

5. Mechanik von Flüssigkeiten

- Im Gegensatz zu elastischen Körpern stehen in Flüssigkeiten (und in Gasen) die Positionen der Teilchen nicht mehr in einer festen Beziehung zueinander.

Wir verwenden zur Beschreibung des Zustands daher den **Druck** $P(\mathbf{r}, t)$ * (siehe Kap. 4.1.) und die **Massedichte** $\rho(\mathbf{r}, t)$ (siehe Kap. 3.).

Die Materialeigenschaften beschreiben wir über die **Kompressibilität** κ , das Inverse des **Kompressionsmoduls** $B = \kappa^{-1}$ (siehe Kap. 4.1.). Das **Schermodul** (siehe Kap. 4.1.) **von Flüssigkeiten und Gasen ist Null, $G = 0$.**

* Das Symbol P haben wir im Kap. 2.1.6. auch schon für die Leistung verwendet. Nicht verwechseln!

- Häufig nähert man Flüssigkeiten als **inkompressibel** an, d.h., $B \rightarrow \infty$ bzw. $\kappa = 0$ oder $\rho = \text{const.}$ (Bei Gasen ist diese Näherung nicht sinnvoll.)

Vorsicht: In dieser Näherung wird die Schallgeschwindigkeit unendlich groß (siehe unten).

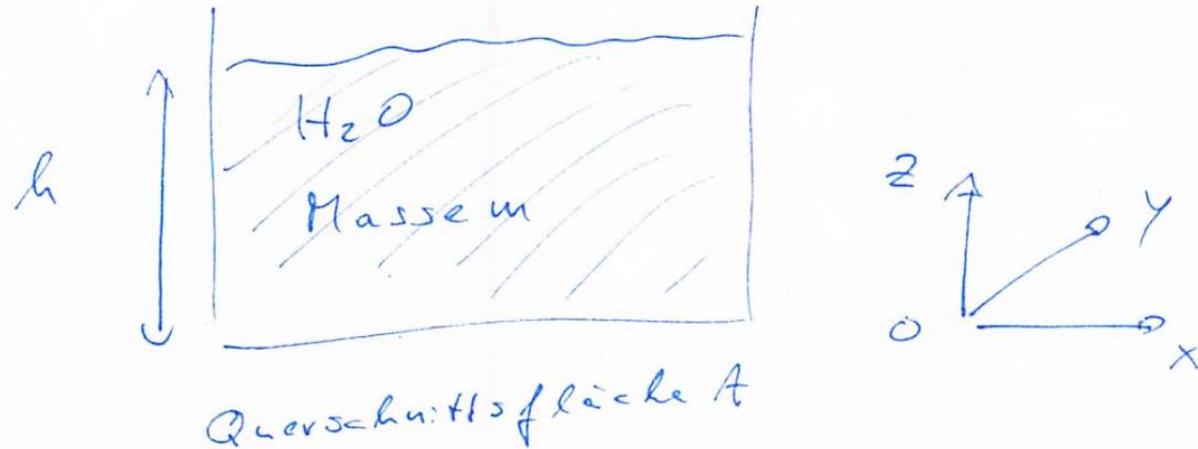
■ **Beispiele:** näherungsweise konstante Massedichten

Wasser: $\rho = 1.00 \text{ g cm}^{-3} = 1.00 \text{ kg dm}^{-3}$

Spiritus: $\rho = 0.83 \text{ g cm}^{-3} = 0.83 \text{ kg dm}^{-3}$

Quecksilber: $\rho = 13.6 \text{ g cm}^{-3} = 13.6 \text{ kg dm}^{-3}$

■ Beispiel: Schweredruck

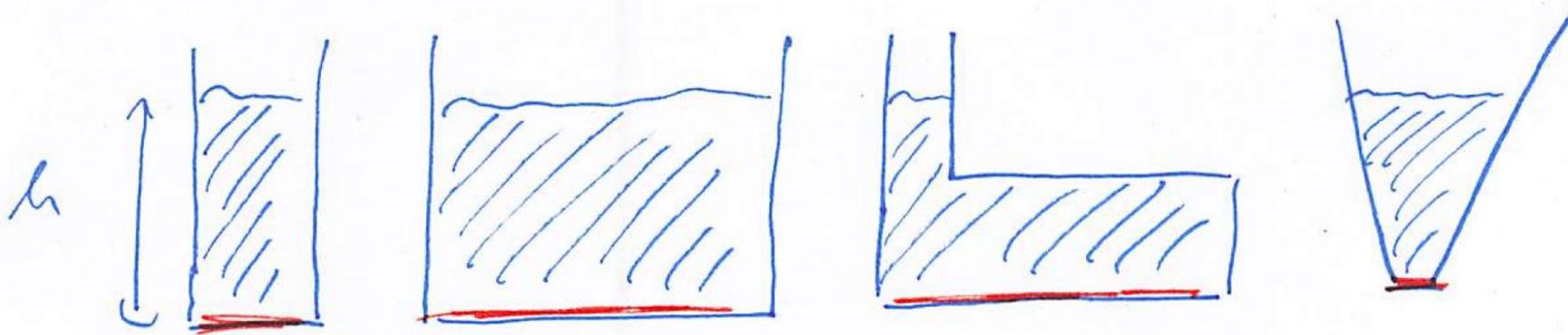


Gewichtskraft des Wassers auf dem Boden des Gefäßes führt zum **Schweredruck**

$$F_G = mg = \rho V g = \rho A h g \Rightarrow \frac{F_G}{A} = P = \rho g h$$

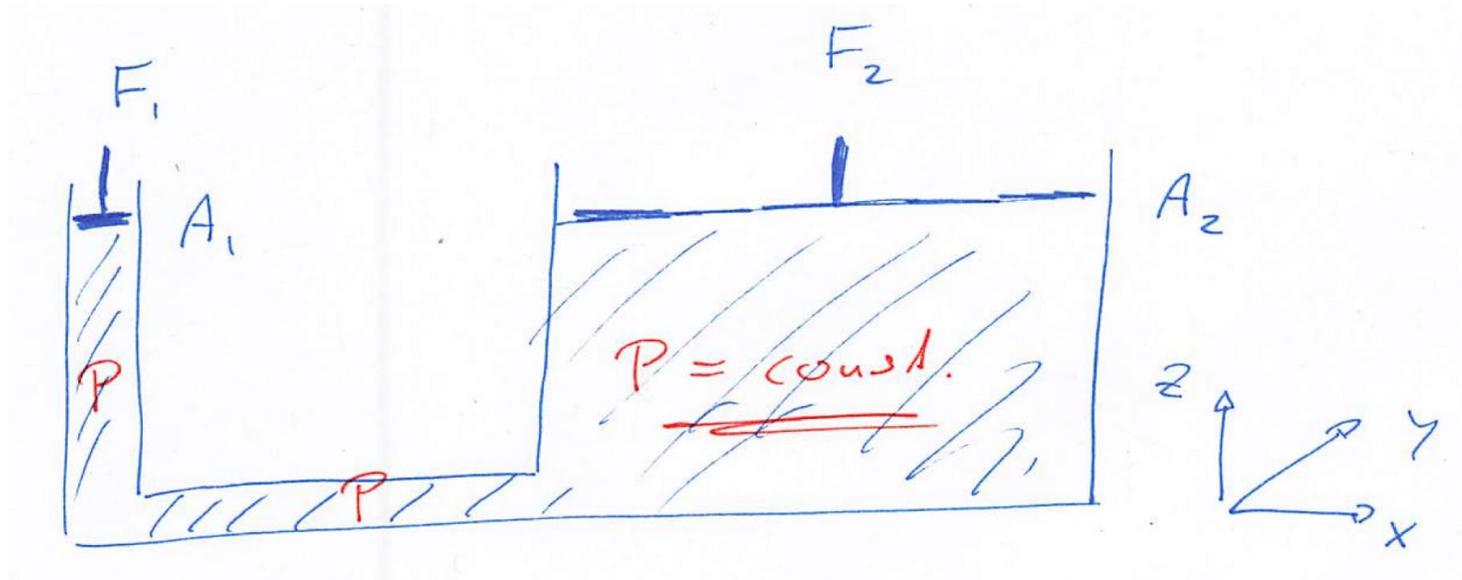
Vorlesungsexperiment

Wichtig ist hierbei, dass der Schweredruck nicht nur auf die xy -Ebene wirkt, sondern auf beliebig orientierte Flächen bei $z = 0$ (Boden des Gefäßes).



Es gilt der Schweredruck $P = \rho gh$ in allen Fällen (= „hydrostatisches Paradoxon“).

■ Beispiel: hydraulische Presse (nicht Schweredruck)



$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} = \text{const.}$$

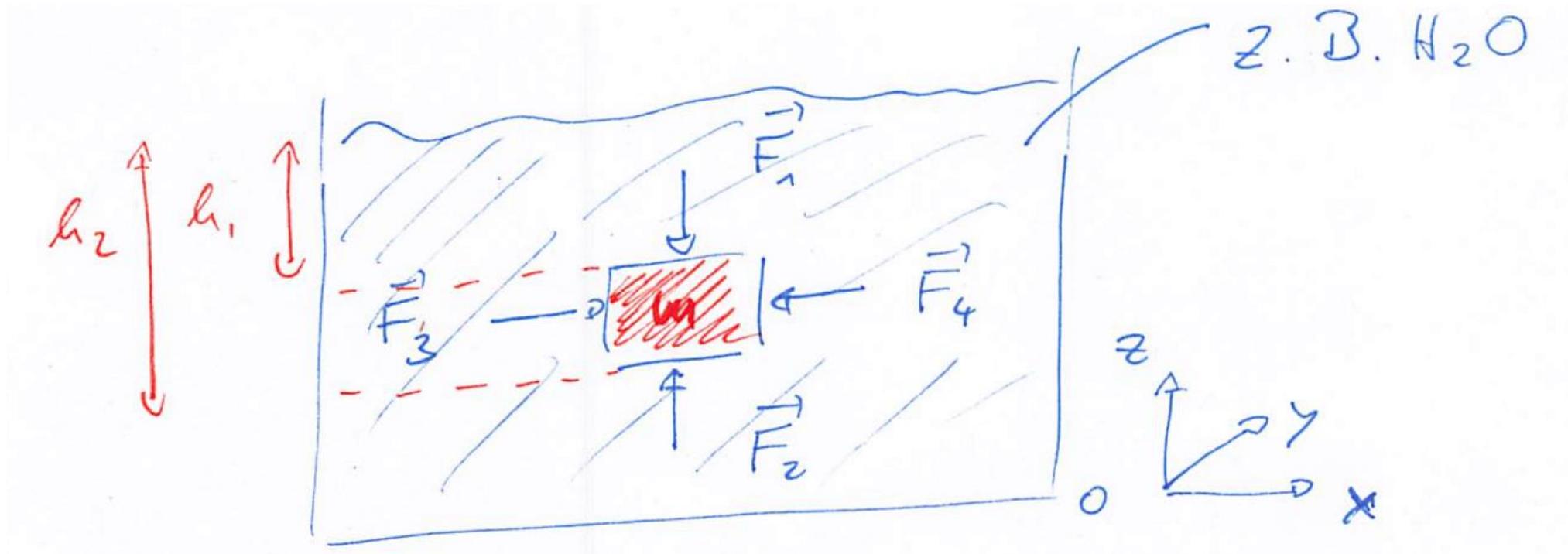
$$A_1 \ll A_2 \Rightarrow F_1 \ll F_2$$

Man kann also mit einer kleinen Kraft F_1 eine große Kraft F_2 herbeiführen, mit Hilfe derer beispielsweise ein Auto angehoben werden kann.

Die Arbeit, die man benötigt, um das Auto auf eine gewisse Höhe zu heben, bleibt aber gleich wegen $\Delta z_1 F_1 = \Delta z_2 F_2$.

5.1. Auftriebskraft und Prinzip von Archimedes

- Auf den Körper mit **Masse m** wirken abgesehen von der Schwerkraft die folgenden Kräfte durch die umgebende Flüssigkeit



Die Kraftvektoren \mathbf{F}_3 und \mathbf{F}_4 kompensieren sich (ebenso die nicht gezeigten \mathbf{F}_5 und \mathbf{F}_6).
Die Kraftvektoren \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 kompensieren sich hingegen nicht.

Es bleibt also nur eine z-Komponente der **Auftriebskraft** $\mathbf{F}_A = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$.
Die Fläche von Boden und Deckel sei $A_1 = A_2 = A$.

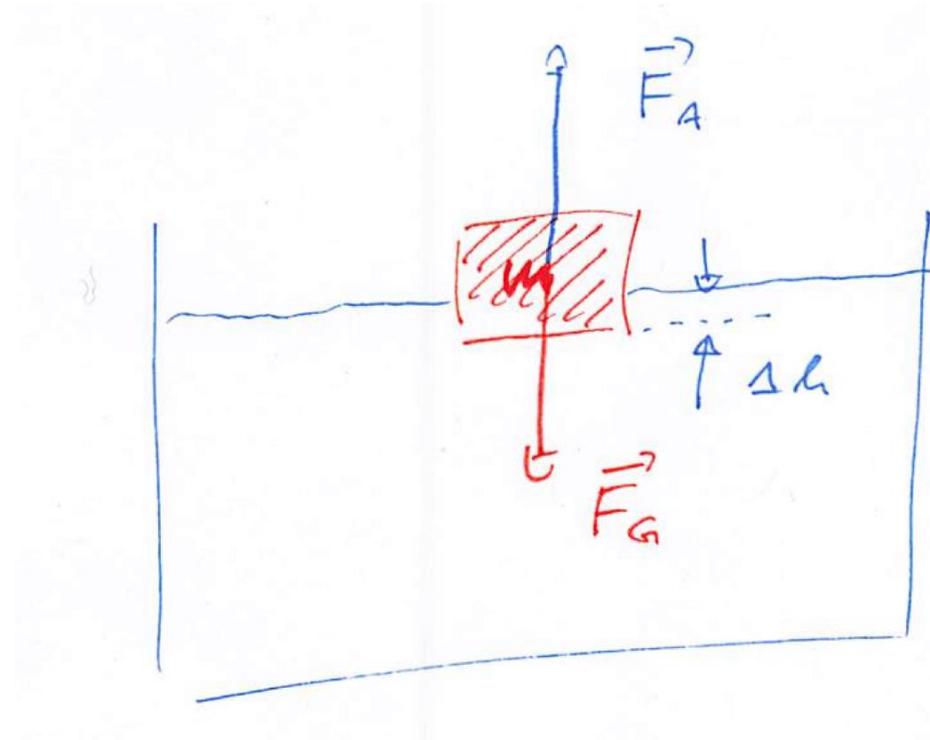
$$\Rightarrow F_A = F_2 - F_1 = \rho_{\text{H}_2\text{O}} g (h_2 - h_1) A = \rho_{\text{H}_2\text{O}} g \Delta h A$$

Der Körper schwimmt falls die Auftriebskraft genauso groß ist wie die Gewichtskraft des Körpers, also $F_A = F_G = mg$

$$\rho_{\text{H}_2\text{O}} \Delta h A = m$$

In Worten ist diese Formel **das Prinzip von Archimedes**:

Bei einem stationär schwimmenden Körper ist die Masse des verdrängten Wassers gleich der Masse des schwimmenden Körpers.

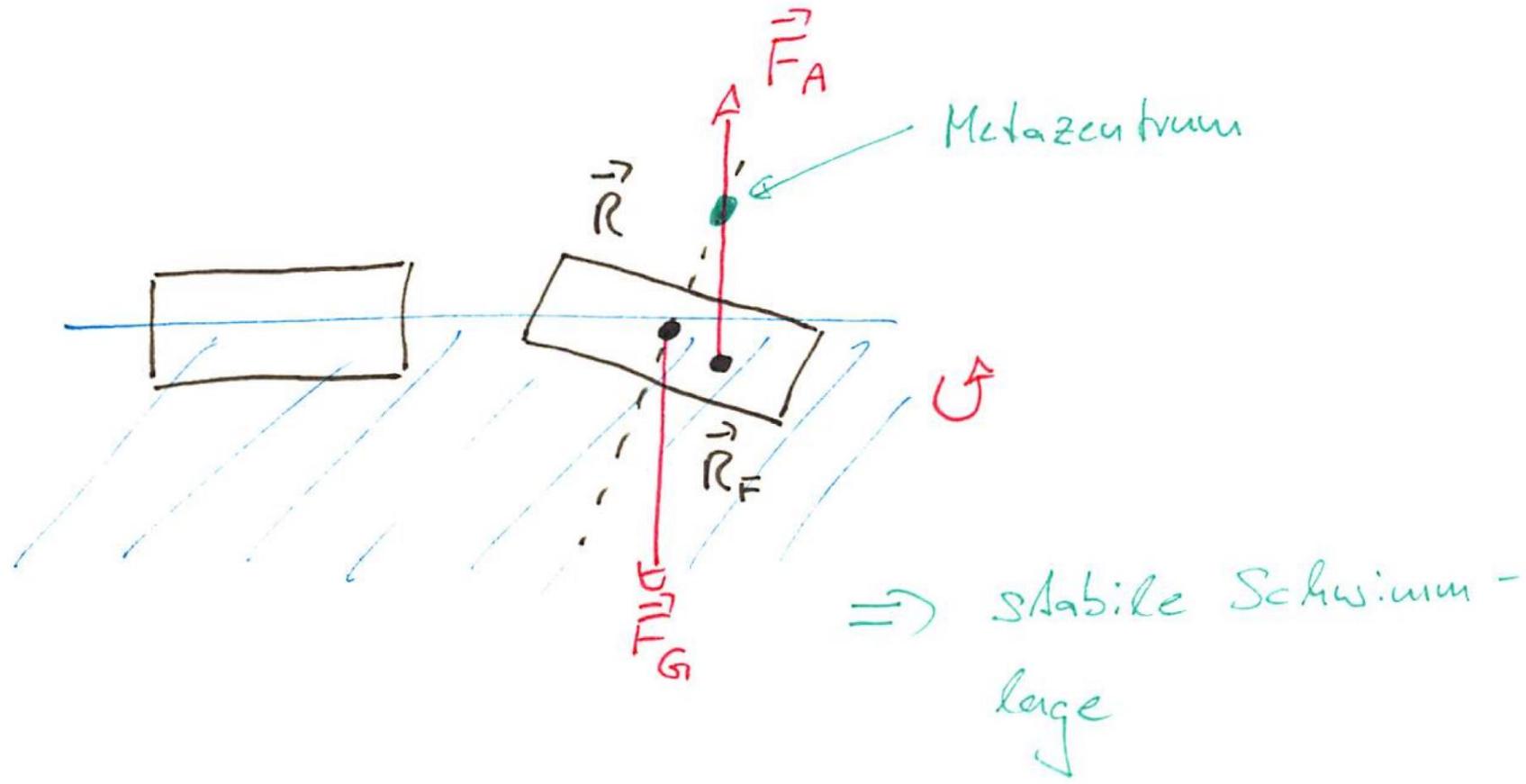


Das Prinzip von Archimedes ist eine **notwendige**, aber **keine hinreichende Bedingung** dafür, dass ein Schiff *stabil* schwimmt. Dies musste der Erbauer der „Vasa“ im Jahr 1628 schmerzlich feststellen.

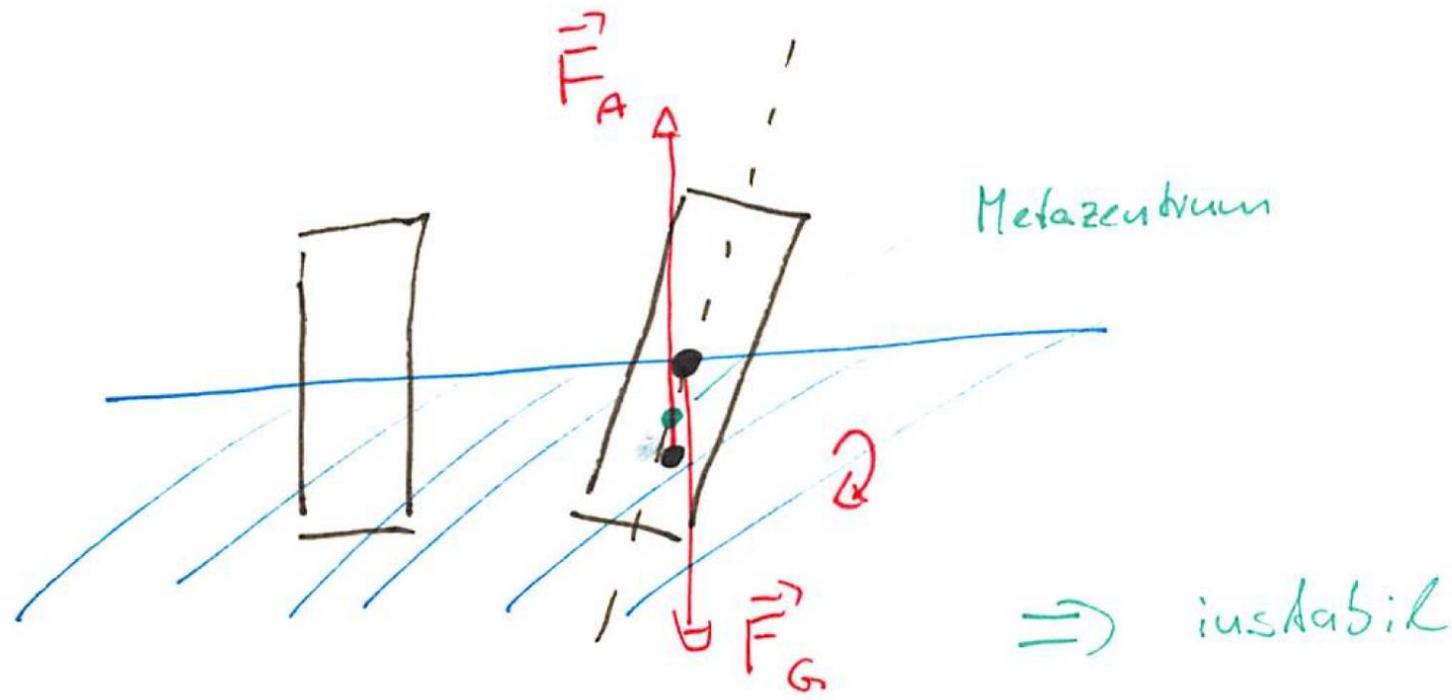


Vorlesungsexperiment

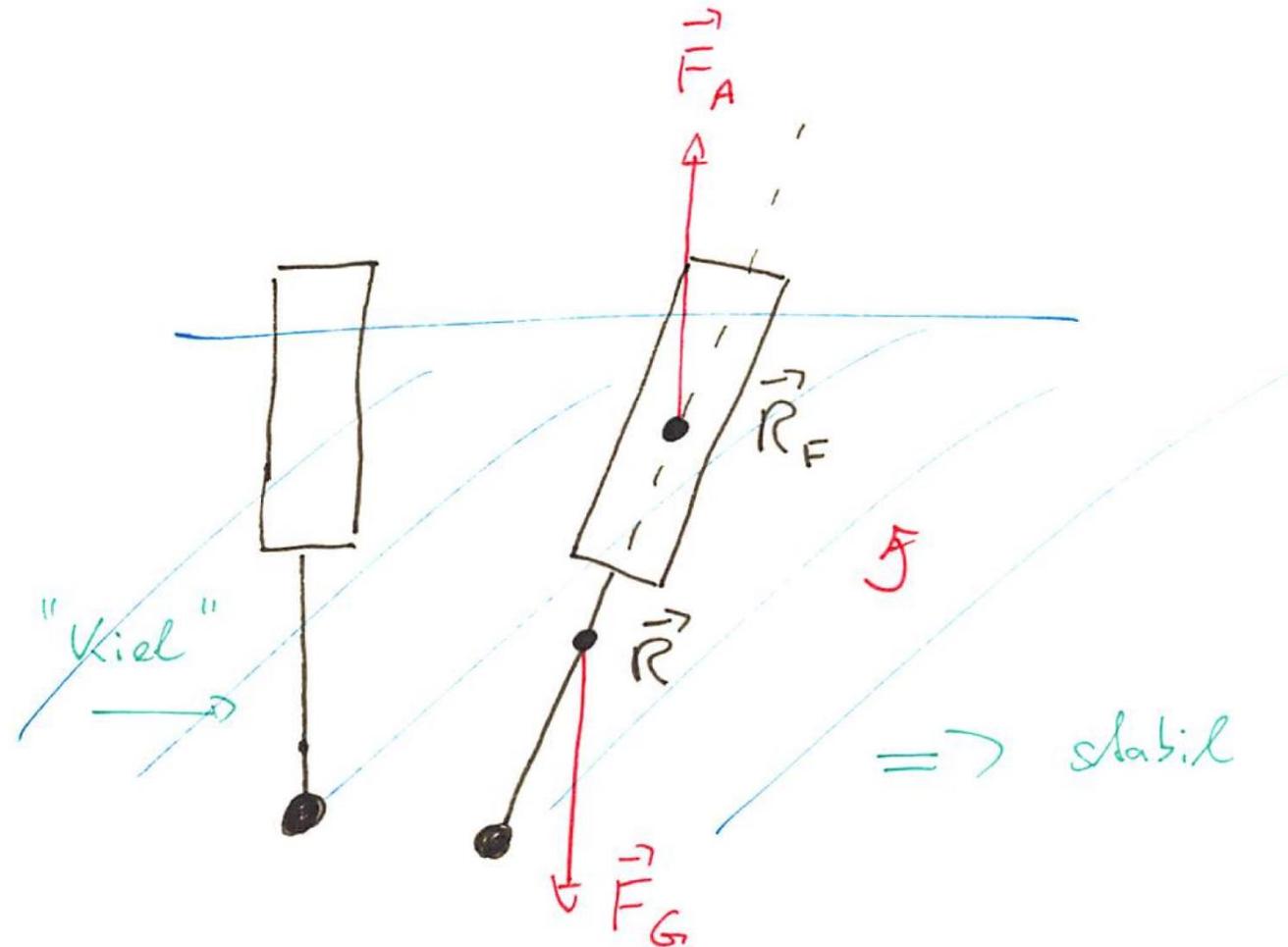
Wir erhalten eine hinreichende Bedingung aus der Betrachtung des Schwerpunktes \mathbf{R} des Körpers (z.B. des Schiffs) und des Schwerpunktes \mathbf{R}_F der verdrängten Flüssigkeit



Wir erhalten eine hinreichende Bedingung aus der Betrachtung des Schwerpunktes \mathbf{R} des Körpers (z.B. des Schiffs) und des Schwerpunktes \mathbf{R}_F der verdrängten Flüssigkeit



Wir erhalten eine hinreichende Bedingung aus der Betrachtung des Schwerpunktes \mathbf{R} des Körpers (z.B. des Schiffs) und des Schwerpunktes \mathbf{R}_F der verdrängten Flüssigkeit



5.2. Die Kontinuitätsgleichung

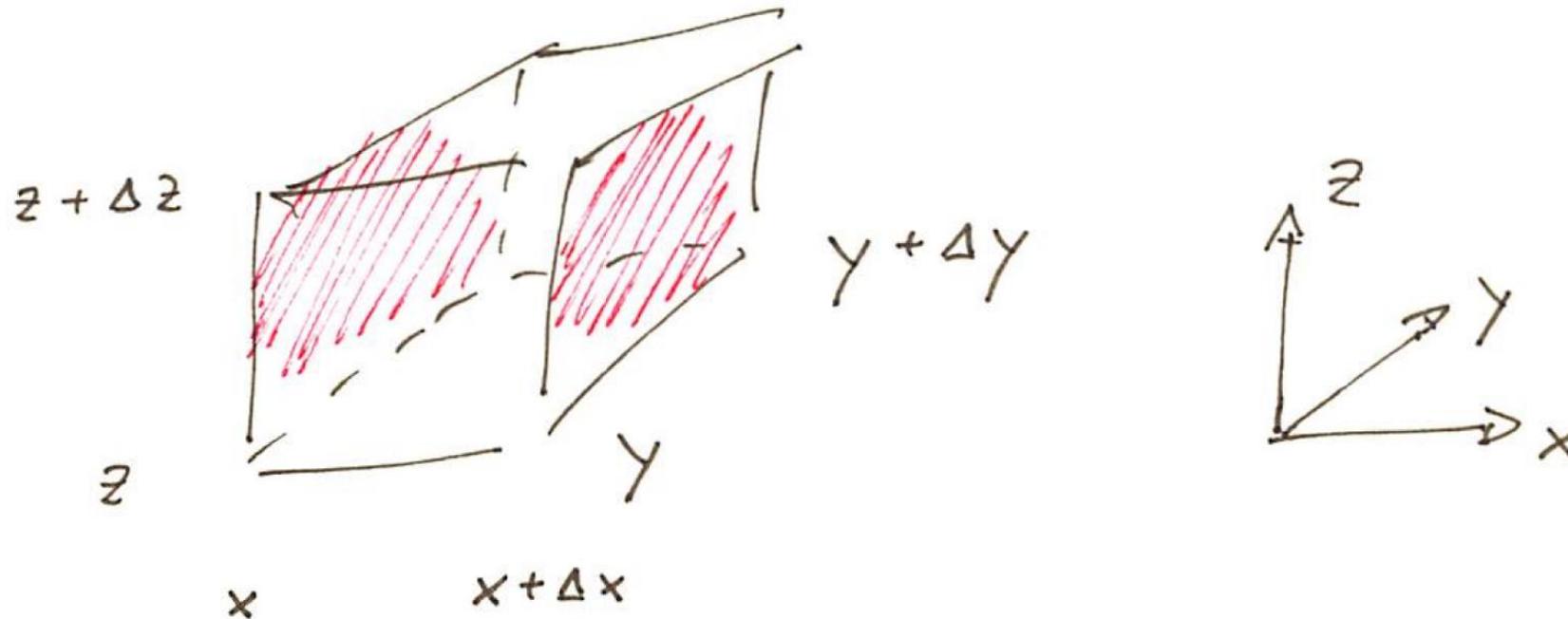
- Das bisher in Kapitel 5 Gesagte erlaubt noch keine vollständige Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Flüssigkeiten (oder Gasen).

Wir müssen die Newtonsche Bewegungsgleichung noch auf Flüssigkeiten übertragen. Dies führt uns zur **Euler-Gln.** bzw. zur **Navier-Stokes Gln.** (Kap. 5.4.) für das **Geschwindigkeitsvektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$** in der Eulerschen Darstellung.

In dieser Darstellung betrachten wir **keine individuellen Teilchen** und deren Trajektorien, sondern die Geschwindigkeit der Atome oder Moleküle an einer bestimmten Stelle (bzw. in einem kleinen Volumenelement) zu einem bestimmten Zeitpunkt.

Aus der **Erhaltung der Teilchenzahl** folgt dann die **Kontinuitätsgleichung**, die wir in diesem Kapitel ableiten und diskutieren wollen.

Wir betrachten ein (infinitesimal) kleines Volumenelement $\Delta x \Delta y \Delta z$ einer Flüssigkeit im Zeitintervall Δt . Die Änderung der Masse Δm in diesem Zeitintervall ist gegeben durch:



Wir betrachten ein (infinitesimal) kleines Volumenelement $\Delta x \Delta y \Delta z$ einer Flüssigkeit im Zeitintervall Δt . Die Änderung der Masse Δm in diesem Zeitintervall ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 \Delta m = & +\rho(x, y, z, t) \cdot (\Delta y \Delta z) \cdot v_x(x, y, z, t) \cdot \Delta t \\
 & -\rho(x + \Delta x, y, z, t) \cdot (\Delta y \Delta z) \cdot v_x(x + \Delta x, y, z, t) \cdot \Delta t \\
 & +\rho(x, y, z, t) \cdot (\Delta x \Delta z) \cdot v_y(x, y, z, t) \cdot \Delta t \\
 & -\rho(x, y + \Delta y, z, t) \cdot (\Delta x \Delta z) \cdot v_y(x, y + \Delta y, z, t) \cdot \Delta t \\
 & +\rho(x, y, z, t) \cdot (\Delta x \Delta y) \cdot v_z(x, y, z, t) \cdot \Delta t \\
 & -\rho(x, y, z + \Delta z, t) \cdot (\Delta x \Delta y) \cdot v_z(x, y, z + \Delta z, t) \cdot \Delta t
 \end{aligned}
 \qquad = \Delta \rho \cdot (\Delta x \Delta y \Delta z)$$

Wir teilen durch Δt und durch $(\Delta x \Delta y \Delta z)$ und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \rho}{\Delta t} + \frac{\rho(x + \Delta x, y, z, t) \cdot v_x(x + \Delta x, y, z, t) - \rho(x, y, z, t) \cdot v_x(x, y, z, t)}{\Delta x} \\ + \frac{\rho(x, y + \Delta y, z, t) \cdot v_y(x, y + \Delta y, z, t) - \rho(x, y, z, t) \cdot v_y(x, y, z, t)}{\Delta y} \\ + \frac{\rho(x, y, z + \Delta z, t) \cdot v_z(x, y, z + \Delta z, t) - \rho(x, y, z, t) \cdot v_z(x, y, z, t)}{\Delta z} = 0 \end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir die Grenzübergänge $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ und $\Delta z \rightarrow 0$

und erhalten die **Kontinuitätsgleichung** in differentieller Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

Hierbei haben wir die Argumente der Übersichtlichkeit halber unterdrückt, also $\rho = \rho(x, y, z, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.

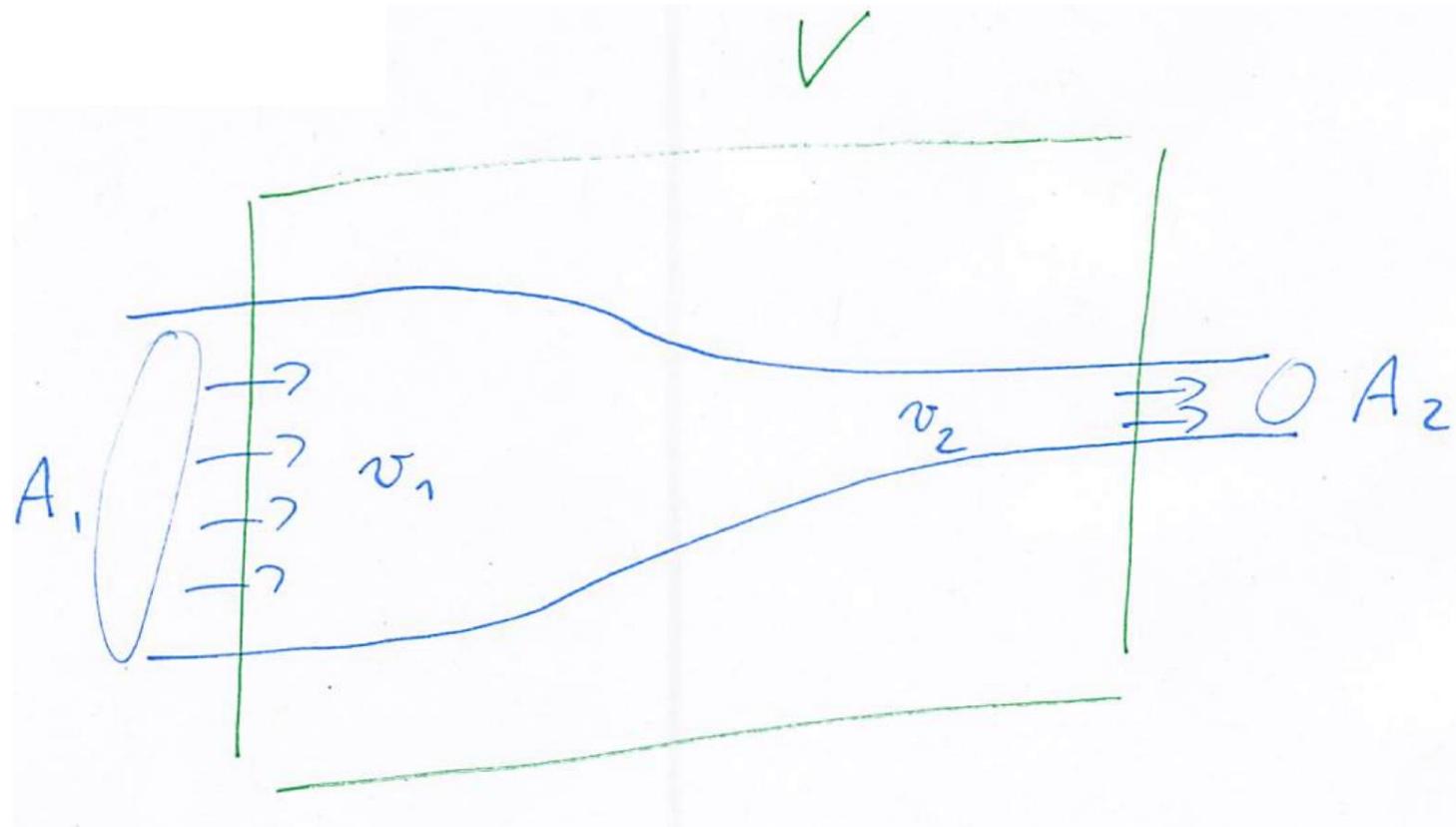
Manchmal führt man auch die Massestromdichte $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ ein mit $[j] = \text{kg s}^{-1} \text{m}^{-2}$.

Für inkompressible Flüssigkeiten vereinfacht sich die **Kontinuitätsgleichung** zu

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$$

Im Kapitel 5.5. kommen wir hierauf zurück, um Strömungsprofile mit Hilfe des Geschwindigkeitspotentials zu berechnen.

■ Beispiel: Strömung durch eine Verengung



Vorlesungsexperiment

Zur Erinnerung (**Einschub 10.**): **Der Gaußsche Integralsatz**

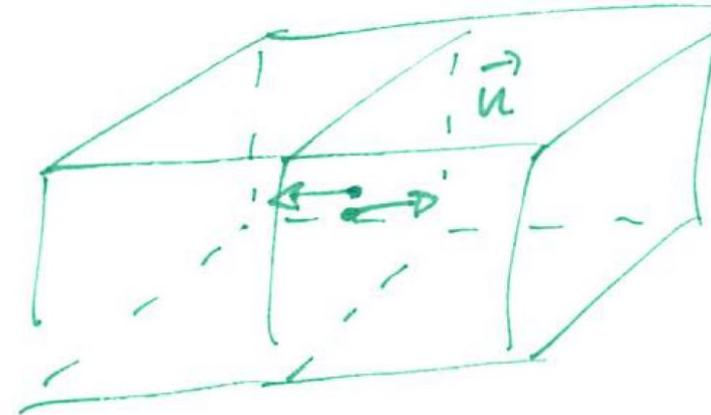
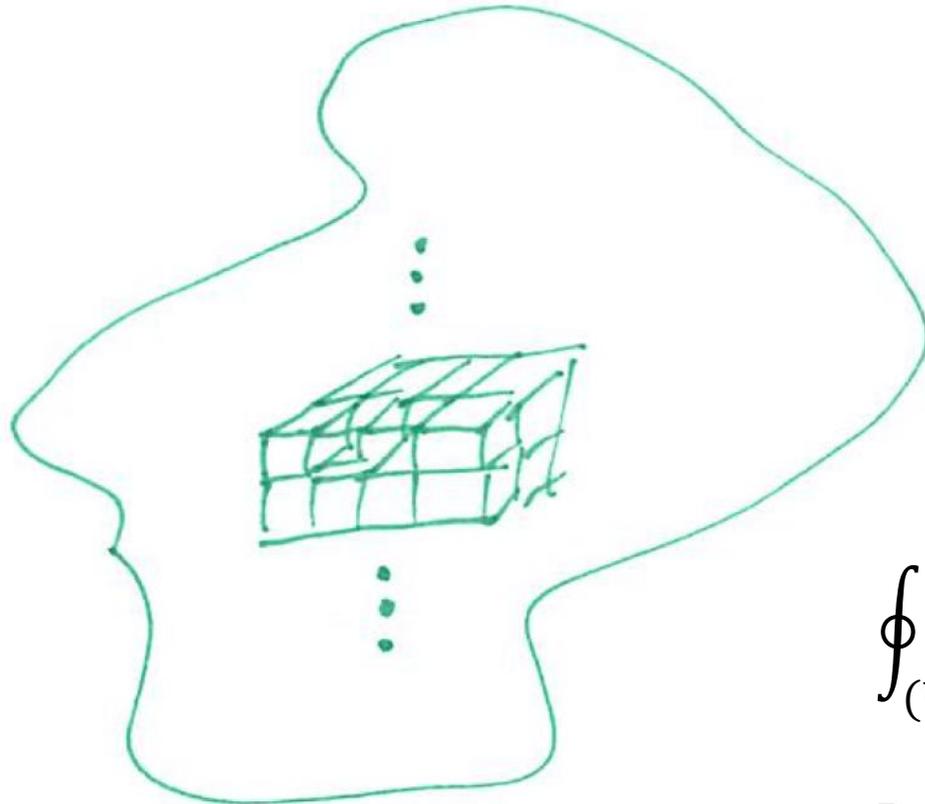
- Der Gaußsche Satz erlaubt den Übergang von der differentiellen Formulierung der Mechanik von Flüssigkeiten auf normale Größen.

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dV = \oint_{(V)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{A}$$

In dem Volumenintegral auf der linken Seite wird die Divergenz des Vektorfelds \mathbf{f} über das Volumen V integriert. Volumenintegrale hatten wir in Kap. 3.2. schon verwendet.

In dem Oberflächenintegral der rechten Seite wird die (nach außen gerichtete) Normalkomponente des Vektors \mathbf{f} bzgl. der Oberfläche über die Oberfläche integriert („ \cdot “ für Skalarprodukt). Hierbei ist die Integrationsfläche (V) die Oberfläche, die das Volumen V umschließt. Diese Oberfläche ist geschlossen (sie hat keine Löcher). Dieser Aspekt wird durch den Kringel am Integral hervorgehoben.

Wir wollen den Gaußschen Satz kurz herleiten. Hierzu betrachten wir eine Diskretisierung des 3D Raums durch kleine Würfel und deren Oberflächen

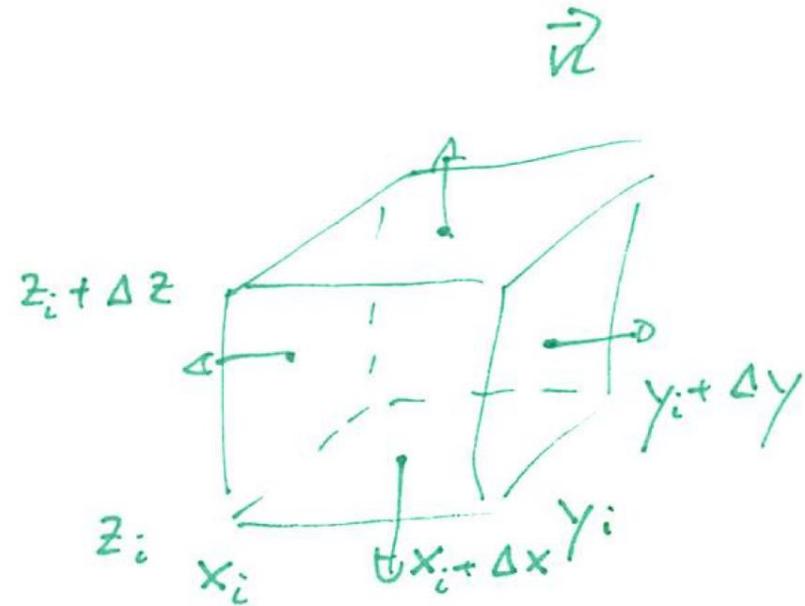


$$\oint_{(V)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{A} = \sum_i \oint_{(V_i)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{A}$$

Beiträge der Kontaktflächen heben sich weg.

$$\begin{aligned}
\oint_{(V)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{A} &= \sum_i \oint_{(V_i)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{A} \\
&= \sum_i \frac{f_x(x_i + \Delta x, y_i, z_i) - f_x(x_i, y_i, z_i)}{\Delta x} \Delta x \Delta y \Delta z \\
&\quad + \frac{f_y(x_i, y_i + \Delta y, z_i) - f_y(x_i, y_i, z_i)}{\Delta y} \Delta x \Delta y \Delta z \\
&\quad + \frac{f_z(x_i, y_i, z_i + \Delta z) - f_z(x_i, y_i, z_i)}{\Delta z} \Delta x \Delta y \Delta z
\end{aligned}$$

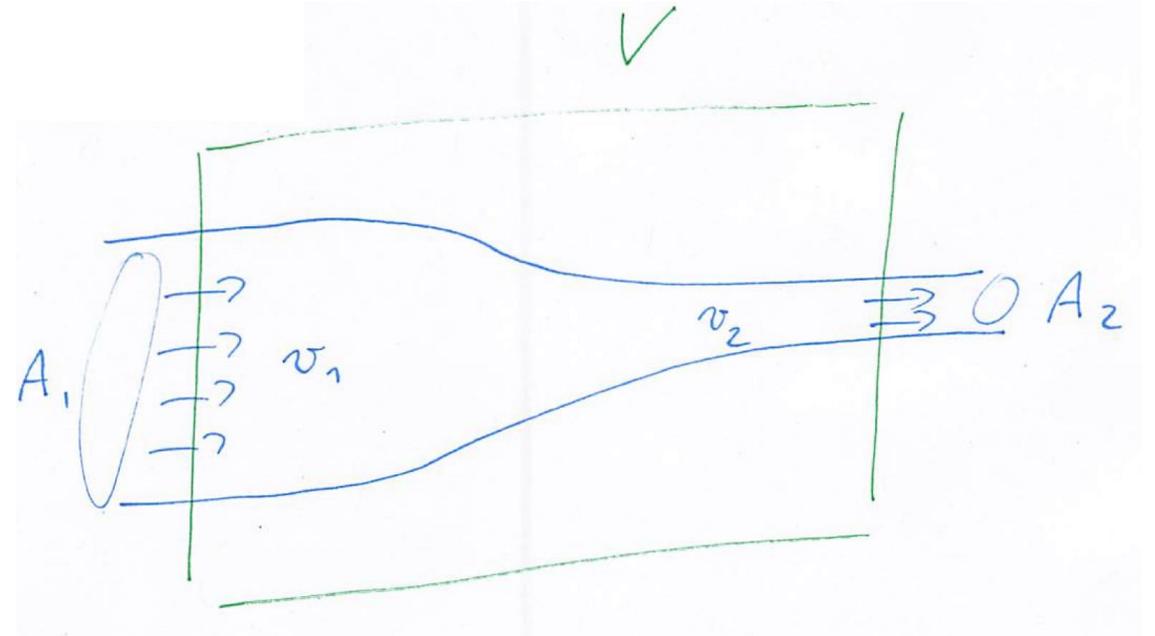
$$\rightarrow \int_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dV \quad \text{für} \quad \Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0; \text{ q. e. d.}$$



■ **Beispiel:** Strömung durch eine Verengung

Annahme: v_1 und v_2 jeweils konstant über den Rohrquerschnitt.

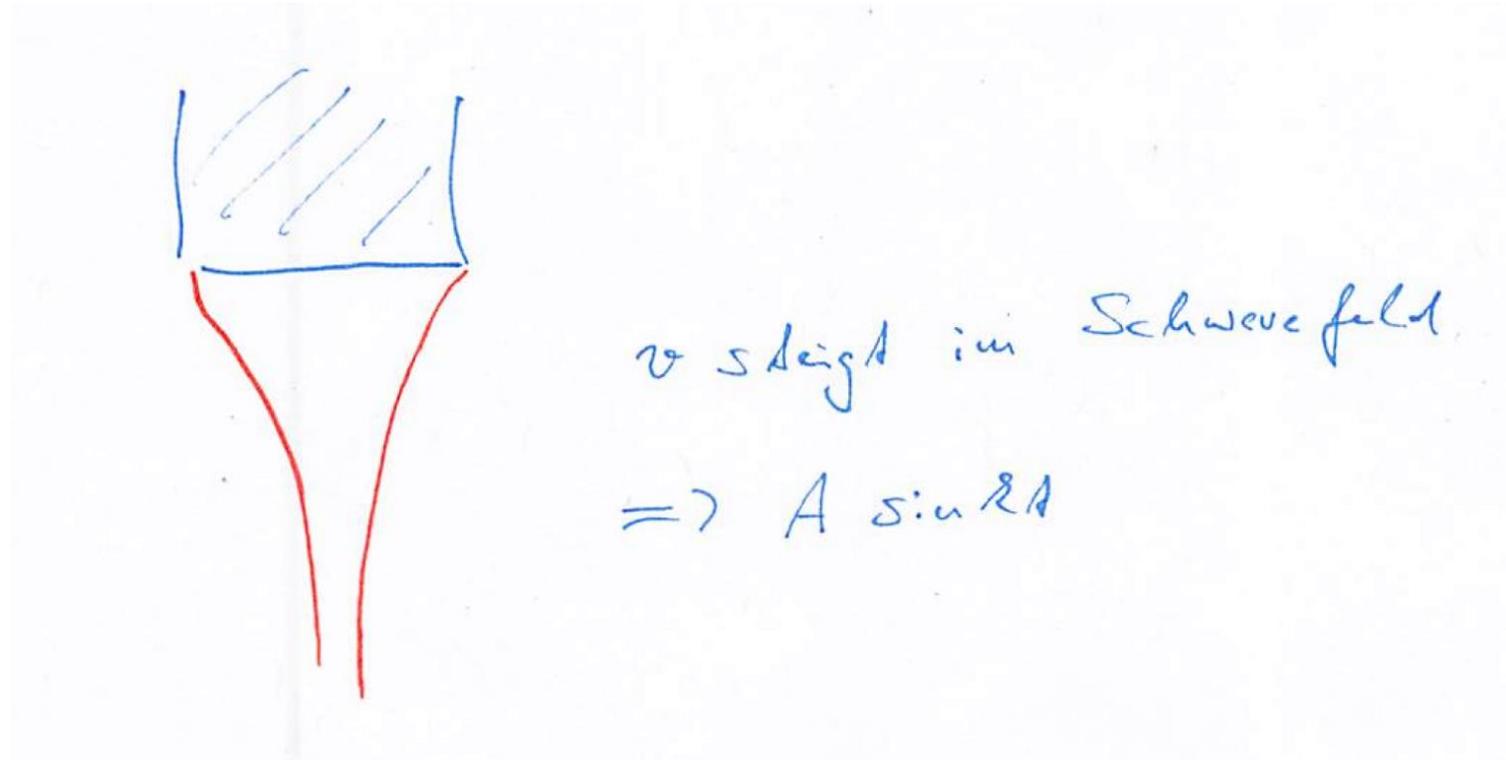
v_1 und v_2 sind normal zur Oberfläche, aber Vorzeichen beachten.



$$\Rightarrow \oint_{(V)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0 = -v_1 A_1 + v_2 A_2 \Rightarrow v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad \text{oder} \quad vA = \text{const.}$$

Vorlesungsexperiment

Wasserhahn



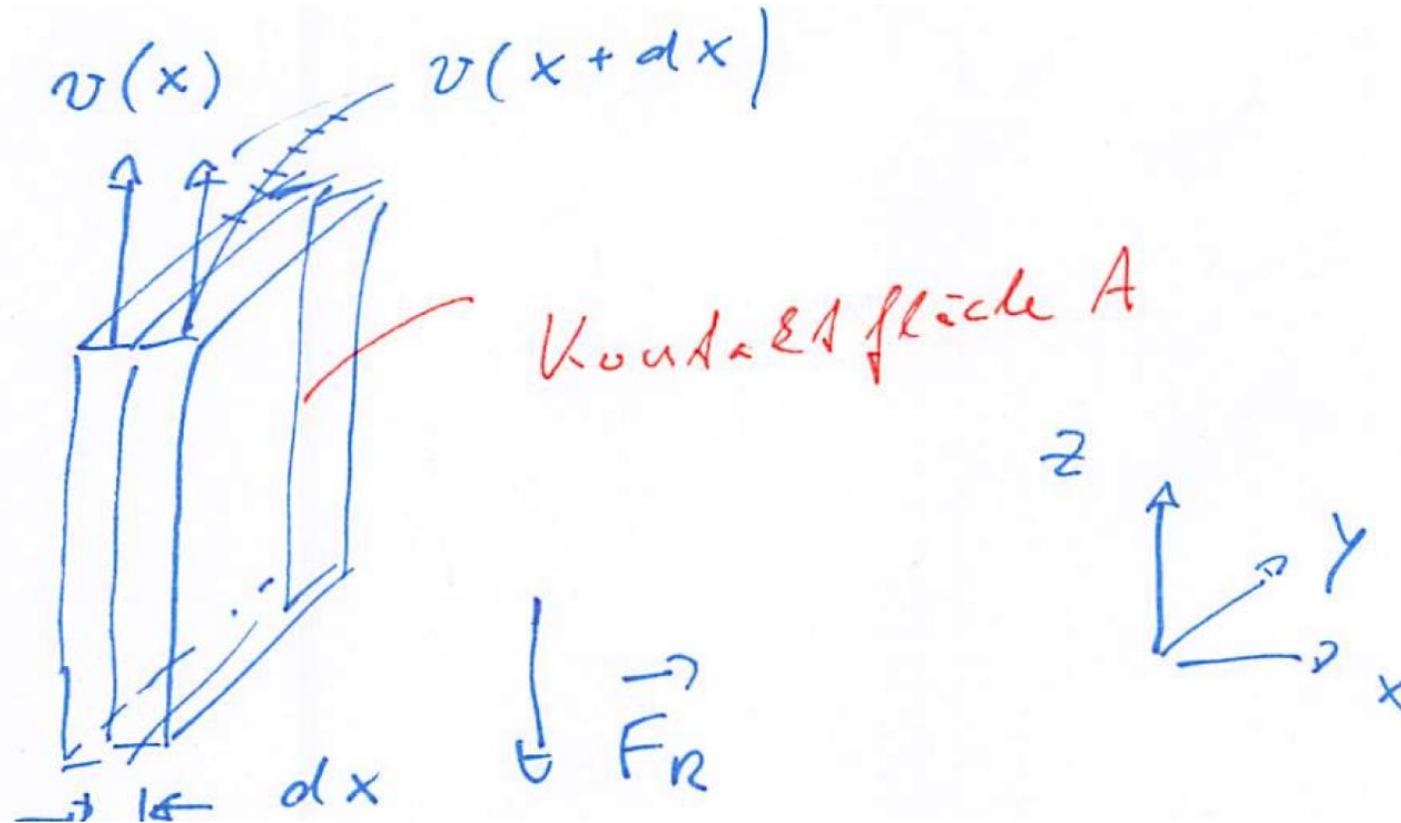
5.3. Das Hagen-Poiseuille Gesetz

- In der Realität ist die Geschwindigkeit einer durch ein zylindrisches Rohr strömenden Flüssigkeit aber **nie** konstant über den Querschnitt, sondern weist ein parabolisches Profil auf. An der Wand des Rohrs ist die Geschwindigkeit gleich Null, in der Mitte ist sie maximal.

Dieses Verhalten ist ein Resultat der endlichen **Reibung**.

Die Reibung ist auch in der Praxis sehr wichtig, weil sie bestimmt, welche Flüssigkeitsmenge man bei einer gegebenen Druckdifferenz zwischen den Enden des Rohrs (oder Schlauchs) pro Zeiteinheit durch das Rohr transportieren kann. Das Hagen-Poiseuillesche Gesetz besagt, dass die Flüssigkeitsmenge proportional zum Radius des Rohrs hoch vier ist und umgekehrt proportional zur Reibung.

Wir betrachten zwei benachbarte Flüssigkeitsschichten



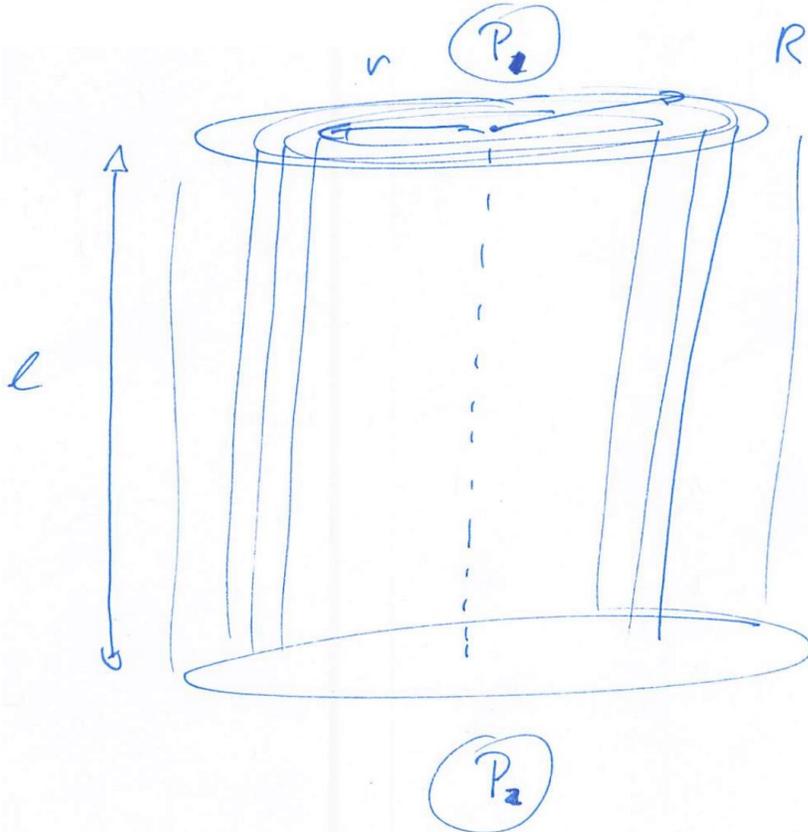
Phänomenologisch erhalten wir für „Newtonsche Flüssigkeiten“ die **Reibungskraft**

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dx}$$

Die **Viskosität** η (auch Scherviskosität genannt) ist ein materialabhängiger Parameter, der i.A. auch von der Temperatur abhängt.

$$[\eta] = \text{N s m}^{-2} = \text{Pa s}$$

- **Beispiel:** Strömungsprofil in einem Hohlzylinder mit Innenradius R



Mantelfläche Zylinder $A = 2\pi r l$

Annahme: Profil zylindersymmetrisch, vernachlässige Schwerkraft, stationärer Zustand

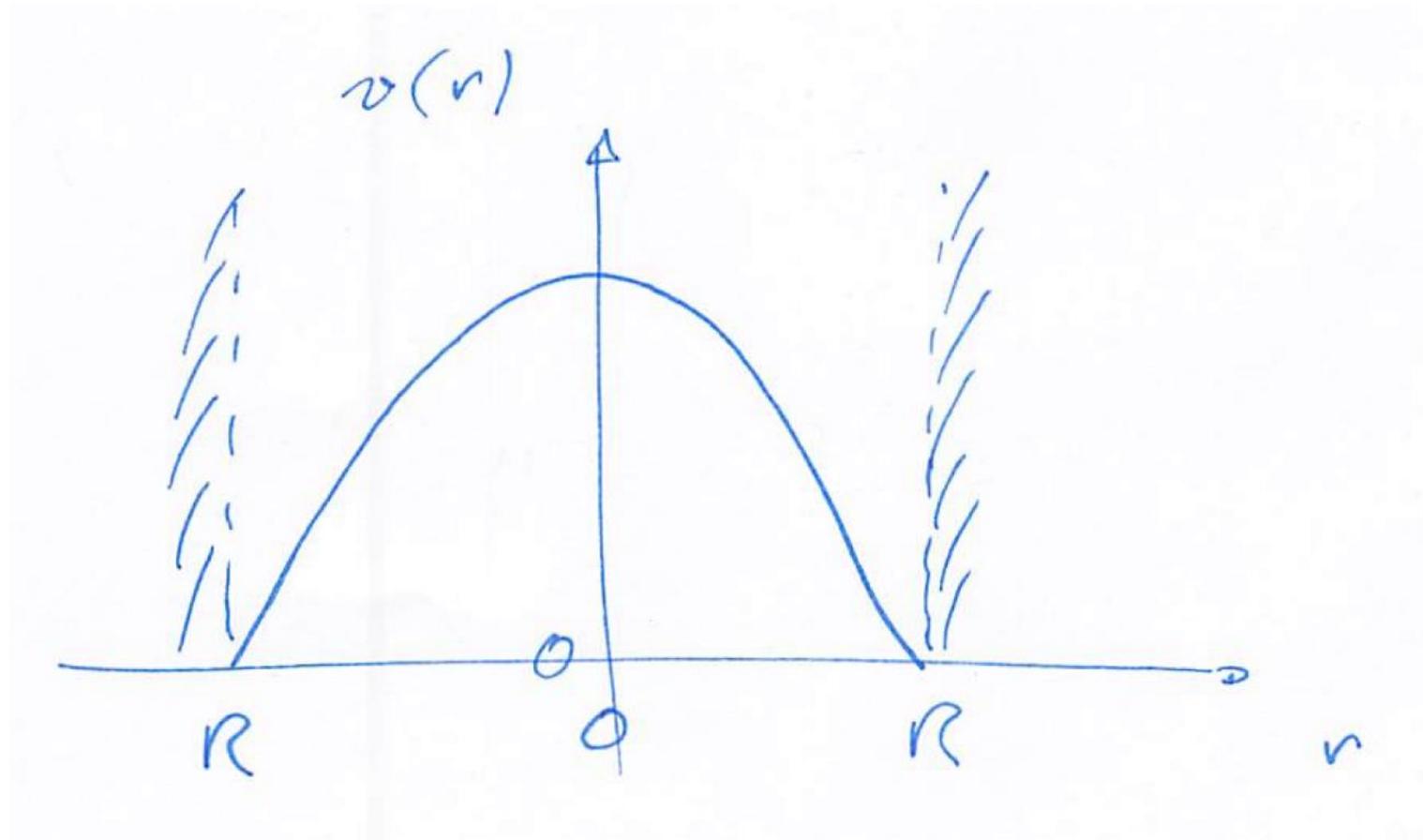
$$\Rightarrow (P_2 - P_1)\pi r^2 + \eta(2\pi r l) \frac{dv}{dr} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dr} = -\frac{(P_2 - P_1)}{2\eta l} r$$

Mit der Randbedingung $v(r = R) = 0$ (sonst unendlich große Reibungskräfte an der Wand)

$$\Rightarrow v(r) = \frac{(P_2 - P_1)}{4\eta l} (R^2 - r^2); \quad 0 \leq r \leq R$$

Graphisch:



Welche Masse pro Zeiteinheit, \dot{M} ($[\dot{M}] = \text{kg/s}$), fließt durch das Rohr?

$$\dot{M} = \int \rho v \, dA = \rho \frac{(P_2 - P_1)}{4\eta l} \int (R^2 - r^2) \, dx dy$$

In Polarkoordinaten haben wir das Flächenelement $dx dy = r \, dr d\varphi$

$$\Rightarrow \dot{M} = \rho \frac{(P_2 - P_1)}{4\eta l} \int_0^R \int_0^{2\pi} (R^2 - r^2) r \, dr d\varphi = 2\pi \rho \frac{(P_2 - P_1)}{4\eta l} \int_0^R (rR^2 - r^3) \, dr$$

$$\Rightarrow \dot{M} = \pi\rho \frac{(P_2 - P_1)}{2\eta l} \left[\frac{1}{2} r^2 R^2 - \frac{1}{4} r^4 \right] \Big|_0^R$$

$$\Rightarrow \dot{M} = \pi\rho \frac{(P_2 - P_1)}{8\eta l} R^4 \propto R^4$$

Dies ist das Hagen-Poiseuillesche Gesetz.

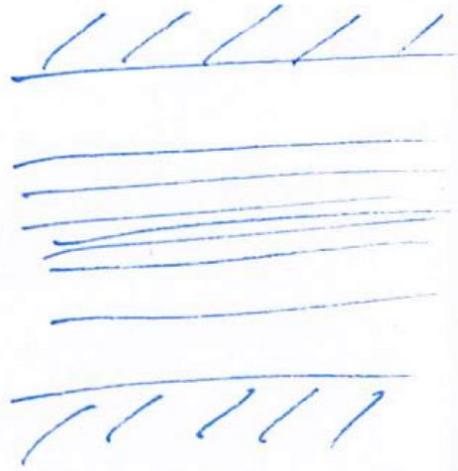
Halbiert sich z.B. der Durchmesser einer Arterie durch „Verkalkung“ bei gleicher Druckdifferenz und festem ρ , so reduziert sich der Blutdurchfluss um einen Faktor 16.

5.4. Die Eulersche Bewegungsgleichung, Navier-Stokes Gleichung

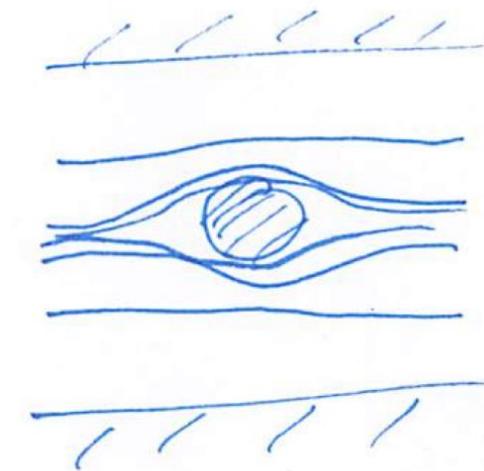
- Unser Ziel ist es nun, eine Gleichung zur Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ aus dem 2. Newtonschen Gesetz abzuleiten.
- Danach gilt es, das Ergebnis sinnvoll zu **visualisieren**. Hierzu verwendet man **Stromlinien**.

Definition: \mathbf{v} steht tangential zu den Stromlinien
 $|\mathbf{v}|$ ist proportional zur lokalen Dichte der Stromlinien

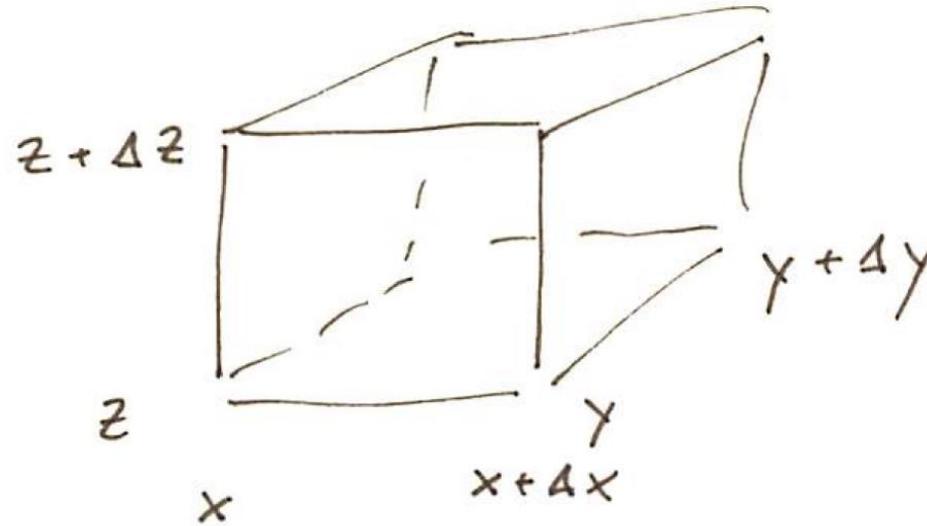
■ Beispiele:



(mit Reibung)



Betrachte Flüssigkeitselement mit konstanter Masse m .



2. Newtonsches Gesetz $\Rightarrow m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ges}}$ (Schwerkraft und durch Druck auf die 6 Seitenflächen).

$$\Rightarrow m \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P(x, y, z, t) - P(x + \Delta x, y, z, t))\Delta y\Delta z \\ (P(x, y, z, t) - P(x, y + \Delta y, z, t))\Delta x\Delta z \\ (P(x, y, z, t) - P(x, y, z + \Delta z, t))\Delta x\Delta y - mg \end{pmatrix}$$

Teile durch $\Delta x\Delta y\Delta z$ und nutze $\rho = \frac{m}{\Delta x\Delta y\Delta z}$

$$\Rightarrow \rho \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{P(x, y, z, t) - P(x + \Delta x, y, z, t)}{\Delta x} \\ \frac{P(x, y, z, t) - P(x, y + \Delta y, z, t)}{\Delta y} \\ \frac{P(x, y, z, t) - P(x, y, z + \Delta z, t)}{\Delta z} - \rho g \end{pmatrix}$$

Betrachte schließlich den Limes $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ und erhalte

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } P - \rho g \mathbf{e}_z$$

Die totale Zeitableitung auf der linken Seite können wir weiterhin ausschreiben wie folgt

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \\
&= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \\
&= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}
\end{aligned}$$

und erhalten damit die **Eulersche Bewegungsgleichung** für kompressible Flüssigkeiten

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla P - \rho g \mathbf{e}_z$$

Dies ist eine nichtlineare partielle Dgln. zur Bestimmung von $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$.

Bislang haben wir **Reibung** vernachlässigt.

Fügen wir Reibung in Form einer **endlichen Viskosität η** *phänomenologisch* hinzu, erhalten wir aus der Eulerschen Bewegungsgleichung die **Navier-Stokes Gleichung**

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla P - \rho g \mathbf{e}_z + \eta \Delta \mathbf{v}$$

Numerische Lösungen dieser Gleichung beschreiben **auch turbulentes Verhalten** über die nichtlineare konvektive Beschleunigungsdichte $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$.

In der Regel kann man die Navier-Stokes Gleichung nur numerisch und unter großem Aufwand lösen.

Unter **Vernachlässigung der Gravitation** und für **inkompressible Flüssigkeiten** kann man diese Gleichung jedoch analytisch skalieren wie folgt

$$t \rightarrow \frac{d_0}{v_0} t' \Rightarrow [t'] = 1 \text{ mit der „charakteristischen Länge“ } d_0$$

$$\mathbf{v} \rightarrow v_0 \mathbf{v}' \Rightarrow [\mathbf{v}'] = 1$$

$$\nabla \rightarrow \frac{1}{d_0} \nabla' \Rightarrow [\nabla'] = 1$$

$$P \rightarrow \rho v_0^2 P' \Rightarrow [P'] = 1$$

(die Striche haben an dieser Stelle nichts mit einer Ableitung zu tun)

Einsetzen führt zu der dimensionslosen Gleichung

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla') \mathbf{v}' = -\nabla' P' + Re^{-1} \Delta' \mathbf{v}'$$

mit der Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{d_0 v_0 \rho}{\eta}, \quad [Re] = 1$$

Überschreitet die Reynolds-Zahl für eine gegebene Geometrie einen bestimmten kritischen Wert, so findet der Übergang zwischen laminarer und turbulenter Strömung statt.

Beispiel: Bei einer Strömung durch ein zylindrisches Rohr (hier ist d_0 der Innendurchmesser) liegt der kritische Wert grob bei

$$R_e^{\text{krit}} \approx 2300$$

5.5. Potentialströmungen und die Laplace Gleichung

- Wir sprechen von einer **Potentialströmung** wenn wir das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ darstellen können wie

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Phi = \nabla \Phi$$

mit dem skalaren **Geschwindigkeitspotential** $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t)$; $[\Phi] = \text{m}^2 \text{s}^{-1}$.

Dies ist immer möglich für **laminare (wirbelfreie) Strömungen** mit

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = 0$$

Die Mathematik ist völlig analog zu der konservativer Kraftfelder in Kap. 2.1.6.

Mit der [Kontinuitätsgleichung](#) für [inkompressible Flüssigkeiten](#) (siehe Kap. 5.2.)
 $\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ erhalten wir die [Laplace-Gleichung](#)

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \Phi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \Phi = 0$$

Vorsicht. Die Laplace- Gleichung sieht „harmlos“ aus, ist aber i.A. schwierig zu lösen, weil die Lösung der Randbedingung genügen muss, dass die lokale Normalkomponente von \mathbf{v} bzgl. eines Hindernisses = 0 ist („die Flüssigkeit kann nicht in das Hindernis hinein strömen“). Dies nennt man eine **Neumann Randbedingung**.

Die Laplace-Gleichung taucht auch in vielen anderen Bereichen der Physik auf, so zum Beispiel in der Elektrostatik, bei Temperaturprofilen und bei Diffusionsproblemen.

Viele Lösungen der Laplace-Gleichungen können mathematisch elegant mit Hilfe von konformen Transformationen erhalten werden.

Vorlesungsexperiment

5.6. Die Bernoulli-Gleichung

- Wir wollen jetzt die **Bernoulli-Gleichung** als Entsprechung des Energieerhaltungssatzes für Teilchen für den Kontext von Flüssigkeiten ableiten.

Hierzu treffen wir die folgenden **Annahmen**:

- Die Strömung sei stationär, d.h. $\frac{\partial}{\partial t} = 0$.
- Es handelt sich um eine wirbelfreie Strömung, d.h. $\nabla \times \mathbf{v} = 0$.
- Reibung sei vernachlässigbar, d.h. $\eta = 0$.
- Die Flüssigkeit sei inkompressibel, d.h. $\rho = \text{const.}$

Wir starten von der Eulerschen Gleichung

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla P - \rho g \mathbf{e}_z$$
$$\underline{\hspace{1cm}}$$
$$= 0$$

und verwenden die **mathematische Identität** (Beweis durch Einsetzen)

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \nabla \times \underbrace{(\nabla \times \mathbf{v})}_{= 0} \right)$$

Mit $\rho = \text{const.}$

$$\Rightarrow \nabla \left(\rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \rho g z + P \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \rho g z + P = \text{const.}$$

Bernoulli-Gleichung

Die drei Beiträge zum Druck nennt man

dynamischer Druck

Schweredruck

Betriebsdruck

z entspricht der Höhe h der Flüssigkeit in der Schreibweise vom Anfang von Kap. 5.

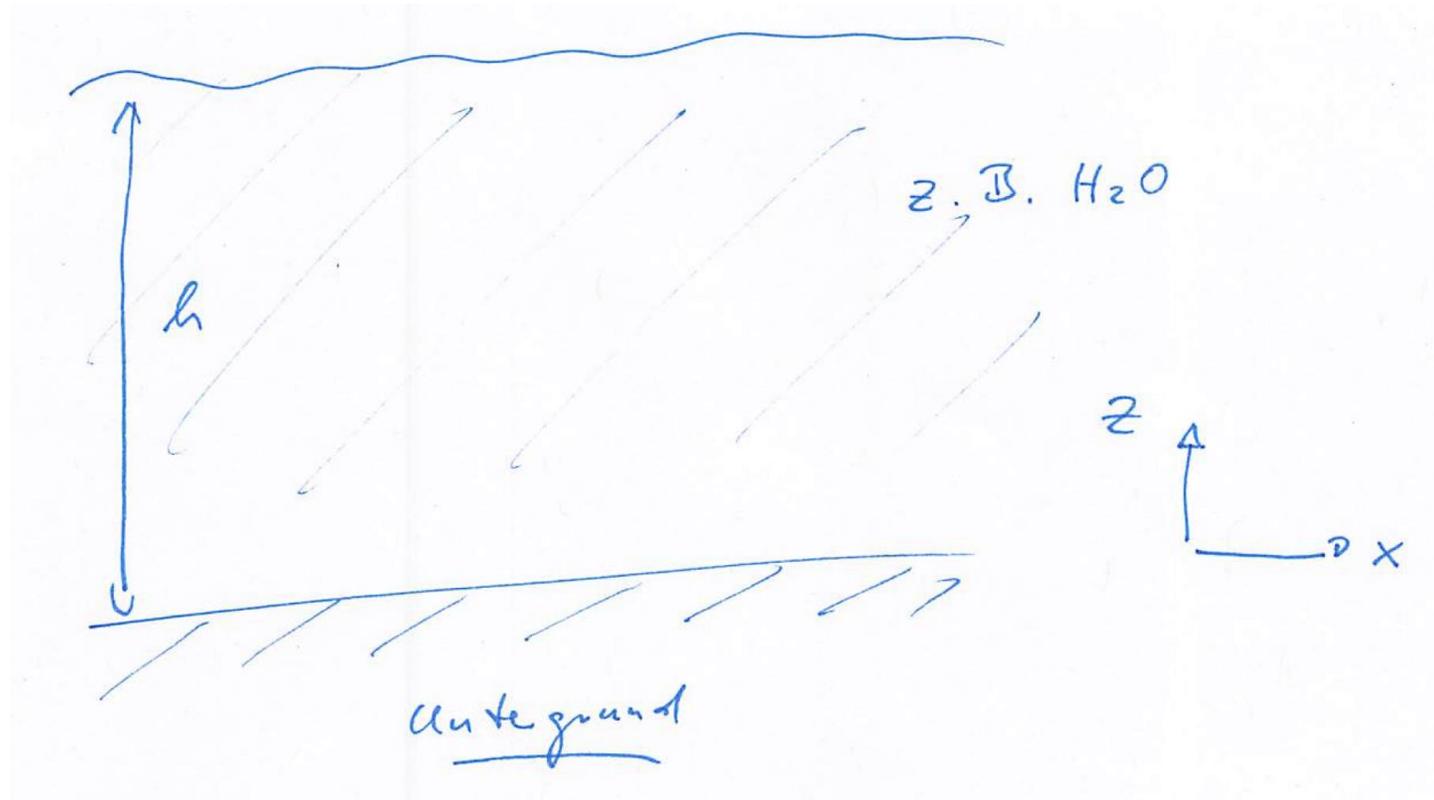
Welcher dieser ganzen Drücke führt jetzt eigentlich zur Gesamtkraft auf eine Oberfläche?

! Der Druck $P + \rho g z$ (siehe Ableitung).

Vorlesungsexperiment

5.7. Oberflächenwellen (Schwerewellen)

- Wir starten von der Laplace-Gleichung und der Eulerschen Gleichung. Wir berücksichtigen (wie bislang auch schon) keine Effekte der Oberflächenspannung.



Für die Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ machen wir den Ansatz:

$$\Phi = \Phi(x, y, z, t) = f(z) \cos(kx - \omega t)$$

Einsetzen führt zu

$$0 = \Delta\Phi = -k^2 f(z) \cos(kx - \omega t) + \frac{d^2 f}{dz^2} \cos(kx - \omega t)$$
$$\Rightarrow \frac{d^2 f}{dz^2} = k^2 f(z)$$

Wir machen für diese gewöhnliche Dgln. den Ansatz: $f(z) = Ae^{\pm kz}$.

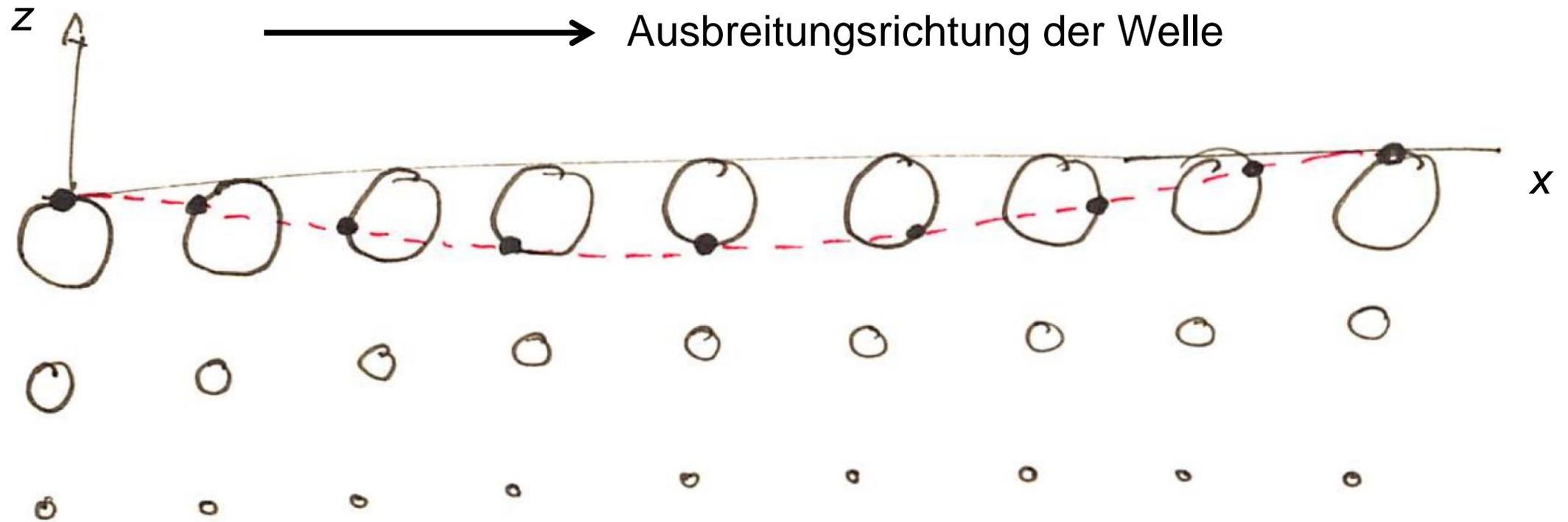
Das „-“ Vorzeichen ist nicht mit den Randbedingungen kompatibel.

Also haben wir $\Phi = \Phi(x, y, z, t) = A e^{kz} \cos(kx - \omega t)$.

Damit wird das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = \nabla\Phi$ zu

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} -A k e^{kz} \sin(kx - \omega t) \\ 0 \\ A k e^{kz} \cos(kx - \omega t) \end{pmatrix}$$

Graphische Darstellung von $\mathbf{v}(x, y, z, t)$:



Der gemachte Ansatz muss zudem die Eulersche Gleichung erfüllen.

Für **große Flüssigkeitstiefe** im Vergleich zur Amplitude der Welle erhalten wir (ohne Ableitung) die Dispersionsrelation

$$\omega^2 = kg$$

Die Phasengeschwindigkeit zeigt also (normale) Dispersion gemäß

$$v_{\text{Phase}}(\omega) = \frac{\omega}{k(\omega)} = g \frac{1}{\omega}$$

Der gemachte Ansatz muss zudem die Eulersche Gleichung erfüllen.

Im **Flachwasserfall** erhalten wir

$$v_{\text{Phase}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh}$$

also dispersionslose Wellen, deren Geschwindigkeit von der Wassertiefe h abhängt.

So kann man sich auch „Brecher“ am Strand anschaulich erklären: Die Spitze des Wellenberges entspricht einer größeren Wassertiefe und läuft damit schneller als der Rest.