Nachtrag zur Fourier-Transformation

$f(t)$ sei eine Funktion von t (Zeit)

Definition:

$$\boxed{\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{+i\omega t}\, dt}$$

ist Fouriertransformierte von $f(t)$

Beispiel:

$$f(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$= \frac{e^{+i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$$

Betrachte zunächst nur Fouriertransformiert von

$e^{-i\omega_0 t}$

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_0 t} e^{+i\omega t} \, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega-\omega_0)t} \, dt$$

$$= \, ? \quad \left(\text{was ist } e^{i\infty} \, ? \ \text{bzw} \ \cos(\infty) \, ? \right)$$

<u>Idee:</u> Konvergenzerzeugender Faktor, d.h.

$$e^{-i\omega_0 t} \xleftarrow{\gamma \to 0} e^{-i\omega_0 t} e^{-\gamma t^2}$$

$$\tilde{f}(\omega) \overset{\gamma \to 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma t^2} e^{i(\omega-\omega_0)t} \, dt$$

Formelsammlung:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx+c} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \, e^{\frac{1}{4}\frac{b^2}{a}+c}}$$

$a > 0$

$$\Rightarrow \tilde{f}(\omega) \overset{\gamma \to 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \, e^{-\frac{1}{4}\frac{1}{\gamma}(\omega-\omega_0)^2}$$

Ist $\tilde{f}(\omega) \propto \delta$ - Funktion?

$$? \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \, d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4}\frac{1}{\gamma}(\omega-\cancel{\omega_0})^2} \, d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{1}{4}\frac{1}{\gamma}}} \cdot e^{0}$$

$$= \sqrt{2\pi} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(\omega) = \sqrt{2\pi}\ \delta(\omega - \omega_0)$$

ist die Fouriertransformierte von $f(t) = e^{-i\omega_0 t}$

d.h.

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\left(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)\right)$$

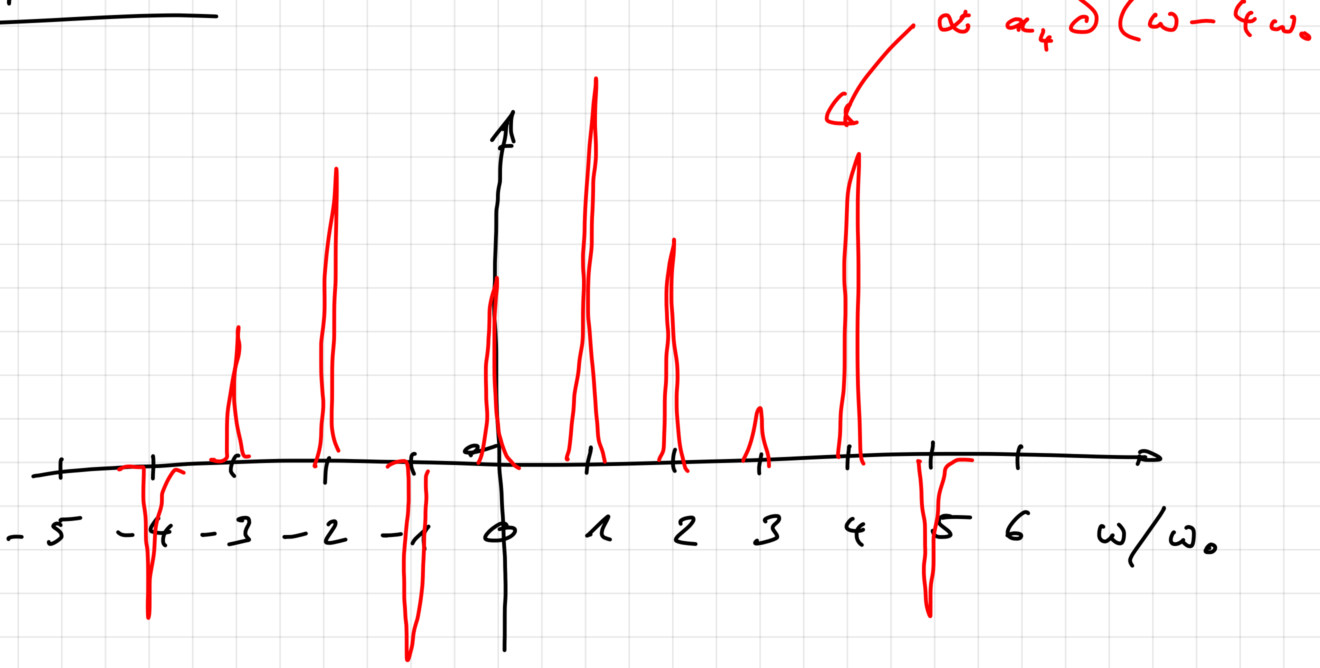
ist die Fouriertransformierte von $f(t) = \cos(\omega_0 t)$

graphisch:

Damit gilt für periodische Fktn. $f(t)$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{-in\omega_0 t}$$

graphisch:



d.h. die Fouriertransformierte einer periodischen Fkt.

$f(t)$ ist eine Summe äquidistanter δ-Fkt.

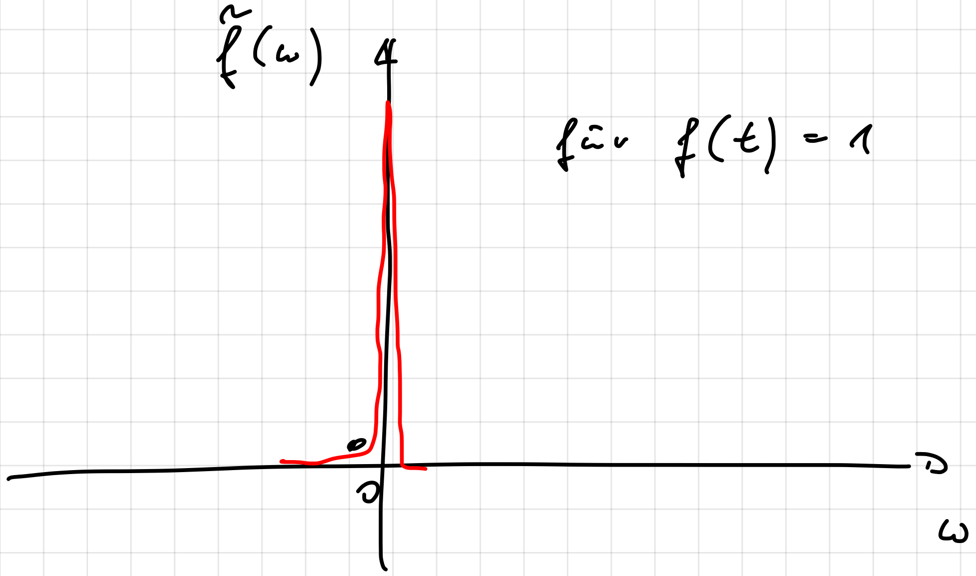
$\hat{=}$ Fourierreihenentwicklung

Beispiel: betrachte $f(t) = 1 = \cos(0t)$

$$\Rightarrow \hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi}\ \delta(\omega)$$

Die Fouriertransformierte einer Konstanten ist proportional zu einer $\delta(\omega)$-Funktion.

<u>graphisch:</u>



Umkehrung der Fouriertransformation

$\tilde{f}(\omega)$ sei bekannt. Kann ich $f(t) = \ldots$ auflösen?

Ja, es gilt:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega}$$

Fourier-Rücktransformation

Beweis: (durch Einsetzen)

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{+i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega')\, e^{-i\omega' t}\, d\omega' \right)}\, e^{+i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega') \, e^{i(\omega-\omega')t} \, dt \right) d\omega'$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega') \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega-\omega')t} \, dt \right)}_{= 2\pi \, \delta(\omega-\omega')} d\omega'$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cancel{2\pi} \, \tilde{f}(\omega) \quad \checkmark \quad \text{q.e.d.}$$

Weitere Eigenschaften der Fourier-Transformation

$$\boxed{f(t) \text{ reell} \implies \tilde{f}^*(-\omega) = \tilde{f}(\omega)}$$

Beweis:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$$

$$= f^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}^*(\omega)\, e^{+i\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}^*(-\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$$

$$\Longrightarrow \quad \tilde{f}(\omega) = \tilde{f}^*(-\omega) \quad \text{q.e.d.}$$

Faltungssatz:

$f(t)$ sei gegeben durch

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-t')\, h(t')\, dt'$$

$\hat{=}$ "Faltung" von g und h, oft

abgekürzt $\quad f = g \otimes h$

Dann gilt:

$$\boxed{\tilde{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} \cdot \tilde{g}(\omega) \cdot \tilde{h}(\omega)}$$

$\hat{=}$ normales Produkt

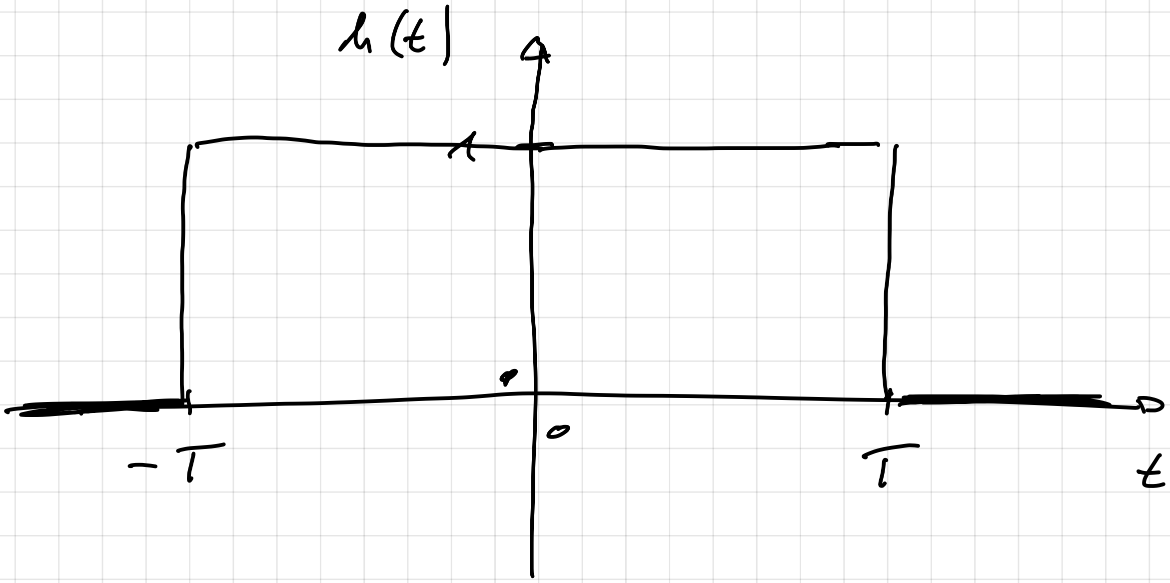
(ohne Beweis)

Beispiel:

$$f(t) = g(t) \cdot h(t)$$

Messsignal z.B. $= A\cos(\omega_0 t)$

$h(t)$ soll endliche Messzeit repräsentieren



Was ist $\tilde{h}(\omega)$?

$$\tilde{h}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{+i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{T} 1 \cdot e^{+i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{i\omega} e^{+i\omega t} \right] \Big|_{-T}^{T}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega} \left(e^{+i\omega T} - e^{-i\omega T} \right)$$

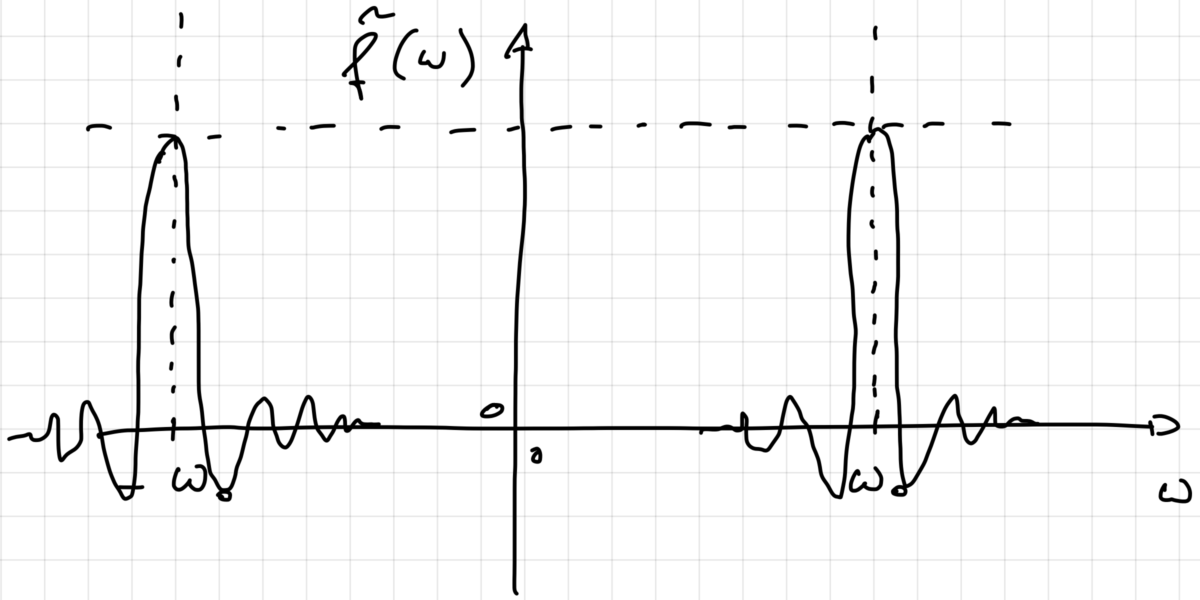
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2 \frac{\sin(\omega T)}{\omega}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi} \right)$$

mit dem "Sinus Cardinalis" (oder Spaltfkt.)

$$\boxed{\operatorname{sinc}(x) := \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}}$$

Ist also z.B. $f(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot h(t)$

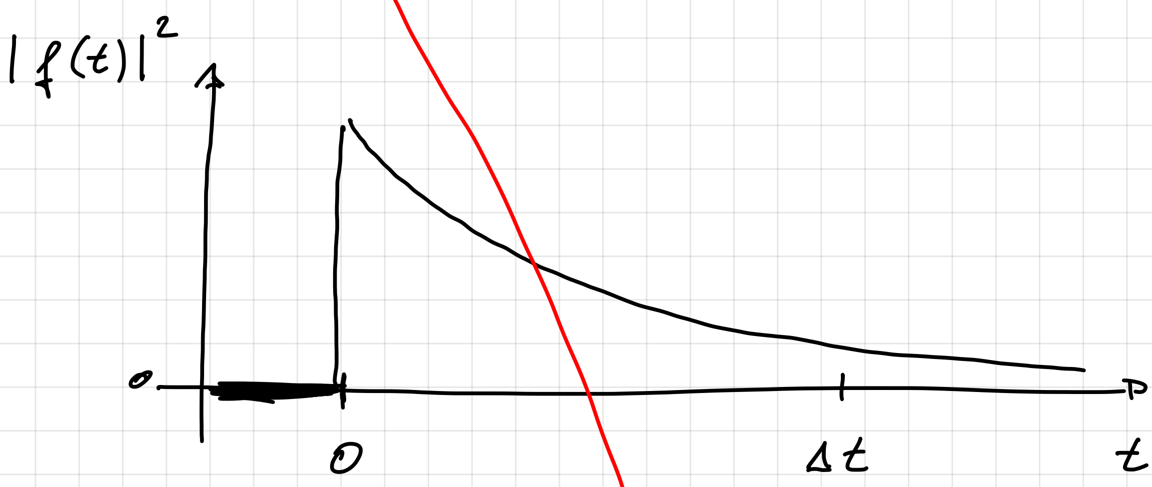


$\Rightarrow$ verwende oft "weiche Kanten"

Beispiel:

$$f(t) = \Theta(t)\, e^{-i\omega_0 t} \cdot e^{-\frac{t}{\Delta t}}$$

$$\Rightarrow |f(t)|^2 = \Theta(t) \cdot e^{-\frac{2t}{\Delta t}}$$



$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{+i\omega t}\, dt$$

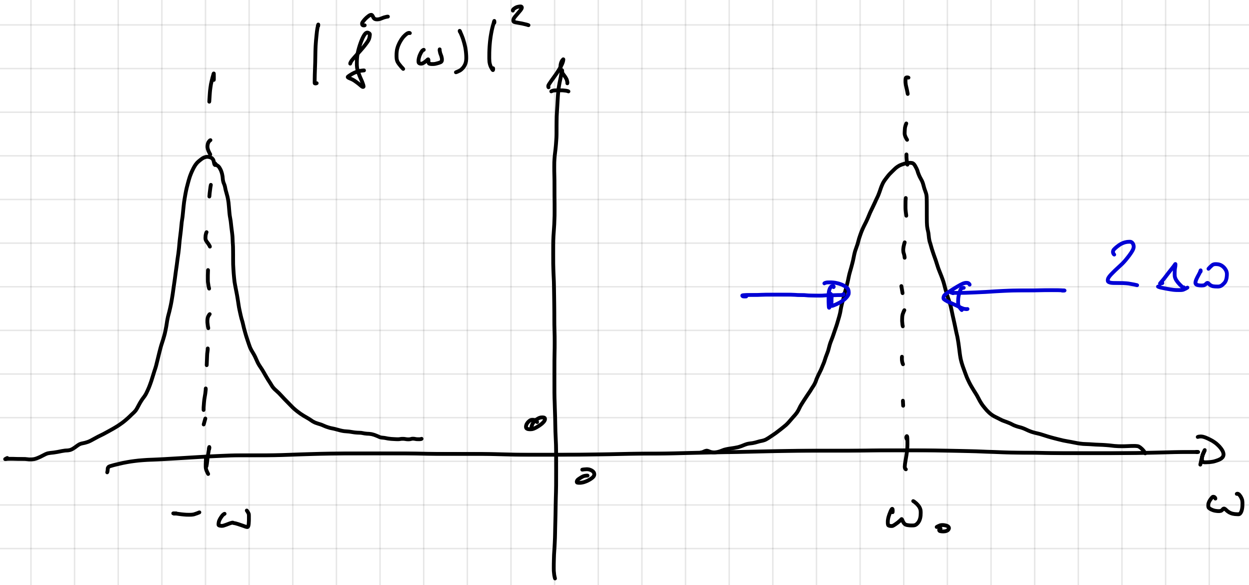
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-i\omega_0 t}\, e^{-\frac{t}{\Delta t}}\, e^{+i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{\left[i(\omega-\omega_0) - \frac{1}{\Delta t}\right] t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i(\omega-\omega_0) - \Delta t^{-1}} \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{|\tilde{f}(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\omega-\omega_0)^2 + \Delta t^{-2}}}$$

Lorentzkurve



$$\Delta\omega = \frac{1}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \Delta\omega \cdot \Delta t = 1$$