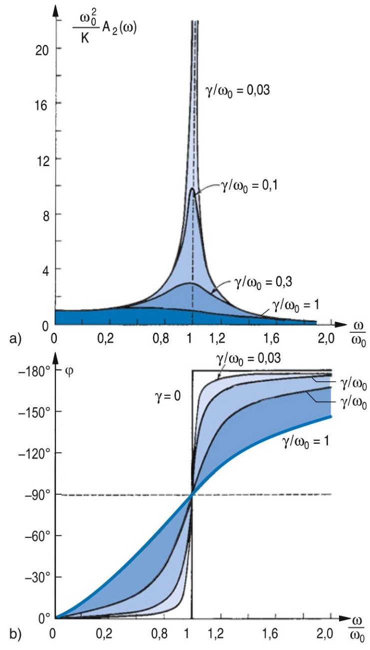


Abb. 11.23 **a** Resonanzkurve der erzwungenen Schwingung für verschiedene Dämpfungen. Man beachte die Verschiebung des Maximums mit zunehmender Dämpfung. **b** Quantitativer Verlauf der Phasenverschiebung

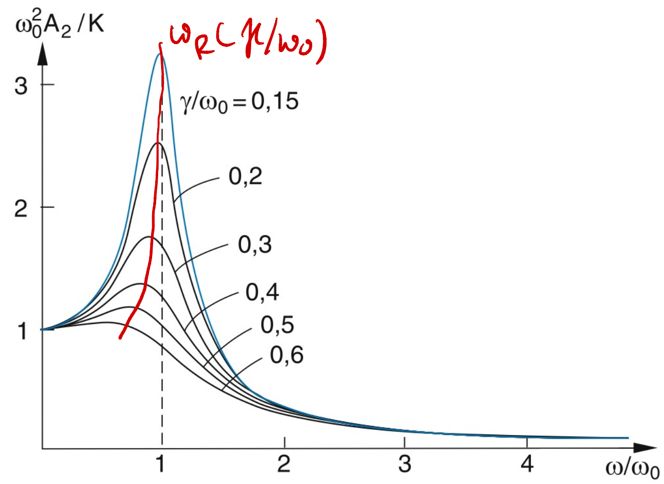
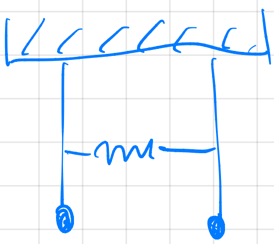


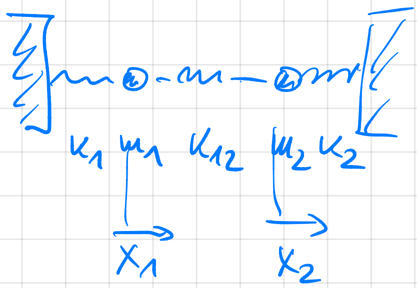
Abb. 11.24 Normierte Amplitude $|A_2(\omega)|$ einer erzwungenen Schwingung

Demtröder

25. Vorlesung

7.3 Gekoppelte harmonische Oszillatoren





Beobachtung: Schwingung in Phase

Schwingung in Antiphase mit höherer Frequenz

Schwingung nur eines Pendels führt zu übertragung der Energie in das andere Pendel.

Bewegungsgleichung: $m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_{12}(x_1 - x_2) = 0$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + k_{12}(x_2 - x_1) = 0$$

Ansatz: $x_1 = A_1 e^{i\omega t}$

$x_2 = A_2 e^{i\omega t}$

Einsetzen in DGL → Nullstellen in einem Polynom

→ Eigenwerte ω (2)

→ Eigenvektoren A_1, A_2

Allgemeine Lösung → siehe Theo B

Wir beschränken uns hier auf einen Spezialfall

$m_1 = m_2 = m \qquad k_1 = k_2 = k \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + \frac{k_{12}}{m}(x_1 - x_2) = 0$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + \frac{k_{12}}{m}(x_2 - x_1) = 0$$

Summe und Differenz der beiden Gleichungen.

Summe: $(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \omega_0^2 (x_1 + x_2) = 0$

Differenz: $(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + \omega_0^2 (x_1 - x_2) + \frac{2k_{12}}{m}(x_1 - x_2) = 0$

$\Leftrightarrow (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + \left(\frac{k}{m} + 2\frac{k_{12}}{m}\right)(x_1 - x_2) = 0$

Summe: $x_+ = x_1 + x_2$

$\ddot{x}_+ + \omega_0^2 x_+ = 0 \qquad \omega_+ = \omega_0$

$x_+(t) = A_+ e^{i\omega_+ t}$

Differenz: $x_- = x_1 - x_2$

$\ddot{x}_- + \omega_-^2 x_- = 0$

$$\omega_-^2 = \frac{2k_{12}+k}{m}$$

$$\omega_- = \sqrt{\frac{2k_{12}+k}{m}} > \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2k_{12}}{m}}$$

$$x_-(t) = A_- \, e^{i\omega_- t}$$

Allgemeine Lösung ist eine Superposition

$$x_+(t) + x_-(t)$$

$$A_+ = A_- = A \in \mathbb{R}$$

$$x_1(t) = \frac{x_+(t) + x_-(t)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} A \left(e^{i\omega_+ t} + e^{i\omega_- t} \right)$$

$\downarrow$ Realteil

$$= \frac{1}{2} A \left(\cos \omega_+ t + \cos \omega_- t \right)$$

$\downarrow$ Additionstheorem

$$= \frac{1}{2} A \; 2 \cos \frac{(\omega_- - \omega_+)t}{2} \cdot \cos \frac{(\omega_- + \omega_+)t}{2}$$

langsame Oszillation

schnelle Oszillation

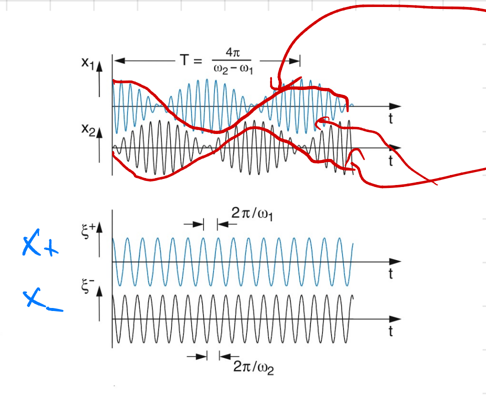


Abb. 11.29 Schwingungsamplituden $x_1(t)$ und $x_2(t)$ gekoppelter Oszillatoren mit der Schwebungsperiode T und die beiden Normalschwingungen $\xi^+(t)$ und $\xi^-(t)$

Demtröder

7.4 Grundlagen von Wellen

Begriffsdefinitionen

Welle: Eine Welle ist eine sich in Zeit und Raum ausbreitende Anregung aus den Gleichgewichtszustand.

Transversalwellen: Die Auslenkung ist senkrecht zur Ausbreitungsrichtung

Beispiele: Saitenwelle
Wasserwelle

Bei Transversalwellen gibt es im allgemeinen eine Polarisation der Welle

Seilwelle mit vertikaler oder horizontaler Auslenkung

Longitudinalwellen: Auslenkung und Ausbreitungsrichtung identisch

Beispiel: Federwelle
Schallwelle in Gasen

Keine Polarisation

Einzelne Atome und Bindungskräfte

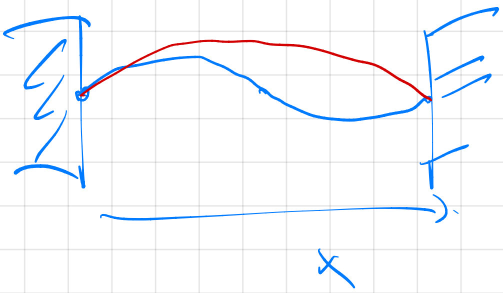
DGL hochdimensional → vgl. Exp. II

Phonon

Atome sind zu klein, um eine einfache Wellengleichung aufzusetzen.

→ Kontinuumsnäherung

Stehende Wellen



Oszillator in der Zeit mit $A = A(x)$

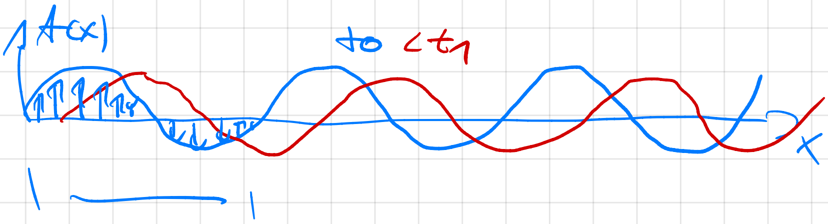
Harmonische Wellen: Sinus- oder cosinus-förmig im Verlauf von Zeit und Raum

Ebene Wellen

Kreisförmige oder Kugelförmige Wellen

Mathematische Beschreibung einer harmonischen Welle (1D)

$A(x,t)$



λ : Wellenlänge

ω : Kreisfrequenz

Zeitliche harmonische Entwicklung $A(x_0,t) = A_0 \cdot \sin \omega t$

Kreisfrequenz

$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ Periode

Wellenzahl $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$

Ebene harmonische Welle

$$\boxed{A(x,t) = A_0 \sin(\omega t - kx)}$$

Periode $\frac{2\pi \cdot t}{T}$ $\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x$

$-$ Welle fährt in $-x$ Richtung

$+$ " " " $+x$ Richtung

Für eine feste Phase φ_0 muss $\omega t - kx = \varphi_0$

z.B.: $\varphi_0 = 0$

$\Rightarrow \omega t - kx = 0$ $\omega t = kx$

$x = \frac{\omega t}{k}$

Geschwindigkeit

$x = \frac{\omega}{k} t$

$x = v_p t$ $\boxed{v_p: \text{Phasengeschwindigkeit} \quad v_p = \frac{\omega}{k}}$

v_g: Gruppengeschwindigkeit $\neq v_p$