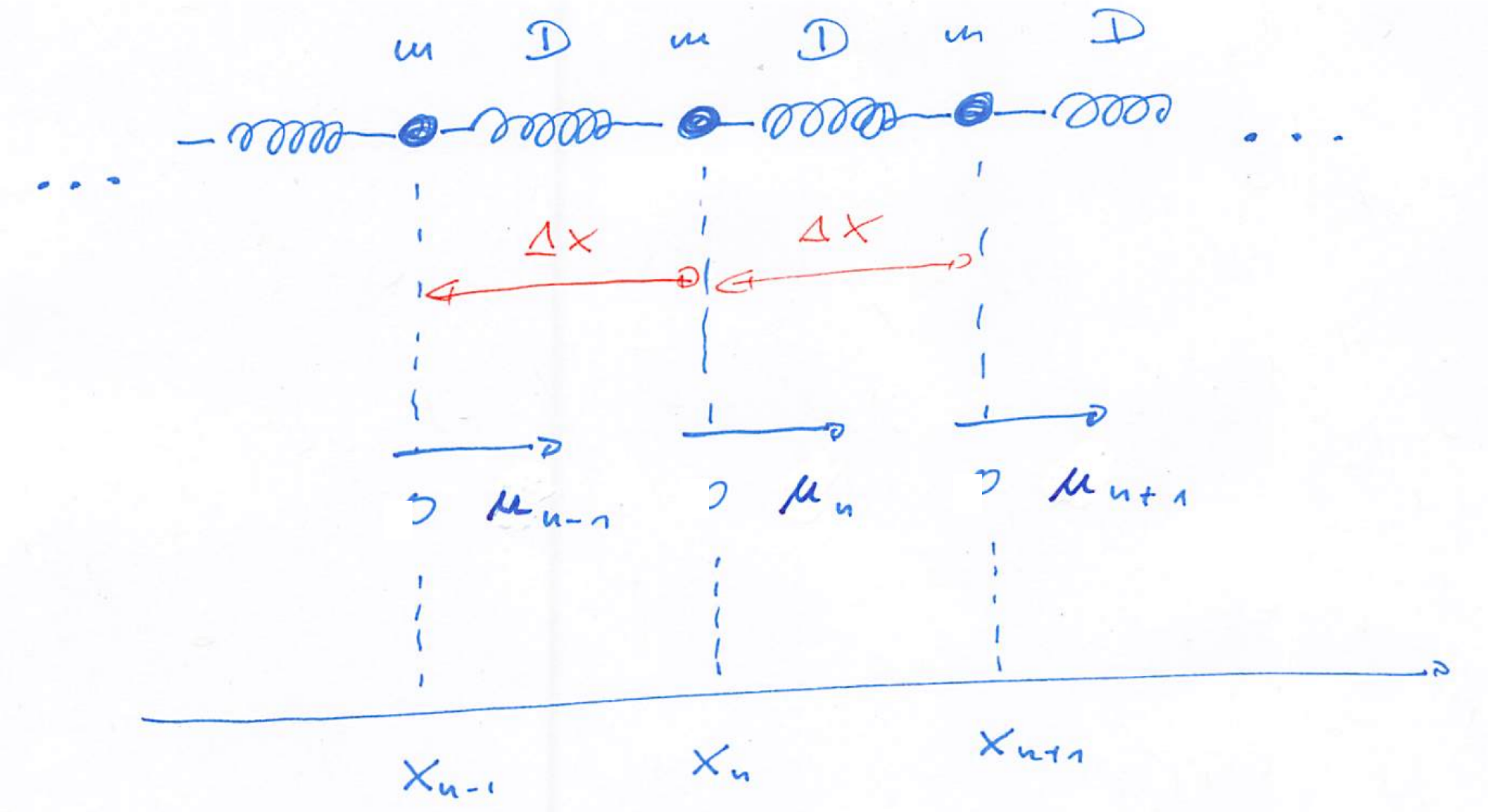
$$G = \frac{E}{2(\nu+1)}$$

> An den Gleichungen oben erkennt man, dass das Kompressionsmodul negativ wird (Instabilität) für $\nu > 0.5$ und dass das Schermodul negativ wird (Instabilität) für $\nu < -1$. So resultiert die Einschränkung $\nu \in [-1, 0.5]$, die wir oben schon erwähnt hatten.

4.2. Elastische Wellen, Dispersionsrelation

Vorlesungsexperiment

- Wir betrachten das folgende eindimensionale Masse-Feder Modell



- Hierbei ist u_n die Auslenkung der Masse n an der Stelle x_n aus ihrer Ruhelage.
- Dies führt zu den Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$m\frac{\mathrm{d}^2 u_n}{\mathrm{d}t^2} = -D(u_n - u_{n-1}) + D(u_{n+1} - u_n)$$

$$\Rightarrow m\frac{\mathrm{d}^2 u_n}{\mathrm{d}t^2} = +D(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) \qquad \Big| \cdot \frac{1}{D(\Delta x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{D(\Delta x)^2}\frac{\mathrm{d}^2 u_n}{\mathrm{d}t^2} = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta x)^2}$$

- Betrachte nun den Grenzübergang $\Delta x \to 0, m \to 0, D \to 0$ mit $\frac{m}{D(\Delta x)^2} = \text{const.} = 1/c^2$ und fasse $u = u(x,t)$ auf als Funktion der zwei Variablen Ort und Zeit.

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 u_n}{\mathrm{d}t^2} \to \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta x)^2} \to \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

> Der Grenzübergang $\Delta x \to 0$ ist gerechtfertigt falls die Wellenlänge (siehe unten) sehr groß ist im Vergleich zu Δx (= Abstand der Atome). Wir geben später ein Beispiel (Kammerton A in Eisen). Ansonsten ergeben sich Korrekturen.

Durch Einsetzen erhalten wir die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad ; \quad u = u(x,t)$$

für die Auslenkung u der Atome aus ihrer Ruhelage.

Die Wellengleichung ist eine homogene, lineare, partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Unbedingt Merken

4.2.1. Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit

- Was sind Lösungen der Wellengleichung?
  Welche Bedeutung hat die Größe c ($[c] = \mathrm{m/s}$) in der Wellengleichung?

- Um diese Fragen zu beantworten, machen wir den folgenden Lösungsansatz

$$u(x,t) = f(kx \pm \omega t) \quad \Rightarrow [k] = \mathrm{m}^{-1}; [\omega] = \mathrm{s}^{-1}$$

Hierbei ist die Funktion $f = f(X)$ eine gewöhnliche Funktion einer dimensionslosen Variablen.

Mathematischer Einschub

- Einsetzen dieses Ansatzes in die Wellengleichung führt zu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k^2 \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}X^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}X^2}$$

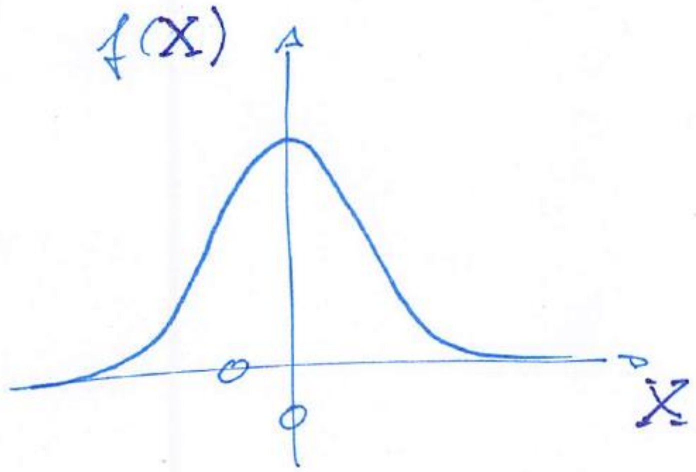
$$\Rightarrow k^2 \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}X^2} - \frac{1}{c^2}\omega^2 \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}X^2} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\frac{\omega}{k} = c} = \Delta x \sqrt{\frac{D}{m}}$$

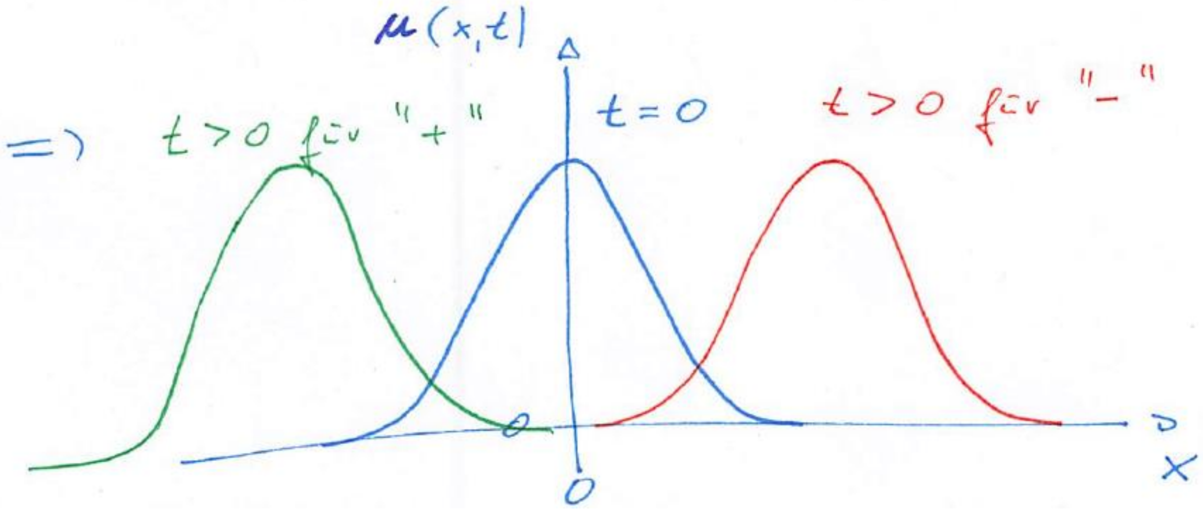
Der Ansatz löst die Wellengleichung also für beliebige Funktionen $f = f(X)$ sofern die Dispersionsrelation $\omega = \omega(k)$ für die Welle erfüllt ist.

Mathematischer Einschub

- ## Beispiel:

$$u(x,t) = f(kx \pm \omega t) = f(X)$$





Für das „+“ Vorzeichen bewegt sich die Welle mit gleichförmiger Geschwindigkeit nach rechts, für das „-“ Vorzeichen bewegt sie sich nach links.

Mit welcher Geschwindigkeit?

$$X = kx \pm \omega \mathrm{t} = \mathrm{const.} \qquad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mp \frac{\omega}{k} = \mp\, c$$

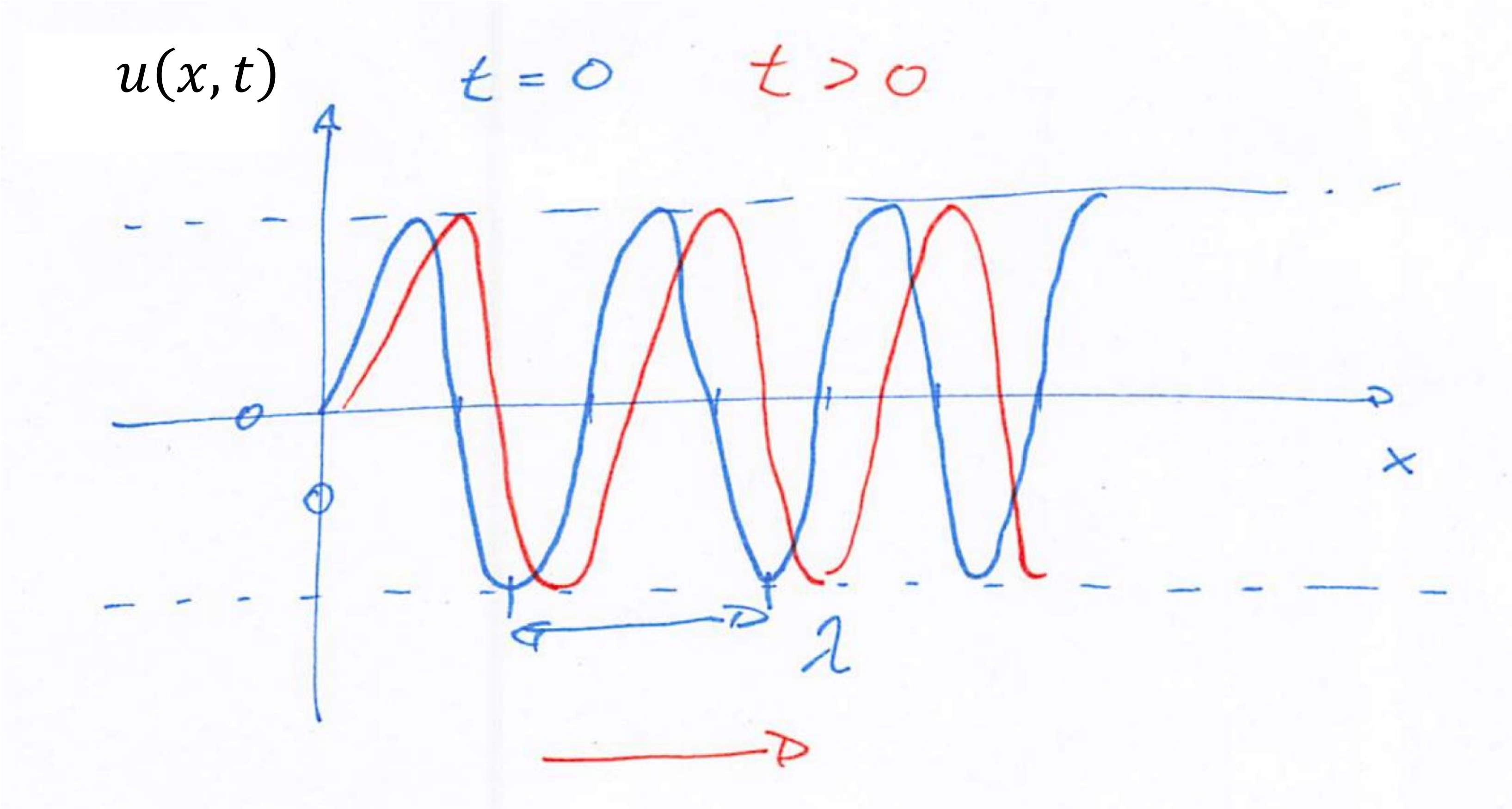
c ist die Schallgeschwindigkeit der Welle, bzw. genauer ihre Phasengeschwindigkeit, also die Geschwindigkeit mit der sich ein Punkt konstanter Phase (d.h. ein Punkt mit festem Argument X) fortbewegt.

- Zahlenbeispiele Schallgeschwindigkeit:

Eisen:	$c = 5\,170\ \mathrm{m/s}$
Plexiglas:	$c = 2\,170\ \mathrm{m/s}$
Diamant:	$c = 18\,000\ \mathrm{m/s}$

Der Kammerton A mit $\omega = 2\pi \cdot 440\ \mathrm{Hz}$ hat zum Beispiel in Eisen damit eine Wellenlänge von $\lambda = \frac{c}{440\ \mathrm{Hz}} = 11.75\ \mathrm{m} \gg \Delta x \approx 0.3\ \mathrm{nm}.$

- Beispiel: eine ebene Welle, d.h. $u(x,t) = u_0 \sin(kx - \omega t)$



Unbedingt Merken

An einem festen Ort x oszilliert die Auslenkung u als Funktion der Zeit mit der Kreisfrequenz ω. Die Periodendauer T dieser Oszillation ist gegeben durch

$$\omega T = 2\pi \ \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Zu einem festen Zeitpunkt t oszilliert die Auslenkung u als Funktion des Ortes mit der Wellenzahl k. Die zugehörige Wellenlänge λ dieser Oszillation ist gegeben durch

$$k\lambda = 2\pi \ \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Wir können die Dispersionsrelation auch umschreiben

$$\frac{\omega}{k} = c = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} \qquad \Rightarrow f\lambda = c$$

und dabei die „normale“ Frequenz $f = 1/T$ einführen mit $[f] = \mathrm{s}^{-1} = \mathrm{Hz}$.

> Die Einheit Hz (Hertz) vermeidet man für die Kreisfrequenz, auch, um so besser zwischen der Kreisfrequenz und der „normalen“ Frequenz unterscheiden zu können.

- Superpositionsprinzip:

Gegeben seien die zwei Lösungen der Wellengleichung $u_1(x,t)$ und $u_2(x,t)$.

Dann ist auch die Superposition bzw. Linearkombination dieser Lösungen $u(x,t) = A_1 u_1(x,t) + A_2 u_2(x,t)$ Lösung der Wellengleichung.

Beweis durch Einsetzen in die Wellengleichung (Linearität).

Unbedingt Merken

> Im Folgenden betrachten wir Interferenz, Gruppengeschwindigkeit und stehende Wellen als Beispiele für das Superpositionsprinzip.

Beispiel:

Wir starten von den zwei ebenen Wellen bzw. Teilwellen

$$u_1(x,t) = u_0 \sin(kx - \omega t)$$
$$u_2(x,t) = u_0 \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

Phasenverschiebung

und erhalten mit dem Additionstheorem $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = 2\,u_0 \sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Für die Spezialfälle $\varphi = (2N + 1)\pi$ mit ganzzahligem N erhalten wir

$$u(x,t) \equiv 0$$

und sprechen von (vollständig) destruktiver Interferenz der beiden Teilwellen.

Für die Spezialfälle $\varphi = 2N\,\pi$ mit ganzzahligem N erhalten wir

$$u(x,t) = 2\,u_0 \sin(kx - \omega t)$$

und sprechen von (vollständig) konstruktiver Interferenz der beiden Teilwellen.

Gruppengeschwindigkeit:

In vielen Körpern ist die Schallgeschwindigkeit frequenzabhängig, d.h. $c = c(\omega)$ (nicht in unserem Masse-Feder Modell).

Wir betrachten das „Wellenpaket“ (Superposition zweier Frequenzen)

$$u(x,t) = u_0(\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t))$$

mit den Dispersionsrelationen

$$\frac{\omega_1}{k_1} = c_1 = c(\omega_1) \quad \text{und} \quad \frac{\omega_2}{k_2} = c_2 = c(\omega_2)$$

Man spricht auch von der Dispersion der Phasengeschwindigkeit.

Den Fall $c_2 < c_1$ für $\omega_2 > \omega_1$ nennt man normale Dispersion (Phasengeschwindigkeit sinkt mit steigender Frequenz).

Den Fall $c_2 > c_1$ für $\omega_2 > \omega_1$ nennt man anomale Dispersion (Phasengeschwindigkeit steigt mit steigender Frequenz).

Mit Hilfe des Additionstheorems $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ folgt

$$u(x,t) = 2u_0 \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$

$$= 2u_0 \cos(kx - \omega t)\cos(\Delta k\, x - \Delta\omega\, t)$$

mit den Abkürzungen $\Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2}$ und $\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$

sowie den Abkürzungen $k = \frac{k_1 + k_2}{2}$ und $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$.

Wir betrachten nun den Fall, dass die beiden Frequenzen nah beieinander liegen, d.h. $|\Delta\omega| \ll \omega$ und somit $|\Delta k| \ll k$.

Dann ist der Term (die „Einhüllende“ oder „Enveloppe“)

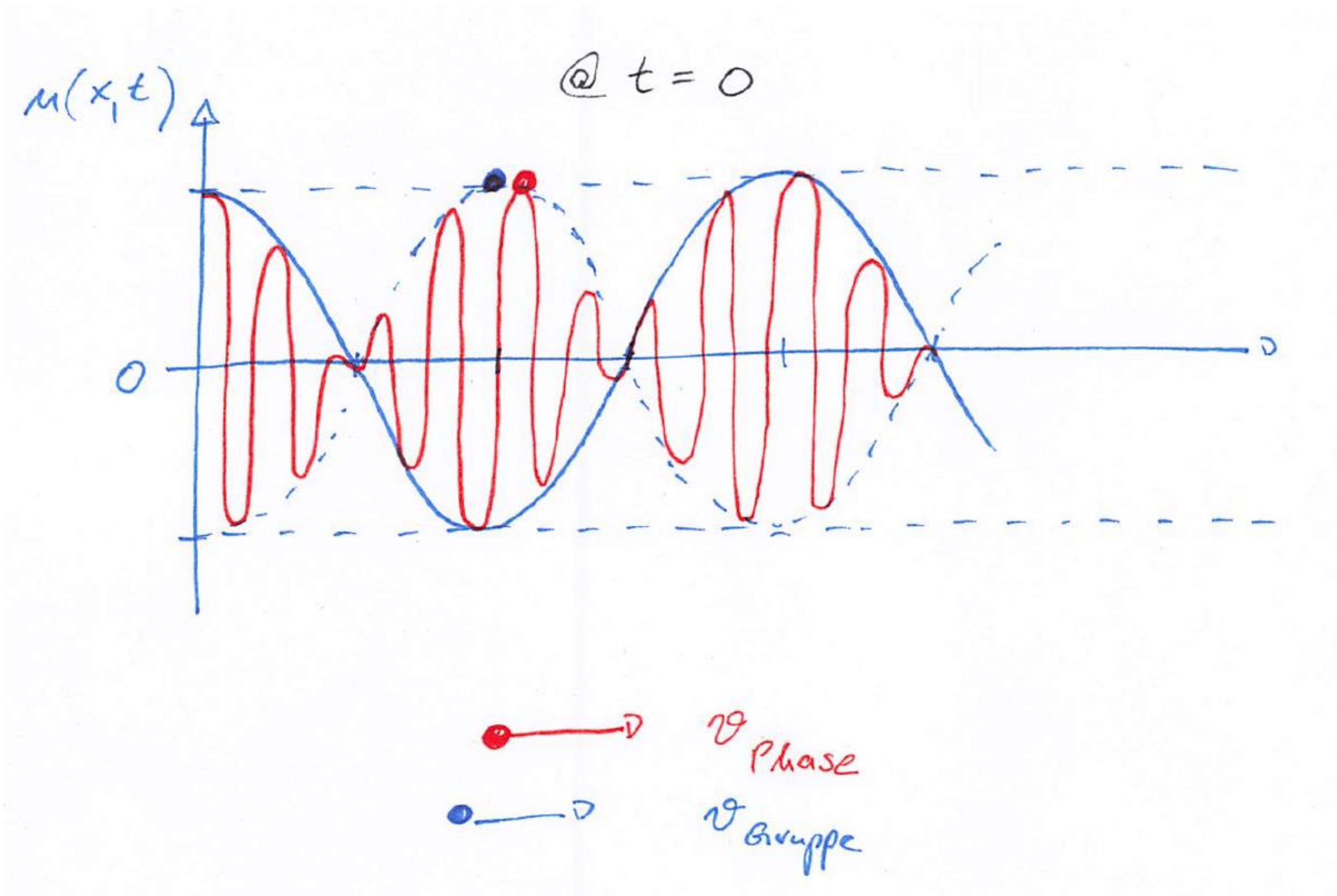
$$\cos(\Delta k\, x - \Delta\omega\, t)$$

langsam veränderlich als Funktion von Ort und Zeit (= Schwebung)

und der Term (die „Trägerwelle“)

$$\cos(kx - \omega t)$$

ist schnell oszillierend.


@ t = 0
u(x,t)
0
v Phase
v Gruppe

Betrachten wir konstantes Argument der Trägerwelle, so erhalten wir mit

$$kx - \omega t = \text{const.}$$

die Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{Phase}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k} = c$$

Betrachten wir konstantes Argument der Einhüllenden, so erhalten wir mit

$$\Delta k\, x - \Delta\omega\, t = \mathrm{const.}$$

die Gruppengeschwindigkeit

$$v_{\mathrm{Gruppe}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \rightarrow \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \quad \text{für } \Delta k \rightarrow 0$$

Spezialfall: Wenn die Phasengeschwindigkeit frequenzunabhängig ist, sind Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit identisch.

Unbedingt Merken

Jupyter Notebook

- Dieses Notebook stellt die raumzeitliche Entwicklung einer Überlagerung aus zwei ebenen elastischen Wellen (siehe $u(x,t)$ in Folie #37) mit Zentralfrequenz ω und Differenzfrequenz $\Delta\omega$ sowie Zentralwellenzahl k und Differenzwellenzahl Δk in Form einer Animation dar.

  Erkennbar ist hierbei, dass die Trägerwelle und die Enveloppe des Wellenpaketes sich im Allgemeinen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewegen.

Beispiel:

Für elastische Wellen in dünnen Platten ergibt sich die anomale Dispersionsrelation

$$\omega(k) = \text{const.}\, k^2 = bk^2$$

also die Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{Phase}}(\omega) = \frac{\omega}{k} = bk = b\sqrt{\frac{\omega}{b}} = \sqrt{b\omega}$$

und die Gruppengeschwindigkeit

$$v_{\text{Gruppe}}(\omega) = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = 2bk = 2v_{\text{phase}} > v_{\text{phase}}$$

Dieses „anomale“ Verhalten kann man beispielsweise selbst hören, wenn man einen Stein auf die Eisschicht auf einem vereisten See wirft.

Der Aufschlag des Steins entspricht einer δ-förmigen Anregung. So wird ein Wellenpaket lanciert, das viele Frequenzkomponenten enthält.

Man hört dann am Rand des Sees (also nach der Propagation des Wellenpakets über eine gewisse Distanz) ein Geräusch, bei dem zunächst die hohen Frequenzen dominieren und später die tiefen Frequenzen.

Es gibt zudem einen Beitrag der Schallwelle über die umgebende Luft.
Dieser kommt circa zehnmal später an (siehe Kapitel 6).

4.2.2. Stehende Wellen

- Wir betrachten die Überlagerung (Superposition) einer nach rechts laufenden und einer nach links laufenden ebenen Welle mit gleicher Amplitude

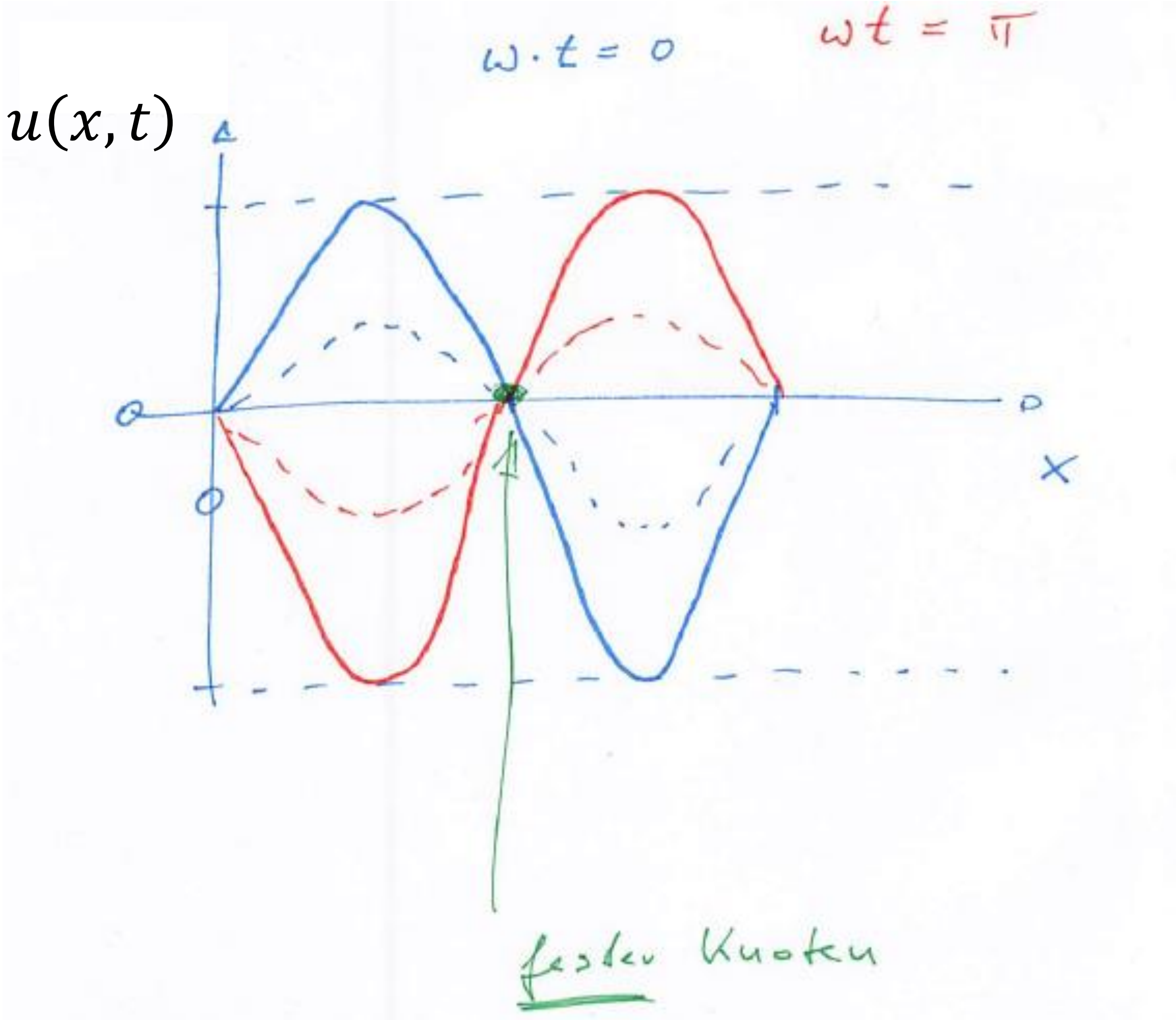
$$u_1(x,t) = u_0 \sin(kx - \omega t)$$
$$u_2(x,t) = u_0 \sin(kx + \omega t)$$

also $$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = u_0(\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)).$$

Mit dem Additionstheorem $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

erhalten wir eine stehende Welle als Lösung der Wellengleichung

$$u(x,t) = 2u_0 \sin(kx)\cos(\omega t)$$



Unbedingt Merken

Vorlesungsexperiment

Vorlesungsexperiment