Institut für Experimentelle Kernphysik SS2003, 7-7-03, $10^{00} - 13^{00}$

Klausur 2003 Physik I (Mechanik)

Priv. Dozent Dr. M. Erdmann, Dr. G. Barker

Name/Vorname :

Matrikelnummer :

Fachsemester :

Übungsgruppe Nummer:

Betreuer(in) :

- maximale Bearbeitungszeit: 3 Stunden
- Schreiben Sie Ihre Antworten direkt auf die ausgehändigten Blätter. Zusätzliche Blätter sind verfügbar, falls benötigt. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Aufgabennummer klar und deutlich an den oberen Rand von jeder zusätzlich benötigten Seite.
- Taschenrechner sind **nicht** erlaubt und werden auch nicht gebraucht. Lassen Sie alle Faktoren wie z.B. π oder $\sqrt{2}$ usw. in Ihrem Endergebnis stehen.
- Legen Sie Ihren Studentenausweis neben sich auf den Tisch, so dass er während der Klausur kontrolliert werden kann.

$$\begin{aligned} g = 10\mathrm{m/s^2} \quad &, \quad M_E = 6 \times 10^{24}\mathrm{kg} \\ R_E = 6 \times 10^6\mathrm{m} \quad &, \quad G = 7 \times 10^{-11}\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}} \\ \cos(A \pm B) \quad &= \quad \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \end{aligned}$$

Nr.	mögl.	erreicht
1	10	
2	10	
3	15	
4	15	
5	15	
6	10	
Gesamt	75	

1. <u>10 Punkte</u>

(a) Was sind der Mittelwert, die Standardabweichung und der Fehler auf den Mittelwert der folgenden Zahlenfolge: $(2.0, 4.0, 6.0, 3.0, 5.0)$?

(A) $\bar{x} = 4, \sigma = \sqrt{\frac{5}{2}}, \sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{2}}$

(B) $\bar{x} = 4, \sigma = \sqrt{\frac{5}{2}}, \sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{5}{8}}$

(C) $\bar{x} = 5, \sigma = \sqrt{2}, \sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{2}}$

(D) $\bar{x} = 4, \sigma = \sqrt{2}, \sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{5}{8}}$

(b) Die Bewegung unter einer Zentralkraft ist immer dann eine Kreisbewegung, wenn gilt:

(A) die Gesamtenergie ist minimal

(B) die potentielle Energie ist minimal

(C) die effektive potentielle Energie ist maximal

(D) der Drehimpuls ist minimal

(c) Wenn eine Person sich mit ausgestreckten Armen um sich selbst dreht und plötzlich die Arme zu sich heranzieht, dann gilt die folgende Aussage: Die kinetische Energie der Person

(A) wird größer

(B) wird kleiner

(C) wird zuerst größer, anschließend verringert sie sich wieder auf den Wert, den sie vorher hatte

(D) bleibt unverändert

(d) Welche der folgenden Formeln ist kein korrekter Ausdruck für den Drehimpuls bezüglich des Ursprungs?

(A) $\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$

(B) $\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

(C) $\vec{L} = \vec{p} \times \vec{r}$

(D) $\vec{L} = mr^2\dot{\vec{\theta}}$

(e) Das Trägheitsmoment eines starren Körpers mit einheitlicher Dichte, der um eine Achse rotiert, hängt nicht von welcher der folgenden Größen ab?

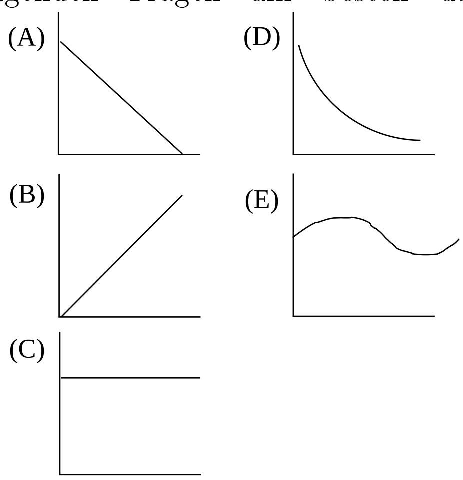
(A) der Gesamtmasse des Körpers

(B) der Lage der Drehachse

(C) der geometrischen Form des Körpers

(D) der Winkelgeschwindigkeit des Körpers

Welches der folgenden Schaubilder stellt die Antwort auf die folgenden Fragen am besten dar?



(f) der Geschwindigkeit-Zeit-Graph eines Planeten auf einer elliptischen Umlaufbahn

(g) die Gravitationskraft als Funktion des Abstandes zweier Massen

(h) der Beschleunigung-Zeit-Graph für ein Projektil, das unter einem Winkel von 60° zur Horizontalen hoch geschossen wird

(i) der Geschwindigkeit-Zeit-Graph bis zu der Zeit, in der die maximale Höhe erreicht wird, für ein Projektil, das senkrecht nach oben geschossen wird

(j) die Abhängigkeit der Zentripetalkraft vom Abstand zur Drehachse für eine Kreisbewegung.

Lösung (a) A, (b) A, (c) A, (d) C, (e) D, (f) E, (g) D, (h) C, (i) A, (j) B.

2. 10 Punkte

(a) Vom Rand eines tiefen Brunnens werde ein Stein fallen gelassen (Anfangsgeschwindigkeit 0 m/s). Nach $\frac{35}{3}$ s höre man am Brunneneingang den Aufschlag des Steins auf der Wasseroberfläche. Wie tief ist der Brunnen? (Schallgeschwindigkeit $v_S = 300$ m/s)

(b) Ein zweiter Stein falle wie oben aus der Ruhe in den Brunnen. Eine Sekunde nach Beginn des freien Falls werde ein dritter Stein mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$ nachgeworfen.

(i) Berechnen Sie die Zeit t_2, die nach Fallbeginn des zweiten Steins vergeht, bis dieser vom dritten Stein überholt wird.

(ii) In welcher Tiefe z_0 findet der Überholvorgang statt?

(iii) Skizzieren Sie den Verlauf der Bewegungen beider Steine in einem Ort-Zeit-Diagramm.

Lösung

(a) (5 Punkte) Schallgeschwindigkeit $v_S = 300\,\mathrm{m/s}$; Schachttiefe s; Fallzeit des Steins t_1; Laufzeit des Schalls t_S; $t = t_1 + t_S = \frac{35}{3}\,\mathrm{s}$; $s = g/2t_1^2$ und gleichzeitig $s = v_S t_S$. Daraus folgt die Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{g}{2}t_1^2 &= v_S t_S = v_S(t - t_1) \\
0 &= \frac{g}{2}t_1^2 - v_S t + v_S t_1 \qquad \text{quadrat. Glg. in } t_1 \\
t_1 &= -\frac{v_S}{g} \pm \sqrt{\frac{v_S^2}{g^2} + \frac{2v_S t}{g}} \\
&= -30\mathrm{m} \pm \sqrt{900 + 700}\,s \\
t_1 &= (-30.0 - 40.0)s = -70.0\,s \qquad \text{physikalisch nicht sinnvoll} \\
\text{oder}, t_1 &= (-30.0 + 40.0)s = 10.0\,s
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $t_S = t - t_1 = \frac{35}{3} - 10 = \frac{5}{3}\,\mathrm{s}$ und hieraus für die Tiefe des Brunnens $s = v_S \cdot t_S = 300 \cdot \frac{5}{3} = 500\,\mathrm{m}$.

(b) (5 Punkte) Die Flugstrecke des zweiten Steins ist $z_2 = g/2t^2$, die für den dritten Stein $z_3 = g/2(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0)$.

(i) Bedingung für t_2 ($z_2 = z_3$):

$$\frac{g}{2}t_2^2 = \frac{g}{2}t_2^2 - 2\frac{g}{2}t_2 t_0 + \frac{g}{2}t_0^2 + v_0 t_2 - v_0 t_0$$

nach t_2 auflösen: ($t_0 = 1\,\mathrm{s}$; $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$)

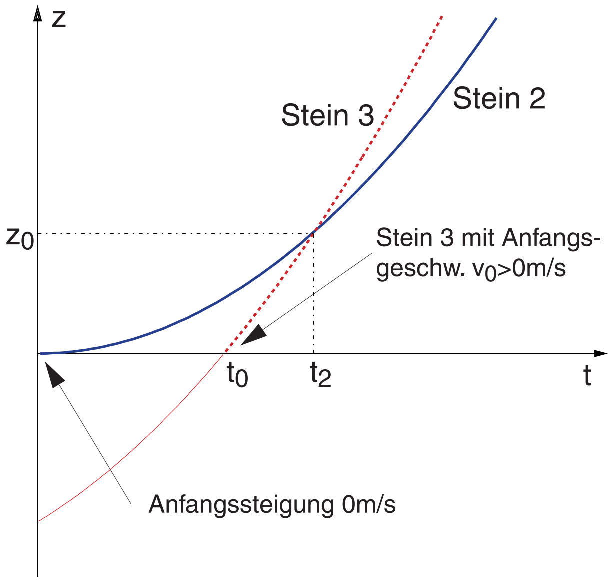
$$\begin{aligned}
t_2(gt_0 - v_0) &= \frac{g}{2}t_0^2 - v_0 t_0 \\
t_2 &= \frac{\frac{g}{2}t_0^2 - v_0 t_0}{gt_0 - v_0} = \frac{3}{2}\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

Man beachte, dass das Problem nur dann eine physikalisch sinnvolle Lösung hat, wenn $v_0 > g t_0$ gilt.

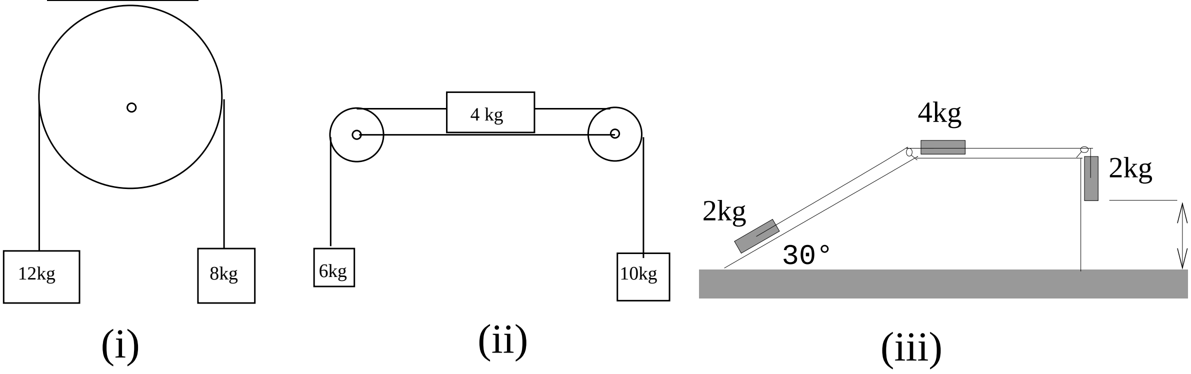
(ii)

$$z_0 = z_2(t_2) = \frac{g}{2} \cdot (\frac{3}{2}\,\mathrm{s})^2 = \frac{45}{4}\,\mathrm{m}$$

(iii) Ort-Zeit-Diagramm der Flugbahn beider Steine:



3. <u>15 Punkte</u>



Betrachten Sie die drei Systeme in Abb. (i), (ii) und (iii). Die Schnüre seien jeweils inelastisch und haben eine vernachlässigbare Masse. Es treten keine Reibungskräfte auf.

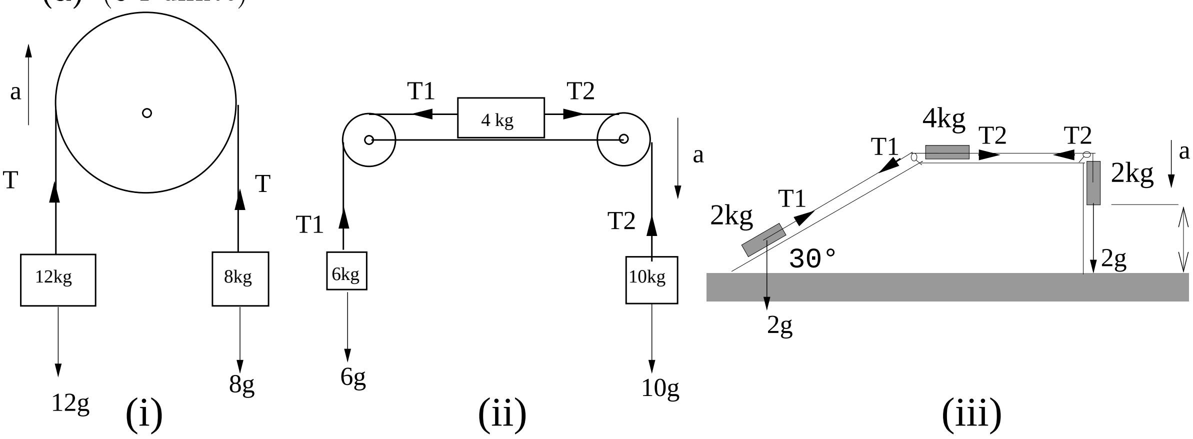
(a) Zeichnen Sie Ihre eigene Version der Abbildungen inklusive aller auf die Massen wirkenden Kräfte.

(b) Wie groß ist die Beschleunigung der Massen und die Spannung(en) in den Schnüren der Systeme?

(c) Die in einer Höhe h von 250 cm über dem Boden frei hängende Masse in System (iii) werde aus der Ruhe zur Zeit $t = 0$ s fallen gelassen. Nach welcher Zeit trifft sie auf dem Boden auf?

<u>Lösung</u>

(a) (3 Punkte)



(b) (i)(3 Punkte) Anwendung von Newtons Gesetz auf 12kg-Masse:

$$12g - T = 12a \tag{1}$$

Anwendung von Newtons Gesetz auf 8kg-Masse:

$$T - 8g = 8a \tag{2}$$

Addiere die Gleichungen 1 und 2:

$$\begin{aligned} 4g &= 20 \cdot a \\ a &= \frac{4g}{20} = \frac{g}{5} \end{aligned}$$

Setze a in (2) ein:

$$\begin{aligned} T - 8g &= 8 \cdot \frac{g}{5} \\ T &= \frac{8g}{5} + 8g = \frac{48}{5}g = 96N \end{aligned}$$

(ii) (3 Punkte) Anwendung von Newtons Gesetz auf 6kg-Masse:

$$T_1 - 6g = 6a \tag{3}$$

Anwendung von Newtons Gesetz auf 4kg-Masse:

$$T_2 - T_1 = 4a \tag{4}$$

Anwendung von Newtons Gesetz auf 10kg-Masse:

$$10g - T_2 = 10a \tag{5}$$

Addiere die Gleichungen 3 und 4:

$$\begin{aligned} T_2 - 6g &= 10a \\ T_2 &= 10a + 6g \end{aligned}$$

Setze T_2 in (5) ein:

$$\begin{aligned} 10g - (10a + 6g) &= 10a \\ 4g &= 20a \\ a &= \frac{g}{5} \end{aligned}$$

Setze a in (3) ein: $T_1 = 6a + 6g = \frac{36}{5}g = 72\text{N}$
Setze a in (5) ein: $T_2 = 10g - 10a = 10g - 10 \cdot \left(\frac{g}{5}\right) = 8g = 80\text{N}$

(iii)(3 Punkte) beschleunigende Kraft: $F_a = 2g - 2g\sin 30^\circ = 2g(1 - 1/2) = g\text{N}$
Anwendung von Newtons Gesetz auf Gesamtsystem: $F_a = m_{tot.} \cdot a = (2+2+4) \cdot a = 8a\text{N}$
$\Rightarrow a = \frac{g}{8}$

Anwendung von Newtons Gesetz auf die Masse auf der schiefen Ebene:

$$\begin{aligned} T_1 - 2g\sin 30^\circ &= 2a \\ T_1 &= 2a + g = \frac{g}{4} + g = \frac{5}{4}g = \frac{25}{2}\text{N} \end{aligned}$$

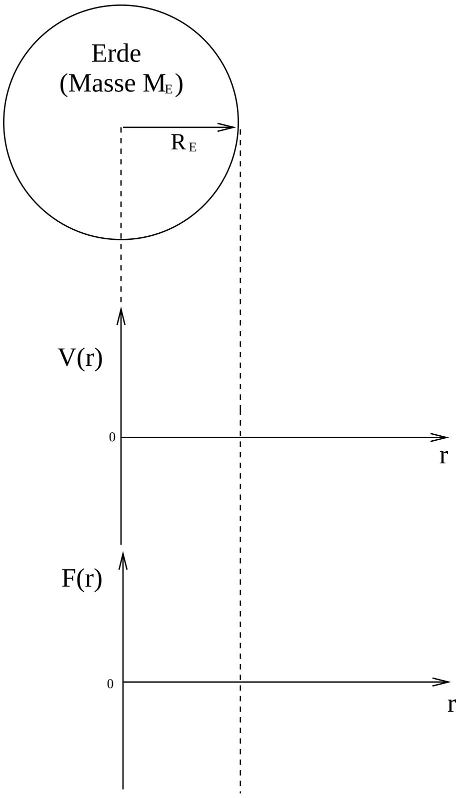
Anwendung von Newtons Gesetz auf die 4kg-Masse

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= 4a \\ T_2 &= \frac{2g}{4} + \frac{5g}{4} = \frac{7g}{4} = \frac{35}{2}\mathrm{N} \end{aligned}$$

(c) (3 Punkte) $x(t=0) = h$,$\dot{x}(t=0) = 0$ und die Bewegungsgleichung lautet $x(t) = -\frac{a}{2}t^2 + h$
Löse nach t auf für $x = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{a}{2}t^2 + h \\ t^2 &= \frac{2h}{a} = \frac{16h}{g} \\ t &= \pm 4\sqrt{\frac{h}{g}} \\ \Rightarrow t &= 4\sqrt{\frac{h}{g}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{2.5}{10}} = 2 \ \mathrm{s} \end{aligned}$$

4. 15 Punkte



(a) Leiten Sie Ausdrücke für das Gravitationspotential $V(r)$ und die Kraft $F(r)$ auf eine Testmasse m aufgrund der Erde (Masse M_E und Radius R_E) her, wenn sich die Testmasse in einer Entfernung r vom Erdmittelpunkt befindet mit $r > R_E$. Nehmen Sie die Dichte der Erde als konstant an.
(Hinweis: Betrachten Sie die Erde als durch eine Folge von konzentrischen Kugelschalen der Dicke dR aufgebaut, von der jede so wirke, als ob ihre Masse in ihrem Mittelpunkt konzentriert sei.)

(b) Mit welcher Mindestgeschwindigkeit muss ein Satellit von der Erdoberfläche aus gestartet werden, damit er der Erdanziehungskraft entkommen kann?

(c) Zwei identische Satelliten mit Masse m befinden sich auf kreisförmigen Umlaufbahnen mit Radius r bzw. r_2 mit $r_2 > r$. Zeigen Sie, dass die Differenz in der Gesamtenergie der Satelliten gegeben ist durch

$$\Delta E = \frac{GM_E m}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right).$$

(d) Leiten Sie Ausdrücke für $V(r)$ und $F(r)$ für die Testmasse aus der Teilaufgabe (a) her für den Fall $r < R_E$.
(Hinweis: Der einfachste Weg ist, zuerst die Gravitationskraft auf die Testmasse beim Radius r, $r < R_E$, zu berechnen, und daraus dann das Potential zu bestimmen. Zu der Gravitationskraft auf die Testmasse tragen nur die Kugelschalen mit einem Radius *kleiner* als r bei.)

Skizzieren Sie in den bereitgestellten Schaubildern (links) $V(r)$ und $F(r)$ als Funktion von r.

Lösung

(a) (3 Punkte) Denken Sie sich die Erde als aus vielen konzentrischen Kugelschalen mit dem Volumen $4\pi R^2 dR$ aufgebaut, so dass die Masse jeder Kugelschale gegeben ist durch:

$$dM = \frac{4\pi R^2 dR}{\frac{4}{3}\pi R_E^3} \cdot M_E = \frac{3R^2 M_E}{R_E^3} \cdot dR$$

Das Potential einer Testmasse beim Radius $r > R_E$ aufgrund dieses Elementes ist:

$$\begin{aligned} V(r) &= -\int_{R=0}^{R=R_E} \frac{GdM}{r} = -\frac{3GM_E}{rR_E^3} \int_{R=0}^{R=R_E} R^2 dR = -\frac{GM_E}{r} \\ \Rightarrow F(r) &= -m\frac{dV(r)}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{GmM_E}{r}\right) = -\frac{GmM_E}{r^2} \end{aligned}$$

(b) (3 Punkte) Die Gesamtenergie des Satelliten: $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_E}{R_E}$
Bedingung für eine Flucht ist:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &\geq \frac{GmM_E}{R_E} \\ v &\geq \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} \\ v &\geq \sqrt{\frac{2 \cdot 7 \times 10^{-11} \cdot 6 \times 10^{24}}{6 \times 10^6}} \text{m/s} \\ v &\geq \sqrt{14 \times 10^7} \text{m/s} \sim 12 \text{km/s} \end{aligned}$$

(c) (3 Punkte) Die Differenz in der Gesamtenergie der beiden Satelliten mit Umlaufbahnradien von r bzw. r_2 und $r_2 > r$ ist:

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GM_E m}{r_2}\right) - \left(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_E m}{r}\right) \tag{6}$$

Für die Kreisbewegung gilt: $\frac{mv^2}{r} = \frac{GM_E m}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM_E}{r}$ und genauso $v_2^2 = \frac{GM_E}{r_2}$.
Setze v^2 und v_2^2 in Gleichung 6 ein:

$$\Delta_E = \frac{GM_E m}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)$$

(d) (4 Punkte) Einfachste Lösung:
Der Anteil der Masse innerhalb des Radius: $M_E \cdot \frac{r^3}{R_E^3}$

$$\Rightarrow F(r) = -\frac{Gm \cdot M_E r^3/R_E^3}{r^2} = -\frac{GM_E mr}{R_E^3}$$

Das Potential folgt aus einer Integration von $F(r)$:

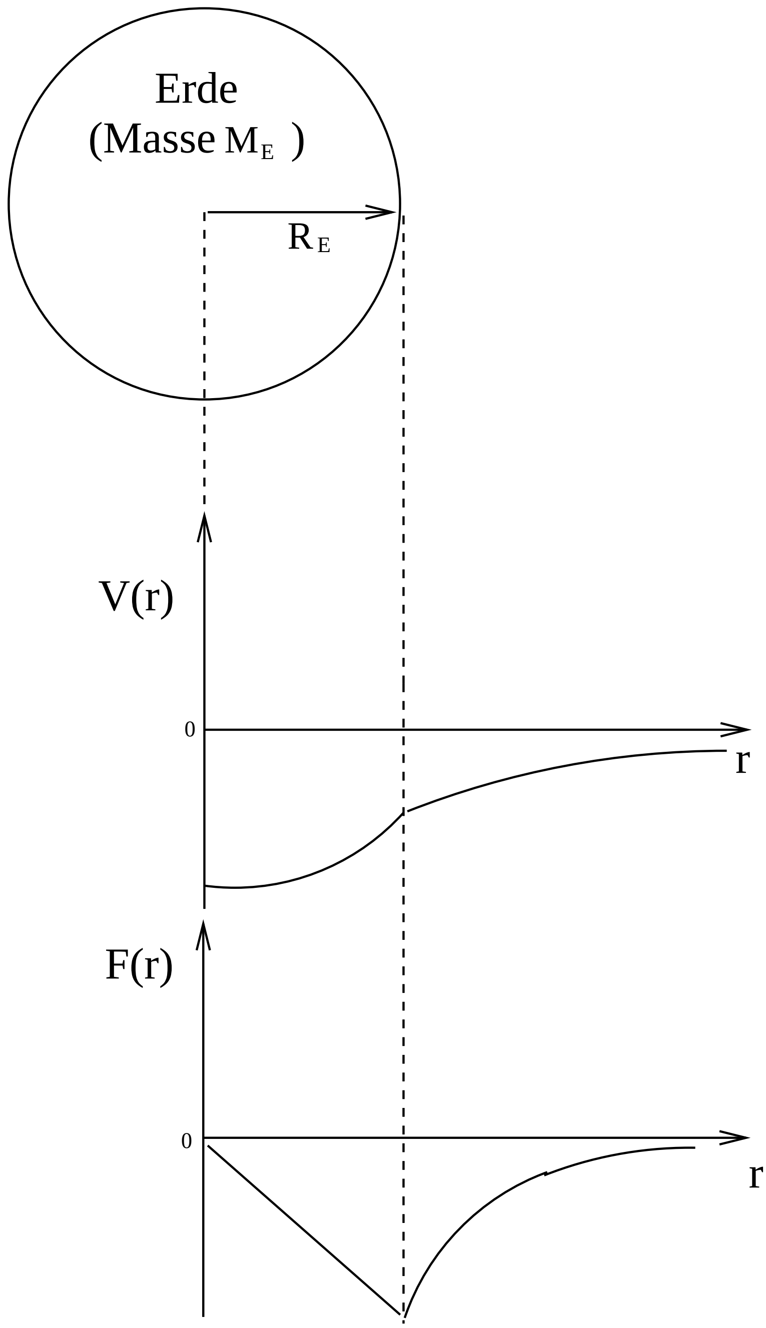
$$V(r) = -\int \frac{F(r)}{m} dr = \frac{GM_E}{R_E^3} \int r dr = \frac{GM_E}{2R_E^3} r^2 + C \text{ , } C \text{ sei die Integrationskonstante}$$

Stetigkeitsbedingung bei $r = R_E$:
aus (a): $V(R_E)$ is $-\frac{GM_E}{R_E}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{GM_E}{2R_E^3}R_E^2 + C &= -\frac{GM_E}{R_E} \\ C &= -\frac{3GM_E}{2R_E} \\ V(r) &= -\frac{GM_E}{2R_E^3}\left(3R_E^2 - r^2\right) \end{aligned}$$

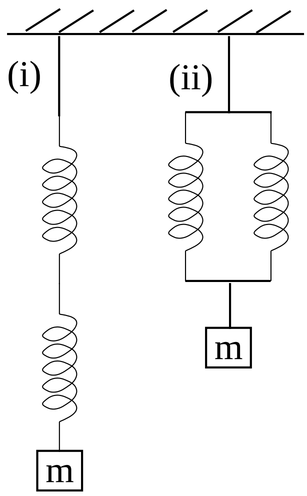
Alternative Lösung:
Das Massenelement einer Kugelschale ist dasselbe wie in (a): $dM = \frac{3R^2 M_E}{R_E^3} \cdot dR$
Für $r < R_E$ haben erhält man

$$\begin{aligned} V(r) &= -\frac{3M_E}{R_E^3}\frac{G}{r}\int_{R=0}^{R=r} R^2 dR - \frac{3M_E G}{R_E^3}\int_{R=r}^{R=R_E} \frac{R^2}{R} dR \\ V(r) &= -\frac{GM_E}{2R_E^3}\left(3R_E^2 - r^2\right) \\ \Rightarrow F(r) &= -m\frac{dV(r)}{dr} = -\frac{GmM_E r}{R_E^3} \end{aligned}$$

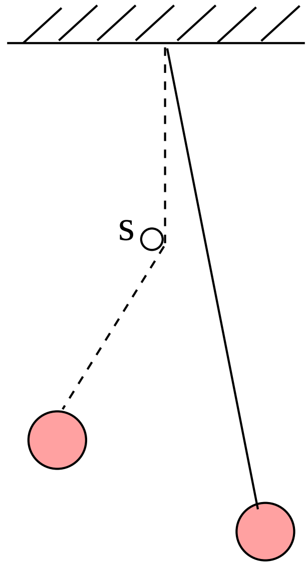


(2 Punkte)

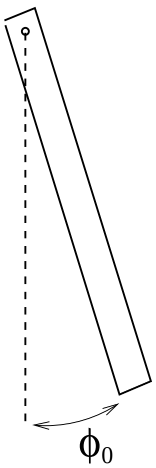
5. 15 Punkte



(a) Die zwei Oszillatoren der linken Abbildung bestehen aus je zwei (masselosen) Federn mit der Federkonstante k_0 und einer Masse m. Bestimmen Sie jeweils die effektive Federkonstante K und die Kreisfrequenz ω jedes Oszillators in Einheiten von k_0 und $\omega_0 = \sqrt{k_0/m}$.



(b) 60 cm unterhalb des Aufhängungspunktes eines 80 cm langen Fadenpendels befinde sich ein fester Stift S, an den sich der Faden während der Schwingung anlege. Wieviele Schwingungen führt das Pendel pro Minute aus?



(c) Ein dünner Stab der Länge $l = 30$ cm sei an seinem oberen Ende drehbar aufgehängt. Er werde zur Zeit $t_0 = 0$ s um einen kleinen Winkel $\phi_0 = 0.01$ rad aus der Vertikalen ausgelenkt und losgelassen. Wie lautet die Funktion $\phi(t)$ für die Bewegung des Stabes? Ist die Schwingung harmonisch? Wie groß ist ihre Periodendauer T? (Es gelte die Näherung: $\sin\phi \sim \phi$. Hinweis: Benutzen Sie das Drehmoment zur Herleitung).

Lösung

(a) (i) (3 Punkte) Die Gesamtauslenkung ist die Summe der Einzelauslenkungen. Sie ist also doppelt so groß wie die Auslenkung x einer Feder:

$$\begin{aligned} \Rightarrow K &= \frac{mg}{2x} = \frac{k_0}{2} \\ \Rightarrow \omega &= \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(ii)(3 Punkte) Die Auslenkung jeder Feder ist diesselbe. Die Gewichtskraft der Masse m teilt sich auf die beiden Federn auf; hier wirkt also jeweils die halbe Gewichtskraft auf eine der Federn. Damit ist die Auslenkung halb so groß wie im Fall von nur einer Feder:

$$\begin{aligned} \Rightarrow K &= \frac{mg}{\frac{1}{2}x} = 2k_0 \\ \Rightarrow \omega &= \omega_0\sqrt{2} \end{aligned}$$

(b) (3 Punkte) Für das Fadenpendel gilt $T = \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot 2\pi$ und in diesem Fall $T = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2}$ mit $L_1 = 80$ cm und $L_2 = 20$ cm.

$$T = \frac{2\pi}{2}\frac{\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2}}{\sqrt{g}} = 3\sqrt{2}\pi \text{ sec}$$

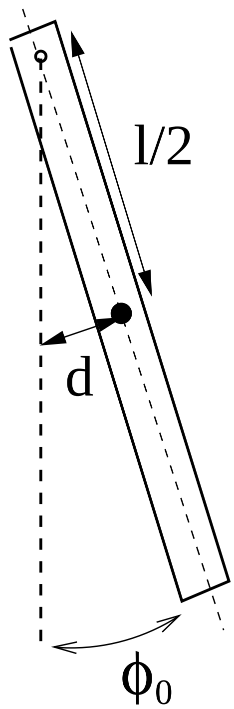
$\Rightarrow$ Das Pendel führt $\sqrt{200}/\pi$ Schwingungen in der Minute aus.

(c) (6 Punkte) Trägheitsmoment eines dünnen Stabes:
Die Dichte $\rho = \frac{m}{l}$ (ρ ist eine Längendichte)
Der Massenschwerpunkt ist $S = \frac{l}{2}$ vom Stabende entfernt.
Die Masse eines infinitesimalem Elementes mit Länge dx: $dm = \frac{m}{l}dx$,
Bestimme das Trägheitsmoment bezüglich S:

$$\begin{aligned} I_S &= \frac{m}{l}\int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx \\ I_S &= \frac{m}{3l}\left[x^3\right]_{-l/2}^{l/2} = \frac{ml^2}{12} \end{aligned}$$

Das Gesamtträgheitsmoment bezüglich eines Stabendes ist gegeben durch (Satz von Steiner):

$$I = I_s + I_0 = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2$$



Aus der Abbildung: $\sin\phi = \frac{d}{l/2} = \frac{2d}{l}$
Bewegungsgleichung:

$$
\begin{aligned}
I\ddot{\phi} &= -mgd = -\frac{mgl\sin\phi}{2} \\
\Rightarrow \ddot{\phi} + \frac{mgl}{2I}\phi &= 0, \text{ unter der Annahme } \sin\phi \sim \phi
\end{aligned}
$$

Vergleich mit der Gleichung eines einfachen harmonischen Oszillators:
$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ mit der Periodendauer $T = 2\pi/\omega$

$$
\begin{aligned}
\omega &= \sqrt{\frac{mgl}{2I}} = \sqrt{\frac{3g}{2l}} \\
\Rightarrow T &= 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}
\end{aligned}
$$

Für $l = 60$ cm, $T = 2\pi\sqrt{0.04} = 0.4\pi$ sec.

6. (10 Punkte)

(a) Betrachten Sie die folgenden Wellen:

$$\begin{aligned} y_1 &= a\cos(\omega_1 t - k_1 x) \\ y_2 &= a\cos(\omega_2 t - k_2 x) \end{aligned}$$

mit $\omega_1 \simeq \omega_2$ und $\frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} = c$ (die Ausbreitungsgeschwindigkeit). Zeigen Sie, dass die Superposition von y_1 und y_2 aus einer Schwingung mit der Frequenz $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ besteht, die mit einer Einhüllenden mit der Frequenz $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$ moduliert ist. Zeichnen Sie die Form der Überlagerung als Funktion der Zeit über eine Periode der Amplitudenmodulation.

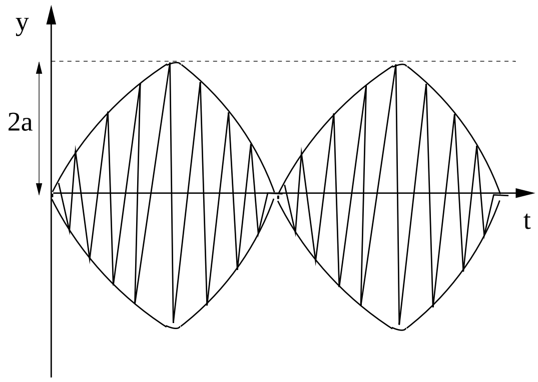
(b) Zeigen Sie, dass die Amplitudenmodulation sich mit derselben Geschwindigkeit ausbreitet wie die Komponenten y_1 und y_2.

(c) Zwei Stimmgabeln, die 255 bzw. 257 Schwingungen pro Sekunde ausführen, seien Seite an Seite platziert. Welche Frequenz hören Sie, und wie ist das, was Sie hören, in der Zeit moduliert?

<u>Lösung</u>

(a) (5 Punkte) Benutze die Identität $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$ um $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B$ zu erhalten und mit $\alpha = (A+B), \beta = A - B$ erhalten wir $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

$$y = y_1 + y_2 = 2a\cos\left(\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2} - \frac{(k_1+k_2)x}{2}\right)\cos\left(\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2} - \frac{(k_1-k_2)x}{2}\right)$$



(b) (2 Punkte) Geschwindigkeit der Modulation $= \frac{\omega}{k} = \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2} = \frac{c(k_1-k_2)}{k_1-k_2} = c$

(c) (3 Punkte) $\nu_1 = 255$ Hz, $\nu_2 = 257$ Hz, mit dem gerade für die Überlagerung erhaltenen Ergebnis folgt für die Frequenz, die man hört, $\nu = \frac{\nu_1+\nu_2}{2} = 256$ Hz. Aus der Skizze für y kann man ablesen, dass jedes Maximum (oder Minimum) in der Zeit vom nachfolgenden Maximum (Minimum) durch eine halbe Modulationsperiode getrennt ist, d.h. durch $\frac{1}{|\nu_1-\nu_2|} = \frac{1}{257-255} = \frac{1}{2}$ sec. Damit hört man einen Ton der Frequenz 256 Hz, der zweimal pro Sekunde zwischen maximaler und minimaler Lautstärke wechselt.