6. Mechanik von Gasen

Wir beginnen mit der Kompressibilität κ, die wir in Kap. 4.1. schon eingeführt hatten

$$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P} = B^{-1}$$

Wie ist der Zusammenhang Volumen $V = V(P)$ für Gase?

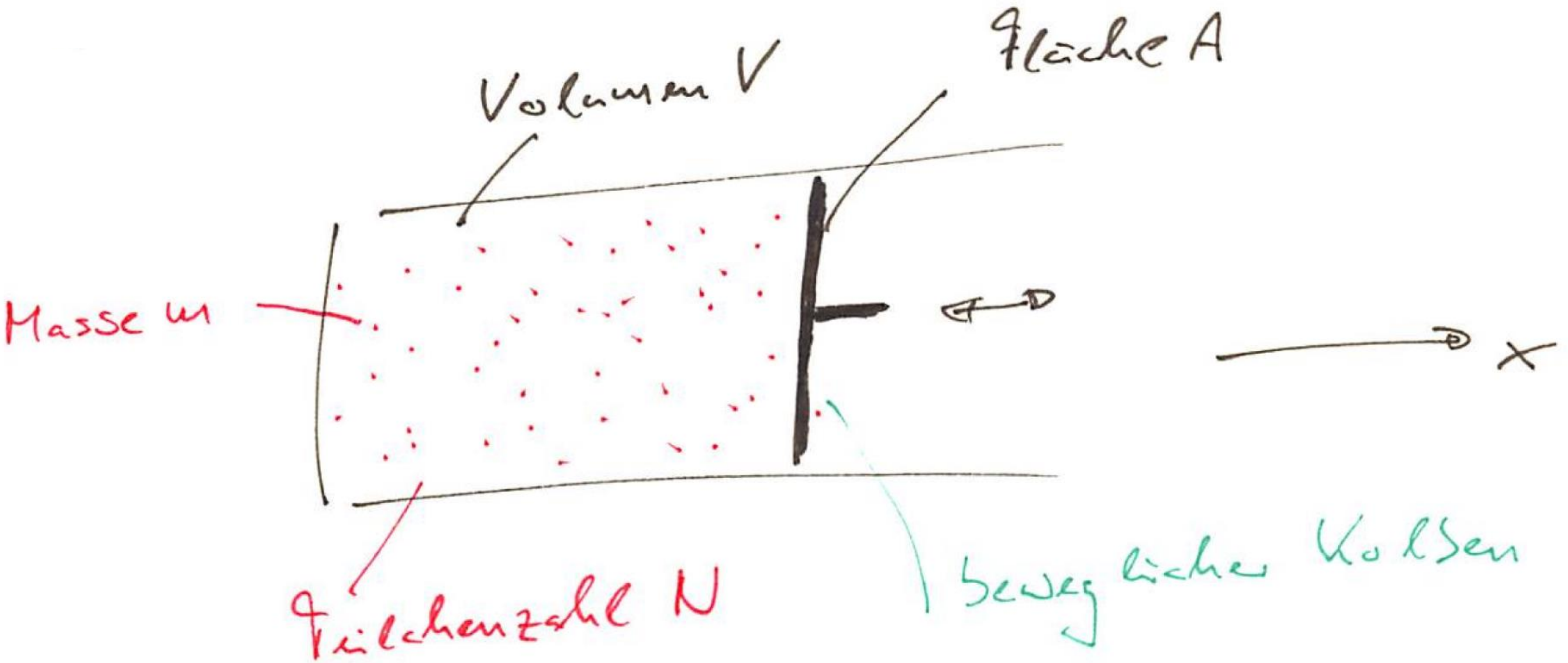
6. Mechanik von Gasen

6.1. Das ideale Gas

Definition: Ein ideales Gas besteht aus einer großen Anzahl von Teilchen (z.B. Atome oder Moleküle) deren gegenseitige Wechselwirkung sehr klein aber nicht gleich Null ist.

Normale Gase bei Umgebungsbedingungen erfüllen diese Bedingung recht gut.

Wir betrachten zur Ableitung des Gesetzes für ideale Gase die folgende Anordnung:



Vorlesungsexperiment

Modellexperiment

Der Druck auf den Kolben rechts resultiert aus Stößen von Teilchen gegen den Kolben.

Problem: Wir kennen die Impulse der stoßenden Teilchen nicht.

Wir betrachten erst einmal Teilchen mit dem Betrag der Impulskomponente p_{1x}.
Im Zeitintervall $\mathrm{d}t$ übertragen diese den Impuls

$$F_{1x}\mathrm{d}t = 2p_{1x}\mathrm{d}N_1$$

auf den Kolben. Die „2“ resultiert aus der Impulserhaltung (die Teilchen ändern durch den Stoß die x-Komponente ihrer Geschwindigkeit).

$\mathrm{d}N_1$ ist hierbei die Zahl der Teilchen die im Zeitintervall $\mathrm{d}t$ mit dem Kolben stoßen.

Diese Zahl erhalten wir aus dem „Dreisatz“

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{N_1} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x\ A}{V} = \frac{1}{2}\frac{v_{1x}\mathrm{d}t\ A}{V}$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ rührt daher, dass sich nur die Hälfte der Teilchen nach rechts bewegt.
Auflösen und Einsetzen in den Kraftstoß ergibt

$$\Rightarrow F_{1x}\ \mathrm{d}t = \frac{A}{V} N_1 \frac{p_{1x}^2}{m}\ \mathrm{d}t$$

Es resultiert der Beitrag zum Druck $P_1 = F_{1x}/A$

$$P_1 = \frac{1}{V} N_1 \frac{p_{1x}^2}{m}$$

Summation über alle möglichen Impulse führt zu

$$P = \sum_i P_i = \frac{1}{V} \sum_i N_i \frac{p_{ix}^2}{m} \quad \Rightarrow \quad PV = \sum_i N_i \frac{p_{ix}^2}{m}$$

$PV = \cdots$ haben wir schon einmal.

Die rechte Seite der letzten Gleichung können wir mit der gesamten kinetischen Energie aller Teilchen im Gas vergleichen

$$E_{\text{kin}} = \sum_i N_i \left(\frac{1}{2} \frac{p_{ix}^2}{m} + \frac{1}{2} \frac{p_{iy}^2}{m} + \frac{1}{2} \frac{p_{iz}^2}{m} \right) = \frac{3}{2} \sum_i N_i \frac{p_{ix}^2}{m}$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt angenommen, dass die drei Raumrichtungen äquivalent zueinander sind (Gleichverteilungssatz). Damit sich eine Gleichverteilung einstellt, darf die Wechselwirkung der Teilchen im Gas nicht gleich Null sein.

Aus dem Vergleich erhalten wir $\Rightarrow PV = \frac{2}{3} E_{\text{kin}}$.

Mit der Definition für die mittlere kinetische Energie pro Teilchen

$$\varepsilon_{\mathrm{kin}} = \frac{E_{\mathrm{kin}}}{N}$$

erhalten wir

$$\Rightarrow \quad PV = N\,\frac{2}{3}\,\varepsilon_{\mathrm{kin}}$$

Bemerkenswerterweise hängt das Produkt PV <u>nicht</u> von der Verteilung der Impulse ab.

Definieren wir nun die thermodynamische Temperatur T im SI Einheitensystem über

$$\frac{2}{3}\varepsilon_{\mathrm{kin}} = k_{\mathrm{B}}T$$

mit der Boltzmann-Konstanten $k_{\mathrm{B}} = 1.380649 \times 10^{-23}\ \mathrm{m}^2\,\mathrm{kg}\,\mathrm{s}^{-2}\,\mathrm{K}^{-1}$,
so erhalten wir die Zustandsgleichung des idealen Gases

$$\boxed{PV = Nk_{\mathrm{B}}T}$$

Unbedingt Merken

Die Temperatur ist ein Maß für die (nicht negative) kinetische Energie des Gases.

Wir sehen, dass die Temperatur ebenso nicht negativ sein kann, also $T \geq 0$.

Die Einheit der Temperatur ist das Kelvin, $[T] = \mathrm{K}$.

> Die Basiseinheit Kelvin wurde 2019 wie gerade beschrieben neu definiert über die Boltzmann-Konstante. Davor war sie über den Tripelpunkt des Wassers definiert.
>
> Bitte nicht „Grad Kelvin“ sagen, die Einheit lautet einfach „Kelvin“.

Unbedingt Merken

Führt man weiterhin noch gemäß des SI Einheitensystems die Avogadro-Konstante N_A ein über

$$N = nN_\mathrm{A}$$

mit $N_\mathrm{A} = 6.02214076 \times 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$ und der Molzahl n mit $[n] = \mathrm{mol}$,

so erhält man

$$\boxed{PV = nN_\mathrm{A}k_\mathrm{B}T = nRT}$$

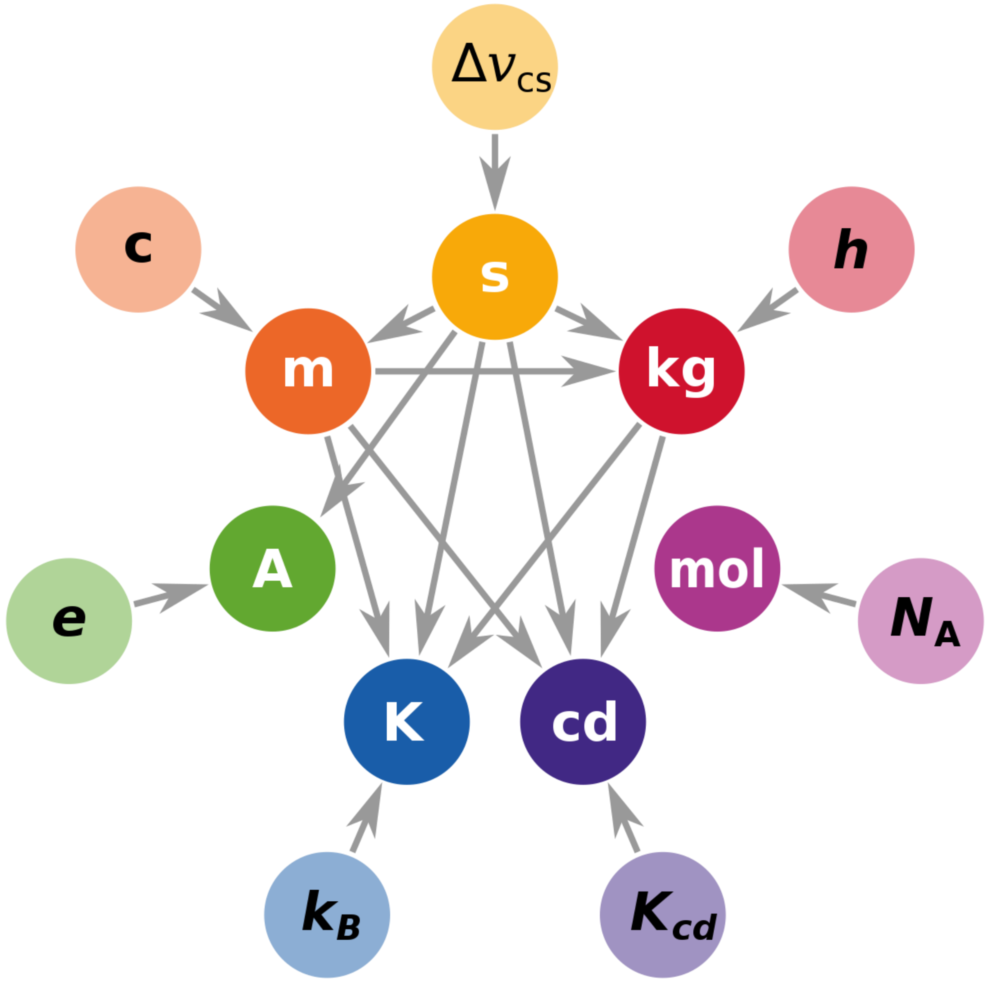
Hierbei ist $R = N_\mathrm{A}k_\mathrm{B} = 8.3144621\ \ \mathrm{J\,mol^{-1}K^{-1}}$ die Definition für die Konstante des idealen Gases.

Unbedingt Merken

Der Charakter der Einheit „Mol“ ist ähnlich wie der der mathematischen Einheit „Radiant“. Diese Einheit ist als Merkhilfe zu verstehen.

Basiseinheiten und Naturkonstanten

Mechanik



Bildquelle: wikipedia.org

Wir kommen nun zurück zur eingangs gestellten Frage nach der Kompressibilität.

Bei konstanter Temperatur T und konstanter Zahl von Teilchen N im Gasvolumen V führt dies zu $PV = \mathrm{const.}$

$$\Rightarrow \kappa = -\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P} = -\frac{1}{V}\left(-\frac{\mathrm{const.}}{P^2}\right) = -\frac{1}{V}\left(-\frac{V}{P}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\kappa = \frac{1}{P} = B^{-1}}$$

Isotherme Kompressibilität eines idealen Gases

Das Kompressionsmodul B ist gleich dem Druck P des Gases, also $B = P$.

Bemerkung: Damit sich eine zeitlich und räumlich konstante Temperatur einstellt, muss man dem System genügend Zeit geben. Stellt sich keine konstante Temperatur ein, ändert sich auch das Kompressionsmodul B gegenüber dem *isothermen* Fall.

In der **Klassischen Experimentalphysik III** werden Sie den Grenzfall *adiabatischer Prozesse* kennen lernen. Für diese gilt $PV^{\kappa} = \mathrm{const.}$ (statt $PV = \mathrm{const.}$) mit dem dimensionslosen Adiabaten-Exponenten κ (nicht zu verwechseln mit der Kompressibilität $\kappa = B^{-1}$). Durch Einsetzen führt dies zu $B_{\mathrm{adiabatisch}} = \kappa\, B_{\mathrm{isotherm}}$. Der Adiabaten-Exponent hängt von der Zahl der Freiheitsgrade der einzelnen Atome bzw. Moleküle im Gas ab.

6.2. Die barometrische Höhenformel

- Zur Erinnerung: Für Flüssigkeiten hatten wir den Schweredruck definiert gemäß

$$P_{\mathrm{G}} = P = \rho g h$$

und waren davon ausgegangen, dass die Massendichte ρ näherungsweise konstant ist als Funktion der Höhe h. Diese Annahme ist für Gase nicht gerechtfertigt (wegen ihrer viel größeren Kompressibilität). Bei N Teilchen der Masse m im Volumen V haben wir

$$\rho = \frac{Nm}{V}$$

Mit $PV = Nk_\mathrm{B}T$

$$\Rightarrow P = \frac{Nm}{V}\frac{k_\mathrm{B}T}{m} = \rho\,\frac{k_\mathrm{B}T}{m} \quad \text{wobei} \quad \frac{k_\mathrm{B}T}{m} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{P_0} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

d.h. doppelter Druck führt zu doppelter Dichte.

Wir verallgemeinern den Schweredruck (lasse Index weg) $P = \rho g h$ zu

$$\mathrm{d}P = -\rho g \mathrm{d}z$$

Das Minuszeichen beschreibt, dass der Druck mit zunehmender Höhe z abnimmt.

Teilen durch $P = \rho \frac{P_0}{\rho_0}$ ergibt

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0 g}{P_0} \cdot \mathrm{d}z$$

Integration und die Wahl $\rho_0 = \rho(z = 0)$ und $P_0 = P(z = 0)$ führt zu

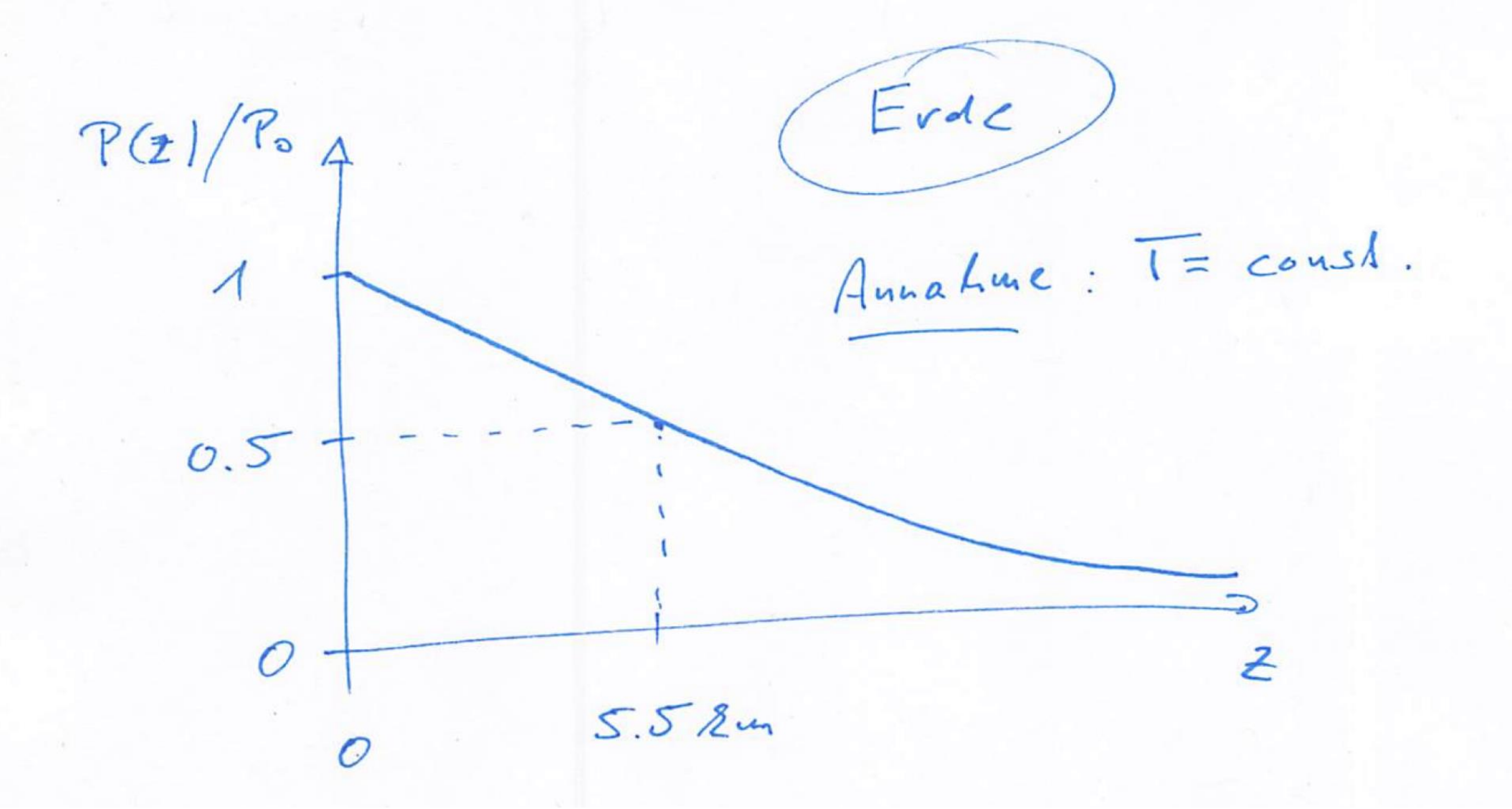
$$\Rightarrow \int_{P(0)}^{P(z)} \frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{\rho_0 g}{P_0} \int_0^z \mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{P(z)}{P(0)}\right) = -\frac{\rho_0 g}{P_0}\, z$$

$$\Rightarrow \boxed{P(z) = P_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{P_0} z}}$$

Diese barometrische Höhenformel beschreibt den exponentiellen Abfall des Drucks mit der Höhe $z = h$ über dem Erdboden.

Graphisch:



Bei genauerer Betrachtung ist die Temperatur in der Erdatmosphäre nicht konstant, sondern nimmt mit steigender Höhe ab. Dieser Umstand führt zu Korrekturen zur barometrischen Höhenformel.

Vorlesungsexperiment

Modellexperiment zur Temperatur

phyphox®
physical phone experiments

Vorlesungsexperiment

6.3. Auftriebskräfte

- Bei Auftriebskräften, zum Beispiel für Flugzeuge in Luft, argumentiert man häufig mit der Gleichung von Bernoulli (siehe Kap. 5.6.).

$$\rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \cancel{\rho g z} + P = \text{const.}$$

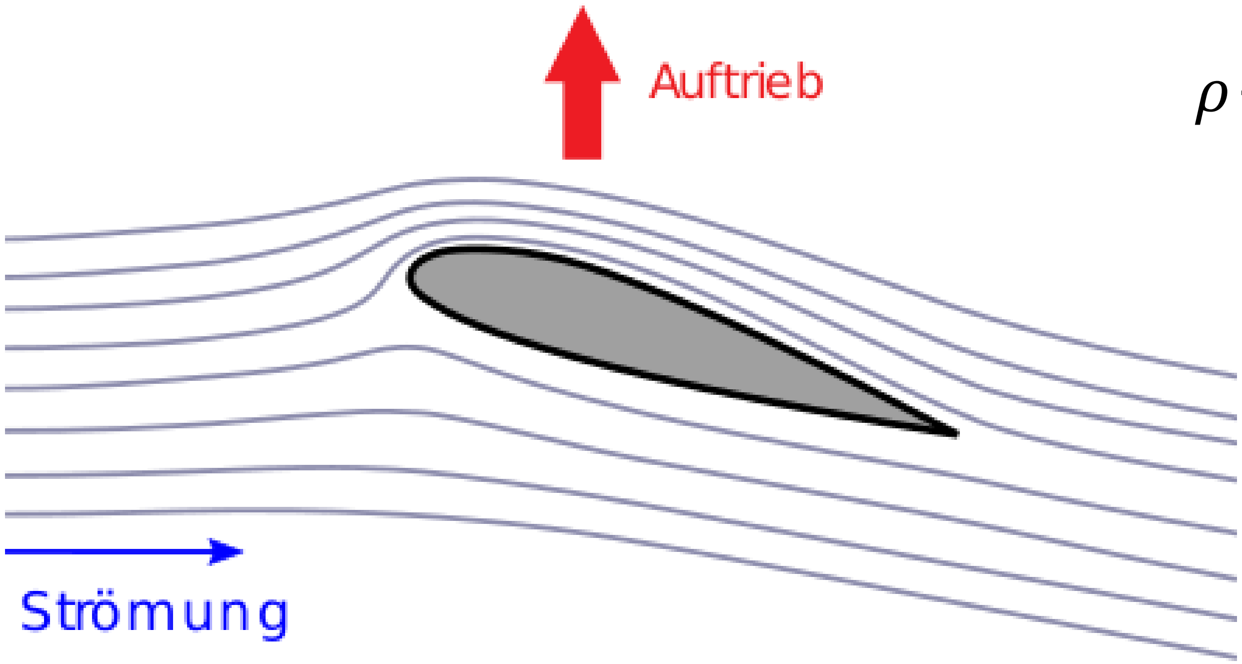
Diese Argumentationen muss man jedoch mit Vorsicht genießen, weil wir bei der Ableitung der Gleichung von Bernoulli angenommen hatten, dass die Flüssigkeit inkompressibel ist. Diese Annahme ist für Gase nicht wirklich gerechtfertigt.

Weiterhin vernachlässigen wir den Schweredruck, bzw. nehmen an, dass er konstant ist und abgezogen werden kann.

Vorlesungsexperiment

Vorlesungsexperiment

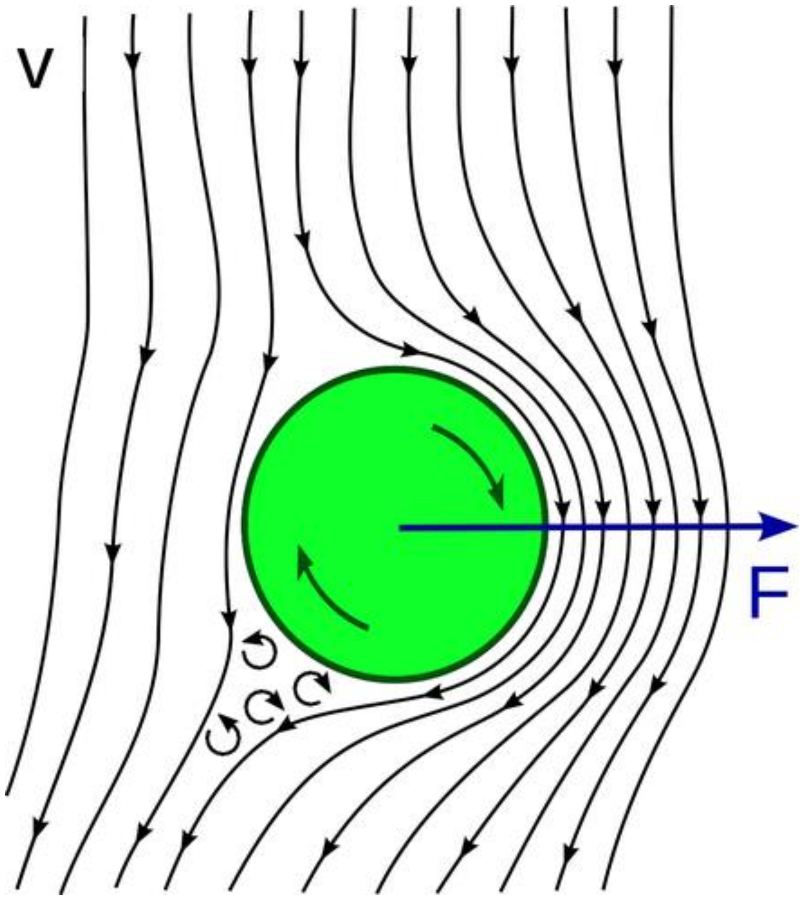
Stromlinien des Geschwindigkeitsprofils beim Flügel für eine laminare Strömung



$$\rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} + P = \text{const.}$$

Bildquelle: wikipedia

Stromlinien des Geschwindigkeitsprofils beim Magnus-Effekt



$$\rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} + P = \mathrm{const.}$$

Die Luft wird auf der rechten Seite „mitgerissen“ (sonst unendlich große Reibungskraft), sodass ihre Geschwindigkeit höher ist als links.

Bildquelle: wikipedia

6.4. Schallwellen

Bei einer Schallwelle ändern sich Druck und Dichte des Gases nur minimal relativ zur Umgebung. Daher machen wir den Ansatz

$$P(\mathbf{r},t) = P_0 + \tilde{P}(\mathbf{r},t); \quad \left|\tilde{P}\right| \ll P_0$$

$$\rho(\mathbf{r},t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(\mathbf{r},t); \quad |\tilde{\rho}| \ll \rho_0$$

Hierbei sind P_0 und ρ_0 der konstante Umgebungsdruck bzw. die konstante Umgebungsdichte.

Typisch: $P_0 \approx 10^5\ \mathrm{Pa}$. Schmerzgrenze menschliches Ohr: $\left|\tilde{P}\right| \approx 100\ \mathrm{Pa} \ll P_0$.

Wir starten von der Kontinuitätsgleichung (siehe Kap. 5.2.)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \; \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_0 \mathbf{v} + \underbrace{\cancel{\tilde{\rho} \mathbf{v}}}_{\text{klein}}) + \underbrace{\cancel{\frac{\partial \rho_0}{\partial t}}}_{=0} + \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = 0$$

Ziel: Umschreiben zu einer Gleichung für $\tilde{P} = \tilde{P}(\mathbf{r}, t)$.

Zur Erinnerung: Das isotherme Kompressionsmodul eines Gases ist gegeben durch

$$B = P \approx P_0 = \text{const.}$$

Aus der Gleichung des idealen Gases (siehe auch Kap. 6.2.) erhalten wir für $T = \text{const.}$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{P_0 + \tilde{P}}{P_0} = \frac{\rho_0 + \tilde{\rho}}{\rho_0} \Rightarrow 1 + \frac{\tilde{P}}{P_0} = 1 + \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \Rightarrow \tilde{\rho} = \rho_0 \frac{\tilde{P}}{P_0} \Rightarrow \tilde{\rho} = \rho_0 \frac{\tilde{P}}{B}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{B}\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = 0$$ *

Wir fahren fort mit der Eulerschen Gleichung (siehe Kap. 5.4.)

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \cancel{(\mathbf{v}\cdot\nabla)}\mathbf{v}\right) = -\nabla P - \rho\cancel{g}\mathbf{e}_z$$

Den Beitrag der Schwerkraft vernachlässigen wir, weil er klein ist im Vergleich zu ∇P.
Den nichtlinearen Konvektionsterm vernachlässigen wir im Grenzwert hinreichend kleiner Amplituden der Schallwelle.

$$\Rightarrow \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \tilde{P} = 0$$

Teilen durch ρ_0 und $\nabla \cdot$ von links führt zu

$$\Rightarrow \ \boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \tilde{P} = 0$$

$$\Rightarrow \ \boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \Delta \tilde{P} = 0$$

Leiten wir nun Gln. * nach der Zeit ab

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} \right) = 0$$

so erhalten wir

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial t^2} = 0$$

Subtrahieren wir diese Gleichung von (siehe letzte Folie) und Multiplizieren mit ρ_0

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \Delta \tilde{P} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \tilde{P} - \frac{\rho_0}{B} \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial t^2} = 0$$

so erhalten wir die Wellengleichung für Schallwellen

$$\boxed{\Delta\tilde{P} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{P}}{\partial t^2} = 0} \quad ; \ \tilde{P} = \tilde{P}(\mathbf{r}, t)$$

mit der isothermen Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}} \ .$$

Experimentell findet man (Meeresspiegel, 20°C Temperatur) $c = 343.2 \ \mathrm{ms}^{-1}$.

Unbedingt Merken

Die Schallgeschwindigkeit hängt in der Näherung eines idealen Gases bei konstanter Temperatur nicht vom Umgebungsdruck ab, weil Druck und Dichte zueinander proportional sind (siehe Kap. 6.2.).

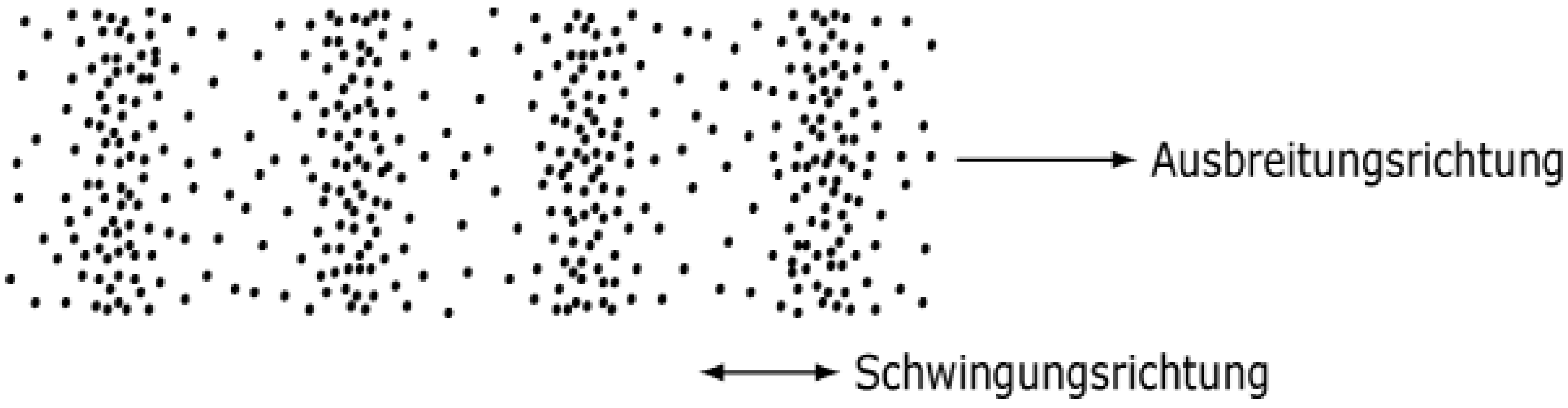
In eindimensionaler Form erhalten wir

$$\boxed{\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial t^2} = 0} \; ; \; \tilde{P} = \tilde{P}(x,t)$$

Diese Gleichung ist mathematisch äquivalent zu der Wellengleichung für elastische Wellen in elastischen Medien (siehe Kap. 4.2.).

Insofern können wir alles dort Gesagte direkt auf Schallwellen in Luft übertragen.

Veranschaulichung (Momentaufnahme, d.h. $t = \text{const.}$):



Man sagt daher, dass Schallwellen longitudinal polarisierte Wellen sind.

Bildquelle: chemgapedia.de

So sind wiederum ebene Wellen

$$\tilde{P}(x,t) = \tilde{P}_0 \cos(kx - \omega t)$$

Lösungen der Wellengleichung sofern die Dispersionsrelation erfüllt ist

$$\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda} = c \quad \Rightarrow \quad f\lambda = c$$

Beispiel: Bei einer Frequenz von $f = 440\ \mathrm{Hz}$ erhalten wir eine Wellenlänge von $\lambda = \frac{343.2\ \mathrm{ms}^{-1}}{440\ \mathrm{Hz}} = 0.78\ \mathrm{m}$.

Vorlesungsexperiment

Bemerkung: Wir haben bei unserer Betrachtung von Schallwellen in Gasen angenommen, dass sich eine konstante Temperatur einstellt (*isothermer* Prozess). Bei hörbaren Frequenzen des Schalls ist dies keine sehr gute Näherung.

Vielmehr kann man annehmen, dass die Prozesse *adiabatisch* sind (siehe auch Bemerkung auf Folie #16). Wiederholt man unsere Rechnung für diesen Fall, erhält man die gleiche Wellengleichung, aber einen anderen Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit, nämlich $c_{\mathrm{adiabatisch}} = \sqrt{\kappa}\, c_{\mathrm{isotherm}}$ mit dem Adiabaten-Exponenten $\kappa \approx 7/5 = 1.4$ für Luft.

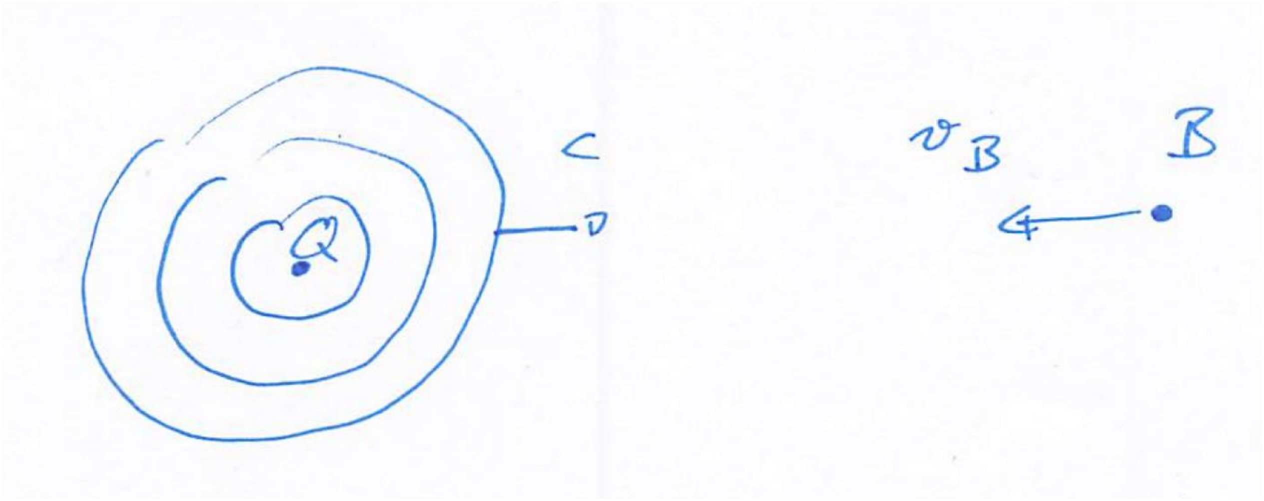
6.5. Der Doppler-Effekt

Wie verändert sich die Frequenz f einer Schallwelle wenn

1.) sich die Beobachter*in relativ zum Medium (z.B. Luft) bewegt oder
2.) sich die Schallquelle relativ zum Medium bewegt?

> Der Doppler-Effekt für Schallwellen ist grundsätzlich verschieden vom Doppler-Effekt für Licht (oder andere elektromagnetische Wellen), weil es für Licht kein „Medium“ gibt. Hierauf kommen wir im Kapitel 7. zu sprechen.

Fall 1.): bewegte Beobachter*in (B), ruhende Quelle (Q)



Zeit T_B zwischen zwei Maxima aus Sicht der Beobachter*in

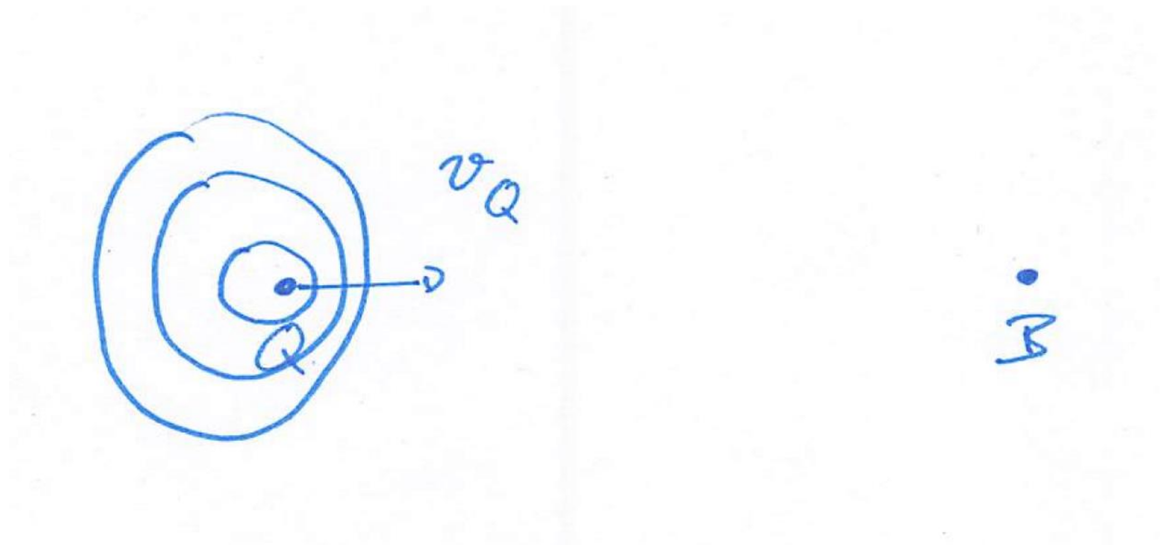
$$T_\mathrm{B} = \frac{\lambda}{c + v_\mathrm{B}}$$

$$\Rightarrow \; f_\mathrm{B} = \frac{1}{T_\mathrm{B}} = \frac{c + v_\mathrm{B}}{\lambda} = \frac{c}{\lambda}\left(1 + \frac{v_\mathrm{B}}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_\mathrm{B} = f_\mathrm{Q}\left(1 + \frac{v_\mathrm{B}}{c}\right)}$$

Beispiel: $v_\mathrm{B} = c \Rightarrow f_\mathrm{B} = 2f_\mathrm{Q}$, also Frequenz erhöht um Faktor zwei.

Fall 2.): ruhende Beobachter*in (B), bewegte Quelle (Q)



Wellenlänge λ_B aus Sicht der Beobachter*in

$$\lambda_B = \lambda - v_Q T_Q$$

$$\Rightarrow \; f_{\mathrm{B}} = \frac{c}{\lambda_{\mathrm{B}}} = \frac{c}{\lambda - v_{\mathrm{Q}} T_{\mathrm{Q}}} = \frac{c}{\lambda} \frac{1}{1 - v_{\mathrm{Q}} T_{\mathrm{Q}} / \lambda} = \frac{c}{\lambda} \frac{1}{1 - v_{\mathrm{Q}} / c}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_{\mathrm{B}} = f_{\mathrm{Q}} \, \frac{1}{1 - \frac{v_{\mathrm{Q}}}{c}}}$$

Beispiel: $v_{\mathrm{B}} = c \Rightarrow f_{\mathrm{B}} \to \infty$, also ganz anders als im Fall 1.)