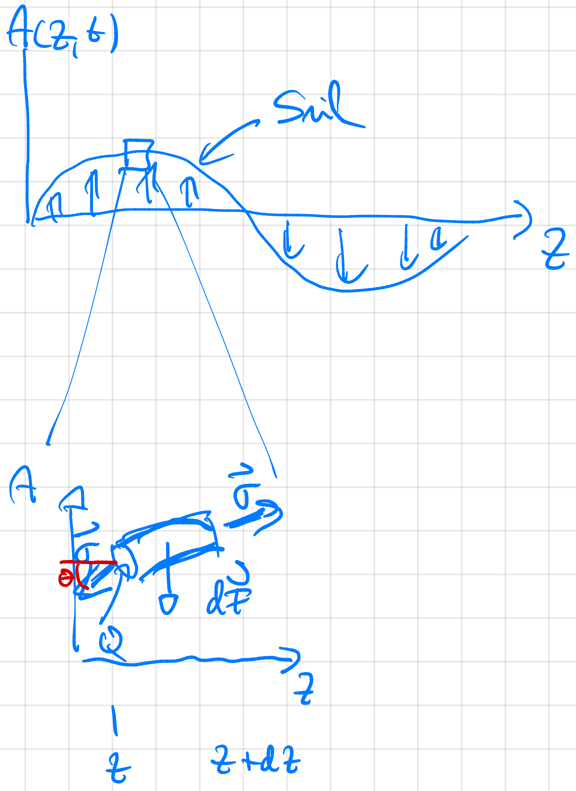
26. Vorlesung

7.5 Die Wellengleichung

Beispiel: Seilwelle, Transversalwelle



Q: Querschnittsfläche des Seils

μ: Masse des Seils pro Länge

$\vec{\sigma}$: Zugspannung auf dem Seil

$$\vec{\sigma}(z) = \frac{\vec{F}(z)}{Q}$$

$$d\vec{F} = dm \cdot \vec{a} = \underbrace{\frac{dm}{dz}}_{=\mu} \cdot dz \, \frac{\partial^2 A(z)}{\partial t^2}$$

Newton 2: $\sigma_A(z+dz) \cdot Q - \sigma_A(z) \cdot Q = \mu \frac{\partial^2 A(z)}{\partial t^2} \cdot dz$

Anteil in Anregungsrichtung

$$\sigma_A = |\vec{\sigma}| \cdot \sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad Q \, |\vec{\sigma}| \cdot \left[\sin(\theta + d\theta) - \sin(\theta) \right] = \mu \frac{\partial^2 A(z)}{\partial t^2} dz$$

Kleinwinkelnäherung $\quad \sin\theta \approx \theta \quad \cos\theta \approx 1$

$$\sin\vartheta \approx \theta \approx \tan\theta = \frac{\partial A}{\partial z}$$

analog für $\theta + d\theta$: $\sin(\theta + d\theta) \approx \theta + d\theta$

$$\approx \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \cdot dz$$

$$\Rightarrow \quad \sigma \cdot Q \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} dz = \mu \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} dz$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \frac{\mu}{\sigma \cdot Q} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}}$$

1D Seilwelle

Ansatz: $A(z,t) = A_0 \sin(\omega t - kz)$

$$k^2 = \frac{\mu}{\sigma . Q} \omega^2$$

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\sigma Q}{\mu}} = v_p$$

Allgemein in 3D

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\Delta \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}}$$

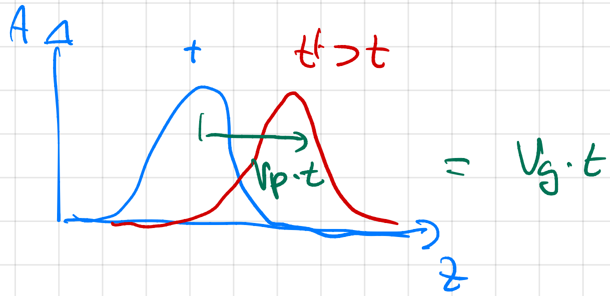
$c = v_p$

Wellengleichung

Allgemeine Lösung der Wellengleichung

$$A(z,t) = f\left[k(z \pm v_p t)\right]$$

$-$: Welle läuft in +z-Richtung
$+$: " " " $-z$ - "



$$\frac{\partial A}{\partial z} = k \frac{\partial f}{\partial [k(z - v_p t)]}$$

⊛ $$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial [k(z - v_p t)]^2} = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 [k(z - v_p t)]}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -k v_p \frac{\partial f}{\partial [k(z - v_p t)]}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = k^2 v_p^2 \frac{\partial^2 f}{\partial [k(z - v_p t)]^2}$$

⊛ $$\Delta A^c = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

In diesem Fall bewegt sich eine Sin Welle mit v_p und eine beliebige Funktion mit v_g und $v_p = v_g$.

Die Wellengleichung ist eine homogene, lineare, partielle DGL.

Für alle Lösungen $f_1(r,t)$ und $f_2(r,t)$ ist auch $f_3 = \alpha f_1(r,t) + \beta f_2(r,t)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL.

→ Superpositionsprinzip

Überlagerung von 2 Wellen mit gleicher Frequenz ω.

$$f_3 = A_1 e^{i(\vec{k}_1\vec{r}-\omega t)} + A_2 e^{i(\vec{k}_2\vec{r}-\omega t)}$$

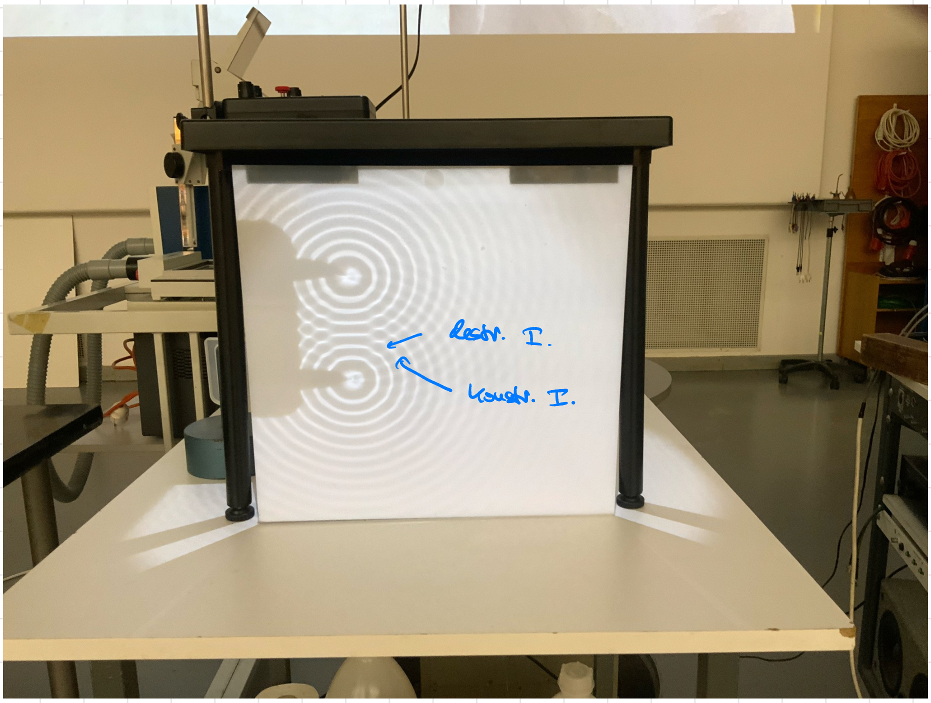
Dann kann es zu Interferenz kommen

$\exists\, \vec{r}_0$ bei dem $f_3 = 0$ destruktive Interferenz

$$\vec{k}_1\vec{r} + \vec{k}_2\vec{r} = \pi$$

$\exists\, \vec{r}_0$ bei dem $f_3 \propto A_1 + A_2$

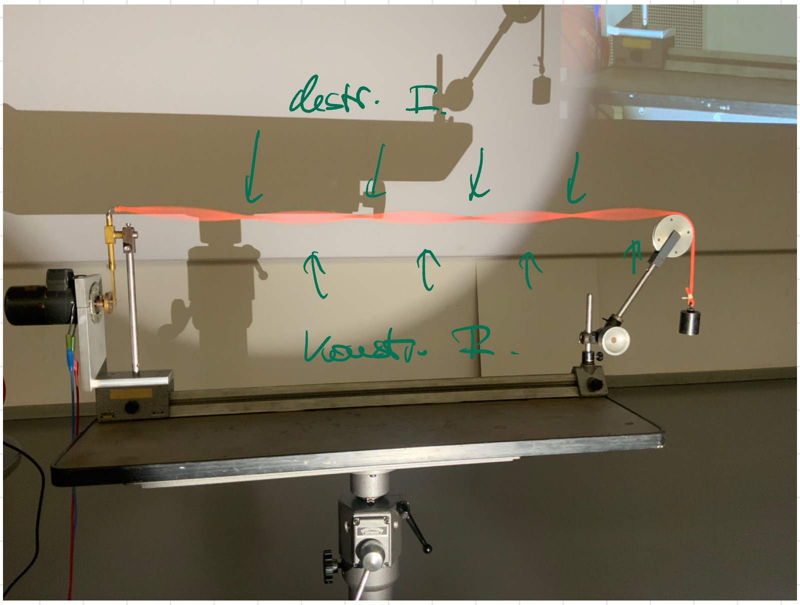
$$\vec{k}_1\vec{r} + \vec{k}_2\vec{r} = 0$$



Versuch

7.5 Reflexion von Wellen

Versuch: harmonische Welle mit Reflexion am Seilende (fest)

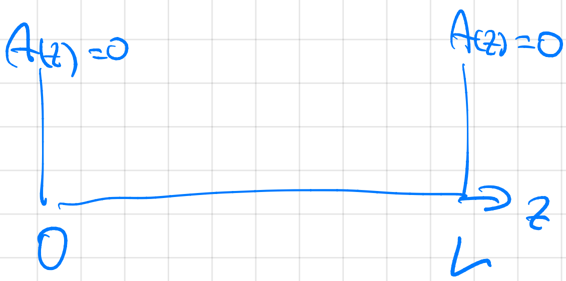


Ansatz: Vor- und rückläufige Welle

$$A(z,t) = A_0 \left(\sin(kz+\omega t) + \sin(kz-\omega t + \underbrace{\varphi}_{\text{Phasensprung}}) \right)$$

$$\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta) = 2 \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\Rightarrow A(z,t) = 2 A_0 \underbrace{\sin(kz + \varphi/2)}_{\text{Ortsabhängig}} \cdot \underbrace{\sin(-\omega t + \varphi/2)}_{\text{Zeitabhängig}}$$



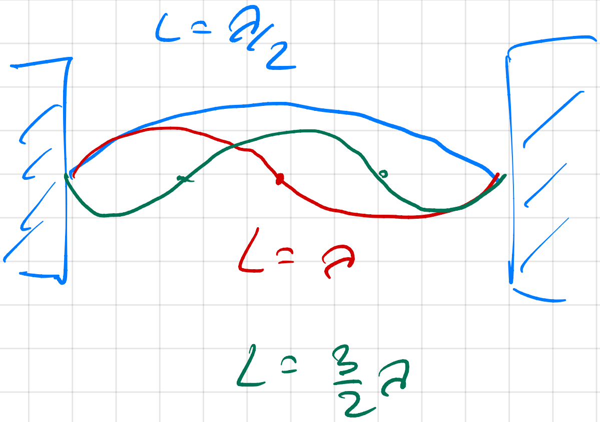
$$A(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi/2 = 0$$

$$A(L,t) = 0 \Rightarrow \sin(k \cdot L) = 0$$

$$k \cdot L = n \cdot \pi \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$L = \frac{n \cdot \pi}{k} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Rightarrow L = \frac{n \cdot \lambda}{2}$$



⋮

$$\lambda_1 = 2L \qquad f_1 = c/\lambda_1 = \frac{c}{2L}$$

$$\lambda_2 = L \qquad f_2 = 2 f_1$$

$$\lambda_3 = \frac{2}{3} L \qquad f_3 = 3 f_1$$

⇝ Experiment: Gitarre und Flagolet Töne